真值函数与非真值函数的等值变换

——一元算符逻辑理论五探

万小龙,陈明益,冉 奎

(华中科技大学 哲学系,湖北 武汉 430074)

摘 要:一元算符逻辑理论从一般方法论层面探寻非经典逻辑与经典逻辑的关系。作为其初步的狭义函数相对论(STRF)基于函数相对性而提出专门针对二真值命题逻辑系统中一元非真值函数联结词与二元真值函数联结词的变换关系,其核心就是对"非真值函数与真值函数的等值变换"原理的发现与严密的经典定义。它不断借用了量子力学中对"不确定"的确定性的认识,所揭示的非真值函数在句法与语义上的两大特征分别有助于模态逻辑中的等值代换难题、多值逻辑中的非二值性难题等哲学逻辑与逻辑哲学中的非经典性问题回归其经典本性。

关键词:二真值;非真值函数;一元算符;狭义函数相对论(STRF)

中图分类号:B815.1 **文献标示码:**A **文章编号:**1008-7699(2012)06-0001-10

一、狭义函数相对论(STRF)前研究

经典逻辑是科学推理中所使用的唯一逻辑吗?哲学家罗素曾经论证所有语言(包括科学语词)都是含混的,并且认为含混性使经典逻辑无效。[1]逻辑经验主义者亨利克·梅尔博格(Henryk Mehlberg)在《科学的途径》(*The Reach of Science*)一书中提出一种"超赋值"(supervaluation)方法,以适应日常语言和科学语言中的含混命题①。[2]科学哲学家范·弗拉森(Bas C. van Fraassen)则发展了这种超赋值方法,并建构了一种处理包含空名的语句的超赋值语义学。[3]科学中的含混性似乎说明,经典逻辑不足以处理某些科学命题的推理,量子力学更进一步提供了这个观点的例证。不同于经典逻辑的量子逻辑格论进路也被毕克霍夫和冯·诺依曼提出来。[4]量子测量实验似乎预示经典逻辑不适合解释微观物理世界的一些经验现象,由此汉斯·莱辛巴赫(Hans Reichenbach)应用三值逻辑来处理量子命题的推理。[5]希拉里·普特南基于此激进地宣称量子力学导致经典逻辑的整体修正,逻辑真理是可错的并因此逻辑是经验的。[6]除了自然科学提出的这些挑战之外,经典逻辑还遭遇其他许多领域的挑战,例如数学中的不可判定问题、日常语言中的模态词和空名以及未来偶然事件等,非经典逻辑借此良机蓬勃发展起来。但是,一些哲学家忠实地捍卫经典逻辑的唯一有效地位而拒不承认非经典逻辑对经典逻辑的修正。牛津大学的提姆西·威廉姆森(Timothy Williamson)的辩护最具代表性:"经典逻辑正常地被用在逻辑、数学和科学中,在这些领域中,它被证明是极其成功的。如果说,'蹩脚的工匠指责工具',那么经典的逻辑和语义学就属于那些蹩脚的哲学工匠的工具"。[7]面对经典逻辑与非经典逻辑的冲突局面,消解其对立并挖掘二者相通关系的途径已经成为当务之急。

收稿日期:2012-11-20

基金项目:国家社会科学基金项目"量子信息的哲学问题研究"(2007zxc33);华中科技大学基金项目"一元算符理论研究"(RWZD1213)

作者简介:万小龙(1964-),男,江苏常州人,华中科技大学哲学系教授,博士生导师,国家马克思主义工程"科学技术哲学"首席专家.

① 含混命题类似于逻辑实证主义者所认为的不可证实命题,虽然这类命题没有确定真假值,但它们不是无意义的。

非经典逻辑或非标准逻辑(non-standard logics)的大部分研究可以分为两类:由于缺少一些经典定律而不同于经典逻辑(或标准逻辑)的逻辑类,例如直觉主义逻辑、次协调逻辑和量子逻辑;由于语言或公理的扩充而不同于标准逻辑的逻辑类,例如模态逻辑。[8] 我们也可以遵循苏珊·哈克的立场,称前一类逻辑为"变异逻辑"(使用与经典逻辑相同或相近的算符,却修改经典公理或推理规则),而将后一类逻辑称作"扩充逻辑"(增加新的逻辑算符,但不修改经典公理或规则)。[9] 根据这种分类,非经典逻辑看起来与经典逻辑有种天然不可分的联系。按照格雷汉姆·普利斯特(Graham Priest)的看法,经典逻辑是源于一种全新的数学技术应用于逻辑领域并由弗雷格、罗素等发展出的一种经典理论,但是这个名称不是很合适,因为这种逻辑与古希腊、罗马时期所传授和理解的逻辑联系甚少。因此,经典逻辑在"标准"的意义上,才是"经典的"。[10] 非经典逻辑或者意图补充经典逻辑,或者在经典逻辑"出错"的地方取而代之,自然在某方面显示出与经典逻辑相通的特性。比如,卢卡西维茨就以为他提出的连续值逻辑系统(或模糊逻辑系统)L^* 采取 0 和 1 之间的实数作为真度的语义学。当把真度限制为 1、i(0.5)和 0 时,它就成为卢卡西维茨的三值系统 L_3;当将真度限制为 1 和 0 时,它就回到经典语义学。大多数非经典逻辑都采用可能世界语义学作为主要的语义,当我们将可能世界限制于现实世界,它们似乎可以回到经典语义。作为最典型的非经典逻辑,模态逻辑为我们提供了探讨非经典逻辑与经典逻辑关系的最好素材。模态逻辑似乎提供了一个重要的初始信息:模态逻辑本质上不是标准逻辑的竞争对手,而是对标准逻辑的语言和公理的丰富(linguistic and axiomatic enrichments)。这特别意味着标准联结词(否定、合取、析取等)的意义本质上保存在模态系统中。不仅如此,标准逻辑与模态逻辑之间的联系是如此之强,以致当代逻辑学家所持有的主流态度直到 20 世纪前几十年,仍然是否认一种独立的模态逻辑的合法性。主导性的观点是,模态概念可以重新解释为元系统的概念,或者模态陈述可以解述(paraphrase)为一阶标准逻辑的语言。这种还原是初步似真的。一方面,"2+2=4 是必然的"这个陈述可以声称与"2+2=4 是皮亚诺算术的一个定理"有相同的意义。另一方面,"必然地,所有的猫都是会死的"可以解述为"对于每个 x 和每个 y,如果 x 是一只猫并且生活在时空区域 y 中,那么 x 是会死的。"当代逻辑的先驱者似乎明显忘掉了模态三段论也是古代和中世纪逻辑的本质部分。随后,逻辑与数学之间的联系似乎更加鼓励对模态逻辑的漠不关心,甚至发展出以蒯因的反模态主义为代表的对模态逻辑的敌对态度。还有一种突出的观点认为,模态逻辑是标准逻辑的"碎片"(fragments)。模态逻辑"从经典一阶或高阶的谓词逻辑的标准语义学那里继承其语义学,但却通过使用算子而不是量化来限制表达力"。[11] 因此,"碎片"意味着限制表达力导致相当不同于标准逻辑的逻辑属性的系统,许多模态逻辑的可判定性就是一个显著的例子。从模态逻辑的数学研究角度看,"模态逻辑更好地被视作一种挖掘标准逻辑中的核心主题的方法论",或者说,"模态语言揭露了经典系统的内部结构"。[11]xii 当然,虽然以上的尝试把模态算子还原为量词(或模态语言转译为一阶语言)有某种直觉上的吸引力,但它也有诸多缺点或困难。这些困难表现在四个方面:有些模态公理不能从量词的一阶定理中得出来,有些"必然性"不蕴涵"可能性",从言的(de dicto)与从物的(de re)模态之间的区别和叠置模态难题。虽然这些困难并不意味着否认量化与模态之间存在的某种重要关系,而是否认每种模态观念都可以使用量词翻译为一阶逻辑中可公理化的东西。因此,有人可能设想一些模态观念可以不是根据一阶量词而是通过二阶量词来表示的;还有人设想量词与模态算子之间的关系存在于逆方向,也即一阶量词可处理为一种特殊模态算子。

模态逻辑直接还原为经典逻辑的困难也预示着其他非经典逻辑直接还原为经典逻辑的困难。但是,这些探讨经典逻辑与非经典逻辑之间关系的进路是一种自下而上的路径,也即从具体的某种非经典逻辑(如模态逻辑、多值逻辑等)中探索它与经典逻辑的关系。本文从经典命题逻辑的真值函数解释入手,试图寻找一种统一或综合的方法论,以摸清非经典逻辑与经典逻辑的关系,然后检验这种方法论是否满足具体的非经典逻辑与经典逻辑之间的转换,因此我们要寻找一种自上而下的进路。本文基于这样一个元理念,也即非经典

逻辑可能与经典命题逻辑是相通的，毕竟非经典逻辑的主要兴趣通常是在命题层面。当然，这会面临经典命题逻辑与一阶谓词逻辑的关系问题。按照这个理念，模态系统(或许其他多数非经典逻辑系统)首先是没有扩充标准命题逻辑的符号意义的公理扩充的命题系统。我们称这种综合的方法论为“一元算符逻辑理论”。需要强调的是，即使我们的结论是对的，我们也不是要指出非经典逻辑由于其经典本性因而是无价值的，而是要指出非经典逻辑到底在何种层面上与经典逻辑相对应，因此指明非经典逻辑的发展方向。

二、狭义函数相对论(STRF)概述

经过两年多的探索，我们想要建立的一元算符理论是通过对一元算符进行系统研究而逐步将非经典逻辑向经典逻辑统一。[12-14]其初步是狭义函数相对论(STRF)，它仅研究二真值的命题逻辑系统 CP 中一元非真值函数联结词与 16 个二元真值函数联结词①之间的关系。其核心的思想就是：上述四个限制条件下的“非真值函数与真值函数的等值变换”。

1. 非严密定义的非真值函数

一般地说，函数关系是两个变量间(也可以是两个集合之间，或两个合式公式之间)的一种对应关系。对于一个变量和应变量各自的值域来说，如果变量有一个值，应变量相应的有且仅有一个值与之对应，那么这个应变量就是那个变量的函数。真值函数是指变量和应变量的值域都是真值域的函数。我们研究的非真值函数是指变量和应变量的值域都是真值域，但如果变量有一个值，应变量相应的有且不总是仅有一个值与之对应。也就是说，我们研究的非真值函数其实是二真值的非函数，但为了与哲学逻辑学中已有的文本对应，我们仍称之为非真值函数。[15-20]

表 1　经典二真值基本二变元函数

p	q	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{14}	D_{15}	D_{16}
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0
真值函数	联结词	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}

表 1 中，$D_2 = p \vee q$ 虽然是由 p 和 q 这两个变元共同形成的真值函数，但不是仅由 p 这一个变元所形成的真值函数(p 取一个确定真值 0 时，$p \vee q$ 不是仅有一个相应的确定真值)，因此它不是 p 的真值函数，而是 p 的非真值函数。进一步说，16 个真值函数中，仅有 D_1、D_6、D_{11} 和 D_{16} 是 p 的真值函数，其他 12 个都是 p 的二真值的非真值函数。这也说明，至少有一些所谓的非真值函数实际上等值于另一种意义上的真值函数(函数相对性)。

我们似乎可以用这种方法直接定义一个非真值函数联结词 $\blacksquare_2$，$\blacksquare_2 p =_{def} p \vee q$。不过，如何表达定理 $\blacksquare_2 p \rightarrow p$ 中的 $\blacksquare_2 p$ 呢？虽然将 $\blacksquare_2 p =_{def} p \vee q$ 代入这个定理是成立的，但将 $\blacksquare_2 p =_{def} p \vee r$ 代入这个定理也是成立的，显然 $p \vee q \neq p \vee r$。这说明，认识到“非真值函数与真值函数的等值变换”这种性质，与严密定义这种变换，并不是同一回事。

① 实际上，其中 4 个是经典一元联结词，4 个中 2 个其实是经典零元联结词。

2. 形式定义的非真值函数

STRF在CP系统上仅增加一些符号，而新增加的符号完全由CP中原有的符号直接定义。

在CP中，变元符号集可以由无限可数集At所定义：

$At =_{def} \{p, q, r, \cdots p', q', r', \cdots p^{(n)}, q^{(n)}, r^{(n)}, \cdots;\}$。

在狭义函数相对论中引入新符号：

(1)“$\blacksquare_i$”，$i=1,2,3,\cdots 16$。“$\blacksquare$”为一元算符。

(2)$I =_{def} \{p, p_1, p_2, \cdots p_{m1}, q, q_1, q_2, \cdots q_{m2}, \cdots r^n_{mx} \cdots\}$是从At中选取的变元序列，且I满足：

a. 设$S_1 = At, S_2 = S_1 - p, S_3 = S_2 - p_1, S_{m1} = S_{m1-1} - p_{m1-2}, S_{m1+1} = S_{m1} - p_{m1}, S_{m1+2} = S_{m1+1} - q \cdots, S_{m1+m2} = S_{m1+m2-1} - q_{m2-1}, \cdots S_{m1+m2+\cdots mx} = S_{m1+m2+\cdots mx-1} - r^n_{mx-1}$；

b. 设选择函数f的定义域为$\{S_1, S_2, S_3, \cdots S_i \cdots\}$，则$f(S_i) \in S_i$；

c. $p = f(S_1), p_1 = f(S_2), p_2 = f(S_3), \cdots q = f(S_{m1+1}) \cdots r^n_{mx} = f(S_{m1+m2\cdots+mx}) \cdots$。

其中，m_1、m_2、$m_3 \cdots m_x \cdots$均为有限数。

(3)●p表示由变元p所形成的一元非真值函数的一个集合。

表2 狭义一元算符集合真值表

p	p_1	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{14}	D_{15}	D_{16}
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0
.		d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}
		$\blacksquare_1$	$\blacksquare_2$	$\blacksquare_3$	$\blacksquare_4$	$\blacksquare_5$	$\blacksquare_6$	$\blacksquare_7$	$\blacksquare_8$	$\blacksquare_9$	$\blacksquare_{10}$	$\blacksquare_{11}$	$\blacksquare_{12}$	$\blacksquare_{13}$	$\blacksquare_{14}$	$\blacksquare_{15}$	$\blacksquare_{16}$

定义系列Ⅰ：基本一元算符

定义Ⅰ-1：由一元非真值函数联结词(一元算符)$\blacksquare_2$和变元p形成的非真值函数$\blacksquare_2 p$，$\blacksquare_2 p =_{def} D_2 = p \vee p_1$，表2中的其他15个一元算符由完全集$\{\neg, \vee, \blacksquare_2\}$递归定义。因此有$\blacksquare_i p =_{def} d_i(p, p_1)$。

p_1也可表示At集中除p外的补集中一个任意选定的变元。

定义Ⅰ-2：由一元非真值函数算符$\blacksquare_2$和变元q形成的非真值函数$\blacksquare_2 q =_{def} D_2 = q \vee q_1$，其他15个一元算符由完全集$\{\neg, \vee, \blacksquare_2\}$递归定义。因此有$\blacksquare_i q =_{def} d_i(q, q_1)$。

同理可得其他变元所形成的一元算符集。

定义系列Ⅱ：叠置算符

定义Ⅱ-1：由变元p与16个算符$\blacksquare_i$叠置所形成的n重叠置非真值函数分别一一恒等值于由p和p_1、$p_2 \cdots . p_n$变元所形成的真值函数。

$$\blacksquare_i p = d_i(p, p_1); \blacksquare_i \blacksquare_i p = d_i(\blacksquare_i p, p_2); \cdots; \underbrace{\blacksquare_i \blacksquare_i \cdots \blacksquare_i}_{n个} p = d_i(\underbrace{\blacksquare_i \blacksquare_i \cdots \blacksquare_i}_{n-1个} p, p_n)。$$

同理可得其他变元的叠置算符定义。

因为p_1已经被定义为$\blacksquare_7 p$，所以尽管$\blacksquare_i p_1 \neq d_i(p_1, p_2)$，但$\blacksquare_i p_1 = \blacksquare_i \blacksquare_7 p$，因此由叠置定义Ⅱ-1就足以处理与$\blacksquare_i p_1$有关的问题，而不必再引入一个新的变元序列。

定义系列Ⅲ：语义表示定义

定义Ⅲ-1:STRF维持CP二真值语义不变,仅将多行真值表等值地改写为单行真值表。“/”表示第一次真与非真(即假)的二分,“//” 表示第二次二分,依次类推。

例如,p的真值指派为“1/0”,同时$\blacksquare_2 p$和$\blacksquare_2\blacksquare_2 p$的真值指派分别为“1/1//0”“1/1//1///0”; $\blacksquare_{12} p \equiv p \wedge p_1$,所以其真值语义是:“1//0/0”。

同理可得其他变元形成的非真值函数的语义定义。

相应的非真值函数的公式的形成法则与CP中一样,形成定义可同理于前面三类定义。

对于二真值的一变元非真值函数的集合●p,它或者是如上所述的16个非真值函数$\blacksquare_i p$之一;或者是16个非真值函数联结词的有限叠置所形成的一个复合非真值函数;或者是16个非真值函数联结词的不同有限叠置所形成的一组复合非真值函数。

STRF中的三个定义系列中的被定义词虽然是并仅是新增加的,但其中的定义词和定义项完全是CP系统中原来的,所以STRF-CP系统其实仍然是CP系统。

3.STRF所揭示的经典逻辑的重要性质

不过,虽然STRF-CP仅是CP的另一种表示形式,但却会形成在原来的CP系统中不易被察觉的几条重要的导出规则。

规则1:叠置算符的区分性规则

第n次叠置算符对应At中任意选定的相应变元序中的第n个变元n(n为自然数)。

对于任意公式,这里先默认变元序到对应的公式序的转变。

例如:$\blacksquare_2\blacksquare_2 p = p \vee p_1 \vee p_2$,而不是$\blacksquare_2\blacksquare_2 p = p \vee p_1 \vee p_1$;反之,$p \vee p_1 \vee p_1 = p \vee p_1 = \blacksquare_2 p$

而∵$\blacksquare_7 p = p_1$,$\blacksquare_7\blacksquare_7 p = \blacksquare_7 p_1 = p_2$,∴$\blacksquare_7 p \vee \blacksquare_7\blacksquare_7 p = p_1 \vee p_2 = \blacksquare_2 p_1 = \blacksquare_2\blacksquare_7 p$

规则2:非完全可代换性规则(同一非真值函数联结词对不同公式的区别原理)

对于任意非真值函数$\blacksquare_i p$用$\blacksquare_i q$代换时,一般地,遵照K-2而非K-1的形式:K-1:当$\blacksquare_I p = d(p, p_1)$时,$\blacksquare_I q = d(q, p_1)$;K-2:当$\blacksquare_i p = d(p, p_1)$时,$\blacksquare_i q = d(q, q_1)$。

实际上,当i=1,6,11或16时(见表2),这时的K-2就退化为K-1。

规则3:混合命题(或公式)形式化形成规则

不同变元所形成的序也是相互独立的。

例如,将下列自然语句形式化为形式语言(其中假设“可能”算符即$\blacksquare_2$):“我吃饭是可能的”“我喝酒是可能的”,并且“我吃菜”“我喝水”。

令“我吃饭”为p,那么“我吃饭是可能的”为$\blacksquare_2 p$,也即$p \vee p_1$;“我喝酒”为q,那么“我喝酒是可能的”为$\blacksquare_2 q$,也即$q \vee q_1$;“我吃菜”为r,“我喝水”为s。

上述那段话就可以形式化为:$(p \vee p_1) \wedge (q \vee q_1) \wedge r \wedge s$

这里的6个变元在逻辑上都是相互独立的,原则上说完全真值表总共有64行。

规则4:一元非真值函数语义的运算规则

从基本定义可知,任意的一元非真值函数算符都由完全集{¬,∨}所定义,而STRF的真值语义其实是经典二真值表的简化,因此很容易看出一元非真值函数中仅有的两条基本运算法则。

法则4-1:否定

对任意一元非真值函数公式A的否定,就是将其中的每一个分隔的真值都作否定。

例如,公式A的语义是:0/1//0///1,那么¬A的语义就是:1/0//1///0。

法则4-2:析取

对任意两个一元非真值函数公式A和B,A∨B就是将每一个相对应的分隔做析取运算。

例如，A 的语义是：0/1//0///1，B 的语义是 1//0/1//0，那么，

$A \vee B = 0/1//0///1 \vee 1//0/1//0 = (0 \vee 1//0)/(1//0///1 \vee 1//0) = ((0 \vee 1)//(0 \vee 0))/((1 \vee 1)//(0///1 \vee 0)) = ((0 \vee 1)//(0 \vee 0))/((1 \vee 1)//((0 \vee 0)///(1 \vee 0))) = 1//0/1//0///1$

三、对狭义函数相对论(STRF)的解释

如果经典(命题)逻辑在真值函数语义解释的意义上可被称作真值函数逻辑的话，笔者相信，真值函数逻辑自身产生的问题仍然需要通过改善自身的方式来解决，使用其他的解释方法(如非真值函数解释)或建构不同的逻辑系统，可以提供经典逻辑更好的理解，但不能取代它。

1.“不确定”的确定性

我们所谓的严密性，首先是同时满足自洽性和紧致性要求，其次才是其他规范性要求。回想我们在量子力学中遇到的不确定性：量子力学不能确定地预见单次量子测量的结果，而只能预见单次测量的结果的概率；但量子力学能够预见单次测量的结果的概率这一点是完全确定的。进一步说，由于量子力学所揭示的量子世界的基本特征(量子态的纠缠性)，尽管量子力学能够预见单次测量的结果的概率这一点是完全确定的，但这个量子概率不能还原为经典概率，这还反映为一对共轭物理量不可同时精确测量的不确定性；尽管在一对共轭物理量间具有不可同时精确测量的不确定性，但它们之间具有这种不确定性关系这点是确定的，并且任何一对共轭量之间都具有相同程度的不确定性关系这一点也是确定的。进一步说，在两个全同粒子形成的聚合中，尽管我们无法确定一个单次量子测量中测到的究竟是哪一个粒子，但这样一个单次测量中只能测到二者之一，而不会同时既测到这一个又测到另一个。

仍以$\blacksquare_2 p$为例。首先，当 p 有确定真值 0 时，$\blacksquare_2 p$ 的真值不是确定的 1，也不是确定的 0，而是具有不确定性的 1/0(我们称之为“可真可假”)；但这时，$\blacksquare_2 p$ 的真值是 1/0 是完全确定的(即“可真可假”这一点是确定的)。

其次，当 p 有确定真值 0 时，尽管$\blacksquare_2 p$ 的真值是不确定的 1/0 这一点是完全确定的，也就是说，这时$\blacksquare_2 p$ 的逻辑语义可以完全确定地视为 1/0，但仍不能把$\blacksquare_2 p$ 在逻辑句法上定义为 p 与 CP 变元集中独立于 p 的另一个确定的变元的析取；不过，这时$\blacksquare_2 p$ 在逻辑句法上只能被定义为 p 与 CP 变元集中独立于 p 的某个变元的析取这点是完全确定的；也就是说，$\blacksquare_2 p$ 在逻辑句法上不能同时既被定义为 p 与 CP 变元集中独立于 p 的某个变元的析取，同时又被定义为 p 与 CP 变元集中独立于 p 的某另个变元的析取，这点也是完全确定的。

再者，由于$\blacksquare_2 p =_{def} p \vee p_1$，尽管 p_1 不能表示为 CP 变元集中独立于 p 的一个确定的变元，但可以也只能表示为某一个变元这点是确定的，所以 p_1 是并只能是 CP 变元集中任意选取但已经选定的一个变元。进一步地，尽管 p_1 在句法上具有某个层次上的不确定性，但$\blacksquare_2 p =_{def} p \vee p_1$ 中的 p 和“∨”是完全确定的。或许有人会由此认为完全确定地定义一元非真值函数必须直接仅利用 CP 变元集中的变元形成的每一个二元真值函数都一一对应地具体定义。例如，$\blacksquare_2^q p =_{def} p \vee q$，$\blacksquare_2^r p =_{def} p \vee r$，…。不过显而易见，这样定义不仅是“无限个二元真值函数一一对应同样无限个一元非真值函数”，而且还会出现“必须用与真值函数一样多的无数个一元非真值函数联结词，才能完备地定义 16 个非真值函数联结词所形成的真值函数”的奇怪现象，况且还有$\blacksquare_2^q p =_{def} p \vee q =_{def} q \vee p = \blacksquare_2^p q$ 的非紧致现象。更进一步说，在自然语言中，仅凭有限个真值函数联结词，就可以形成无限多个真值函数。例如，我们不会认为“我吃饭是允许的”“我喝酒是允许的”中的两个“允许”有何不同。即使我们认为在“我吃饭”“我喝酒”同真时，“我吃饭是允许的”“我喝酒是允许的”的真值可能不同，而承认“允许”是一个非真值函数联结词。

第四，理性的方法是，“仅定义出与二元真值函数联结词一样多的16个一元非真值函数联结词”，就可以完备地、自洽地使得“无限个二元真值函数一一对应同样无限个一元非真值函数”，这个方法就是利用叠置算符。如果叠置方法可以成功，由于STRF-CP系统仍是CP系统，所以其完备性、可靠性等是无需证明的。不过，叠置方法好像有问题，如果At是非空可数集，那么如何保证定义系列Ⅰ中那些与不同变元相应的不同序间的相互独立性？其实，由于逻辑公式总是有限的，可以定义At是可数无限集，而用于形成算符叠置的任意选取的不同变元形成的相互独立的不同序均是有限集。本文正是出于上述考虑给出基本定义。

2. 一元非真值函数联结词的形成

自然语言似乎提出经典逻辑最多的挑战，即使我们将真值函数逻辑应用于自然语言论证的最安全做法是把自身限制在用自然语言的真值函数片段(fragment)提出的论证上，但是这种策略会使真值函数逻辑变得与我们的直觉相一致的无数自然语言论证不相关(特别是那些把大多数条件句看作非真值函数的人将认为这种策略很笨拙)，所以应该扩大真值函数逻辑的范围，以包括涉及非真值函数联结词的有效推理(或论证)。[12]因此，笔者认为，不是要用非真值函数的方法来解释经典逻辑，而是应该找到一种方法来扩大经典真值函数解释的范围，以更好地容纳更多的通过引入非真值函数算符来处理的推理。

接下来尝试这样一种方法来给出非真值函数联结词的研究，作为本文第二节的定义系列的一个说明。类比爱因斯坦在物理学中的工作，爱因斯坦最主要的贡献是将经典物理学理论中作为形而上学陈述中的概念“时间”与“空间”等内化为科学理论的数学物理陈述中的可验证的科学概念；同样，把经典逻辑理论中作为形式系统背后的形而上学陈述的“推理有效”经过“蕴涵为真”而内化为形式体系内部的可运算的基本算符。逻辑中的有效推理通常借助联结词“蕴涵”来表示，也就是说，形式系统背后的形而上学概念“推理有效”是通过形式系统内的“蕴涵为真”表现出来的。因此，我们可以将“推理有效”经过“蕴涵为真”内化为一个基本算子。借助于这个基本算子，再来研究真值函数联结词与非真值函数联结词。具言之，假设原子命题p和q以及蕴涵关系→，显然从p有效推出q，也即“p→q”为真。根据经典命题联结词的解释，“p→q”是有序对(p，q)形成的表1中的一个真值函数$D_4=d_4(p,q)$。那么，可以将q看作有序对(p,D_4)所形成的一个类反函数(逆函数)$q=\mathrm{arcd}_4(p,D_4)$。当D_4为真时，这时的逆函数就相应地改写成$q^1=\mathrm{arcd}_4(p,1)$。显然，在$\mathrm{arcd}_4(p,1)$中，只有一个变量p，而$\mathrm{arcd}_4(\quad,1)$可以视为一个真值类函数关系式，姑且称之为H_4。按照以上真值类函数联结词的做法，给定p的真值与“p→q”为真的真值，H_4p的真值为何。

从表3可以看出，当p为假，H_4p既可以为真，也可以为假，因此它符合非真值函数的特征。也就是说，H_4可被称作一个非经典一元算符(非真值函数式)。从H_4p的真值表中，还发现这样一个特征：H_4p与经典析取式$p\vee q$的真值语义相同。换言之，一元的非真值函数式H_4与p所形成的公式真值语义地等价于p与另一变元及二元的真值函数联结词∨所形成的公式(表4)。据此，可以递归定义H_4p的叠置的真值表(表5)。

同样，H_4p的叠置算符H_4H_4p仍然显示出非真值函数的特征。

表3　H_4p的真值表

p	H_4p
1	1
0	1
	0

表4　H_4p语义与$p\vee q$语义表

p	H_4p	$p\vee q$
1	1	1
0	1	1
	0	0

表5　H_4H_4p叠置语义表

p	H_4p	H_4H_4p	“$H_4p\to q$”为真
1	1	1	1
0	1	1	1
	0	1	1
		0	

表3、表4、表5初步表明，利用经典真值函数的逆函数方法，在非经典一元算符与经典二元联结词之间进行对应定义是可能的。

然而，当用 p'代入 $H_4p=p \vee q$ 中的 p 时，如果符合等值代换原理，则得到 $H_4p'=p' \vee q$。但如果令 H_4p 为公式 A，q 为公式 B，按照经典命题逻辑的复合公式形成规则，"H_4H_4p"$=H_4A=A \vee B=A \vee q=H_4p \vee q=p \vee q=H_4p$。显然，"$H_4H_4p$"的真值语义与 H_4H_4p 的真值语义并不相同，这说明，这种方式定义的非真值函数不符合经典等值代换原理。

进一步地，如果从"p→r"是有序对(p，r)形成的真值函数 $D_4=d_4(p,r)$ 及其逆函数 $r=arcd_4(p,D_4)$ 出发，当 D_4 为真时的 $arcd_4(p,t)=H'_4p$。这时的 H'_4p 与 p 的真值语义关系显然与表 3 中的 H_4p 与 p 的真值语义关系相同。但由于 H'_4p 的句法是 $p \vee r$，H_4p 的句法是 $p \vee q$，显然 $p \vee r$ 与 $p \vee q$ 的真值语义不同。

也就是说，如果用 H_4p 等值表征 $p \vee q$，那么就只能用 p 的另一个非真值函数 H'_4p 表征 $p \vee r$，H''_4p 表征 $p \vee s$，…似乎应该用无穷多个非经典一元算符对应一个经典二元联结词。不过另一方面，很快发现，如果真的这样定义了，H_4H_4p 就会等值于 $p \vee q$，而与表 5 中递归定义的 H_4H_4p 不一致。这表明这种定义方法的不完善之处。

因此，一个良好定义的 p 的一元非真值函数必须满足两个层次上的语义不确定性的确定性。例如，第一个是$\blacksquare_2p$ 对于 p 层次上的，当 p 为确定 0 时，$\blacksquare_2p$ 确定地为不确定性的 1/0；第二个是$\blacksquare_2p$ 对于 $p \vee p_1$ 层次上的，当$\blacksquare_2p$ 确定地为不确定性的 1/0 时，与它语义等值的真值函数 $p \vee p_1$ 中的 p_1 究竟是 q、r、s 等中的哪一个是不完全确定的，但它只能是 q、r、s 等中的某一个是确定的。这也说明 p_1 与原始变元 q、r、s 等不属于同一个层次。

显然，这样定义的$\blacksquare_2p$ 不仅不会产生 H_4p 那样的在叠置和代入时的矛盾，而且必然会产生上节给出的两个重要性质规则 1 和规则 2(以及延伸出的规则 3 和规则 4)。也就是说，应该可以找到一种仅由经典真值函数进行严密、自洽、紧致和完备的形式定义的一元非真值函数，它同时正好具有自然语言或科学语言中存在的那些令人疑惑的"非经典"特性。

四、对狭义函数相对论(STRF)的应用

既然本文第二节对二真值的一变元的非真值函数的定义是正确的，那么在哲学逻辑和逻辑哲学中所发现的许多不可还原为经典逻辑的非经典性质至少在一定范围内其实只是经典命题逻辑的特性。这些非经典性质主要可以概括为：

(1)模态逻辑尤其是道义逻辑的等值代换难题：当 p=q 时，$\Box p \neq \Box q$ 是可满足式。

(1-1)模态逻辑的叠置难题：同一公式中相互叠置的两个"□"的逻辑意义似乎不同。

(2)有些命题变元或公式的真值似乎既非"真"也非"假"("假"即非"真")。

一般认为，前二条是句法方面的，最后一条是语义方面的。

对于(1)，如果"□"是一个真值函数式"f"，显然"当 p=q 时，f(p)=f(q)"；现在"当 p=q 时，$\Box p \neq \Box q$"，所以"□"不是一个真值函数式。STRF 认为，尽管"□"不是一个真值函数式，但$\Box p$ 与$\Box q$ 却都是二真值的命题逻辑中的公式，所以当 p=q 时，$\Box p \neq \Box q$ 是可满足式。例如，如果$\Box p=p \vee p_1$，$\Box q=q \vee q_1$，那么当 $p=q=0$ 且 $p_1=1$ 且 $q_1=0$ 时，$\Box p=1 \neq \Box q=0$。

(1-1)可以看作(1)的一个子类。例如，模态特征公理(传递)$\vdash \Box p \to \Box\Box p$ 中"$\Box\Box p$"的两个"□"如果具有同一的逻辑意义，那么在集合论中对于 p 不具有传递意义的 $p \wedge p_1$ 就会成为这个模态特征公理的例举，即如果另一个"□"像紧靠 p 的那个"□"一样表示"$\wedge p_1$"，那么$\Box\Box p=\Box(\Box p)=(p \wedge p_1) \wedge p_1=p \wedge p_1=\Box p$，那么模态特征公理就不能被称为"传递"公理了。但根据逻辑学的一般形式规定，同一个公式中的同一个逻辑符号的每一次使用都只能是同一个逻辑意义。也就是说，在同一公式中，两个"□"的逻辑意义好像既相同

又不同。STRF 认为，两个“$\square$”当然只能具有同一的逻辑意义，就像两个“p”当然只能具有同一的逻辑意义一样；但“$\square p$”的整体意义并不等于两个部分“$\square$”的意义与“p”的意义之和，“$\square\square p$”的整体意义也不等于两个部分“$\square$”的意义与“$\square p$”的意义之和。例如，当$\square p = p \vee p_1$ 时，$\square\square p = p \vee p_1 \vee p_2$，显然 $p \vee p_1 \rightarrow p \vee p_1 \vee p_2$ 是定理；但当$\square p = p \wedge p_1$ 时，$\square\square p = p \wedge p_1 \wedge p_2$，显然 $p \wedge p_1 \rightarrow p \wedge p_1 \wedge p_2$ 不是定理。所以说，$\square p = \blacksquare_2 p =_{def} p \vee p_1$是模态特征公理$\vdash \square p \rightarrow \square\square p$ 的一个例举，但$\square p = \blacksquare_{12} p =_{def} p \wedge p_1$不是。

对于(2)，事实上，从来没有人能够例举具有第三真值的一个原子命题。实际上，多值逻辑学家能够举出的例子是：当一个原子命题 p 或一个公式 A 有一个确定真值(每个都是要么真要么假二者必居其一且只居其一)时，与这个变元或公式相关的另一个公式的真值却是真假不确定的。STRF 仍然是从最基本的形式开始，考虑一个原子命题 p 作为直接子命题所形成的新命题。如果这个新命题是 p 的真值函数，当 p 取一个确定真值时，它也只能有一个确定真值。反之，如果这个新命题是 p 的一元非真值函数，那么尽管当 p 取某一个确定真值时，它的真值会不确定，但它的真值不确定这一点是确定的，因为它一定是“真”与“假”的某一种组合的一个排列；进一步说，我们在具体情形中可能并不知道 p 的一元非真值函数的具体形式，例如对于“存在今天这些情况”p 来说，我们可能并不知道“明天将有一场海战”Ψ 究竟等值于包含 p 为其中一个变元的哪一个多变元真值函数？但当 p 确定有一个真值时，Ψ 确定是“真”与“假”的某一种组合的一个排列。

进一步说，运用 STRF，我们发现：对于二真值模态命题逻辑，即使假设我们的定义方法已经穷尽了一切一元算符(16 个基本算符及其有穷叠置)，我们的理论仍只能处理模态命题逻辑中一个变元(或公式)所形成的有限个可能世界所组成的集合。在这样的条件下，我们已经成功地在“三探”以及相应的英文文章中，把任何一个模态公式 A 还原为一组以 A 为其中一个子公式所形成的经典复合公式，其等值于一个集合●A。我们下一步要做的是，在这种定义方法下，还原更多的模态特征。其实最大的模态特征正是我们对基本非真值函数的定义所揭示的那种“非完全可代入性”。

再看多值逻辑，我们退一步，先考虑可以还原为二真值系统的有限多值系统。我们已在“四探”以及相应的英文文章中，成功地把这样的第 2＋n(n 是大于等于 1 的正整数)还原为真与假的组合的一种排列。有时我们尽管不能确定地知道在一种具体情况中某个命题的真值究竟是真与假的何种组合的哪种排列，但它总是真与假的某一种组合的一种排列这点是确定的。因此，在这样的多值逻辑中，任何变元 p 无论取何值，根据法则 4-1，$p \vee \neg p$ 总为真，$p \wedge \neg p$ 总为假。也就是说，在这样的多值逻辑系统中，仅凭“真值数量”(或称“真值度”)已经不能完备地表征除 1 和 0 以外的其他真值的逻辑语义，完备的表征必须同时包括真值的数值和真值数值的分布两方面。例如，卢卡锡维茨的典型三值逻辑中之所以认为第三值“不确定”的否定还是“不确定”，正是因为没有考虑真值分布(因为仅二真值时没有这个问题)，所以误认为这样的两个真值“不确定”是同一个语义，而进一步认为在他的系统中排中律和矛盾律不成立。最直观的解释是，“不确定”的语义是 1/0 (虽然实际情况要更复杂)，而它的否定是 0/1，因此根据法则 4-1 和 4-2，$1/0 \vee 0/1 = 1$，$1/0 \wedge 0/1 = 0$。同一个真值度有不同的真值分布是 STRF 所揭示的多值逻辑的最重要特征，今后我们将进一步向无限多值系统扩充。

五、结　语

作为一元算符理论初步的 STRF 核心就是对“非真值函数与真值函数的等值变换”原理的发现与严密的经典定义。STRF 如果成功，其实是坚持形式普遍性原则的结果。从本文的结果可以看到，用 16 个一元算符及其叠置就可以定义所有的非真值函数——等值于无数个真值函数，而不是采用无数个一元算符定义所有的非真值函数——等值于无数个真值函数。这种方法如果成功，也是因为它符合自然语言的特征。这

说明自然语言系统其实才是最“节省”的，它没有废话(类比自然生态系统没有废料)。

当然，STRF理论只关注二真值命题逻辑中与二元真值函数式对应的一元(非真值函数)算符所建立的逻辑系统中的一些“非经典”难题，①对于引入二元非真值函数联结词或不按此方式建构的系统暂时还没系统考虑，但并不是说我们的方法原则上不能严密地考虑那些问题。

总之，本文的定义虽看起来有一些繁杂而存在进一步规范的必要，但它不断借用了量子力学中对“不确定”的确定性的认识，所揭示的非真值函数在句法和语义上的两大特征分别有助于澄清模态逻辑和多值逻辑中的疑难，其他哲学逻辑和逻辑哲学问题可看作是两类基本问题的外推。当然，很多问题的完善解决依赖于发展出一种良好的真值理论，现代分析性心灵哲学或许有成功认识可以借用。一个事件的心灵状态与其物理状态的关系可以类比为一个陈述句的命题逻辑真与其语句事实真的关系。

参考文献：

[1]RUSSELL B. Vagueness[J]. Australasian Journal of Philosophy and Psychology，1923(1)：84-92.

[2]MEHLBERG H. The reach of science[M]. Toronto：University of Toronto Press，1958：256-259.

[3]VAN FRAASSEN B C. Singular terms，truth-value gaps，and free logic[J]. The Journal of Philosophy，1966，63(17)：481-495.

[4]BIRKHOFF G，VON NEUMANN J. The logic of quantum mechanics[J]. The Annals of Mathematics，1936，37(4)：823-843.

[5]REICHENBACH H. Philosophic foundations of quantum mechanics[M]. Dover：University of California Press，1998.

[6]PUTNAM H. The logic of quantum mechanics[M]//PUTNAM H. Mathematics，matter and method，philosophical papers：I. Cambridge：Cambridge University Press，1975.

[7]CHEN Bo. Thinking deeply，contributing originally：an interview with Timothy Williamson[J]. Studies in Logic，2008，1(3)：85.

[8]HAACK S. Philosophy of logics[M]. Cambridge：Cambridge University Press，1978：1.

[9]PRIEST G. An introduction to non-classical logic：from if to is[M]. Cambridge：Cambridge University Press，2008：preface.

[10]BLACKBURN P，VAN BENTHEM J，WOLTER F. Handbook of Modal Logic[M]. Amsterdam：Elsevier，2007.

[11]HARDEGREE G M. Symbolic logic：a first course[M]. McGraw-Hill College，1999.

[12]万小龙，李福勇，田雪. 一元算符逻辑理论二探——一元算符完全性视野下的道义逻辑研究[J]. 安徽大学学报：哲学社会科学版，2012(2)：47.

[13]万小龙. 一元算符逻辑理论三探——狭义函数相对论视野下的现代模态逻辑[J]. 华中科技大学学报：社会科学版，2012(3).

[14]万小龙，兰智高，陈明益. 一元算符逻辑理论四探——毕克霍夫-冯·诺依曼量子逻辑存疑[J]. 科学技术哲学研究，2013(1).

[15]徐明. 符号逻辑讲义[M]. 武汉：武汉大学出版社，2008.

[16]READ S. Conditionals are not truth-functional：an argument from Peirce[J]. Analysis，1992(52)：5-12.

[17]MARTEN J A. Are there truth functional connectives[J]. Metaphilosophy，1973(4)：187-204.

[18]CHRISTENSEN N E. A non-truth-functional interpretation of mathematical logic[J]. Analysis，1965(25)：129-132.

[19]MARCOS J. What is a non-truth-functional logic[J]. Studia Logica，2009(92)：215-240.

[20]SHERRY D. Note on the scope of truth-functional logic[J]. Journal of Philosophical Logic，1999(28)：327-328.

(下转第20页)

① 我们已经对量子逻辑中的量子析取的非分配性、模态逻辑句法、道义逻辑“应该”和道义悖论、卢卡锡维茨三值逻辑中的矛盾律与排中律、辩证逻辑中的基本辩证否定以及一些分析哲学和逻辑哲学中的悖论进行了新解释。