DOI:10.16452/j.cnki.sdkjzk.2020.06.014 **文章编号**:1672-3767(2020)06-0109-06
引用格式:陈慧玲,崔玉军.含一阶导数项的二阶常微分方程 Dirichlet 边值问题解的存在唯一性[J].山东科技大学学报(自然科学版),2020,39(6):109-114.
CHEN Huiling,CUI Yujun.Existence and uniqueness of solutions to Dirichlet boundary value problems for second-order ordinary differential equation with first-order derivative terms[J].Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science),2020,39(6):109-114.

含一阶导数项的二阶常微分方程 Dirichlet 边值问题解的存在唯一性

陈慧玲,崔玉军
(山东科技大学 数学与系统科学学院,山东 青岛 266590)

摘 要:为了研究二阶常微分方程 Dirichlet 边值问题解的存在唯一性,考虑到非线性项函数中含有未知函数的一阶导数,首先证明求解含一阶导数项的二阶常微分方程 Dirichlet 边值问题等价于求积分方程组的连续解,然后在广义的李普希茨条件下运用 Picard 逐次逼近法和矩阵的谱理论给出积分方程组连续解的存在唯一性结论。
关键词:微分方程;边值问题;逐次逼近法;存在唯一性
中图分类号:O17 **文献标志码**:A

Existence and uniqueness of solutions to Dirichlet boundary value problems for second-order ordinary differential equation with first-order derivative terms

CHEN Huiling, CUI Yujun
(College of Mathematics and Systems Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

Abstract: To study the existence and uniqueness of the solutions to Dirichlet boundary value problems for second-order ordinary differential equations and considering that the nonlinear term contains first-order derivatives of unknown functions, this study initially proves that the solutions to Dirichlet boundary value problems for second-order differential equations with first-order derivative terms was equivalent to the continuous solution to integral equation set. Subsequently, the existence and uniqueness of the continuous solution of integral equation set under the generalized Lipshitz condition is proved by using Picard successive approximation method and spectral theory of matrices.
Key words: differential equation; boundary value problem; Picard method; existence and uniqueness

微分方程边值问题在数学中的应用十分广泛,近年来,关于二阶微分方程 Dirichlet 边值问题的相关研究受到许多学者的关注,并已有许多重要结果[1-2]。本研究主要探讨含一阶导数项的二阶微分方程 Dirichlet 边值问题

收稿日期:2019-08-19
基金项目:国家自然科学基金项目(11371221,11571207);山东省自然科学基金项目(ZR2018MA011)
作者简介:陈慧玲 (1997—),女,山东滨州人,硕士研究生,主要从事微分方程理论及应用研究.
崔玉军 (1972—),男,山东寿光人,教授,主要从事微分方程理论及应用研究,本文通信作者.
E-mail:cyj720201@163.com

$$\begin{cases}-u''(t)=f(t,u(t),u'(t)),t\in[0,1],\\ u(0)=u(1)=0,\end{cases}\tag{1}$$

解存在唯一性,其中 $f:[0,1]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为连续函数。当非线性项不含有未知函数的导数时;已有文献研究了各类微分方程边值问题解的存在性和唯一性.如文献[3-4]利用锥上不动点指数和不动点理论研究了二阶微分方程正解的存在性;文献[5]讨论了超线性条件下奇异边值问题正解的存在性;文献[6]利用分歧理论讨论了超线性和次线性条件下二阶微分方程多解的存在性;文献[7]利用矢量场旋转度理论研究了二阶微分系统多解的存在性;文献[8]利用混合单调算子给出了奇异二阶微分方程 Dirichlet 边值问题解的存在唯一性,文献[9]在假设非线性项满足 Lipschitz 条件的情况下,运用 u_0-范数和压缩映射原理给出了一类四阶微分方程边值问题解的存在唯一性结论。当非线性项含有未知函数的导数时,微分方程边值问题解存在唯一性的研究还需要进一步的探索和完善。

本研究首先将求解含一阶导数项的二阶微分方程 Dirichlet 边值问题转化为求积分方程组的连续解,然后在广义的 Lipschitz 条件下,运用 Picard 逐次逼近法和矩阵的谱理论证明了积分方程解的存在唯一性。本研究的主要创新之处在于,一是微分方程边值问题的非线性项推广到含有未知函数的导数和满足广义的 Lipschitz 条件,这使得微分方程边值问题的研究更具有一般性;二是通过定义在乘积空间上的非线性算子,利用 Picard 逐次逼近法和矩阵的谱理论得到了解的存在唯一性结论,并给出一致收敛于唯一解迭代序列的误差估计式。

1 预备工作

假设 $\delta(t)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的连续函数,则二阶微分方程 Dirichlet 边值问题

$$\begin{cases}-u''(t)=\delta(t),t\in[0,1],\\ u(0)=u(1)=0,\end{cases}\tag{1}$$

的解[2]可表示为:

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)\delta(s)\mathrm{d}s,\ t\in[0,1],$$

其中格林函数 $G(t,s)$ 的表达式为:

$$G(t,s)=\begin{cases}s(1-t), & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ t(1-s), & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1。\end{cases}$$

对积分方程两边求导可得:

$$u'(t)=\int_0^1 G_t(t,s)\delta(s)\mathrm{d}s,t\in[0,1],$$

其中,$G_t(t,s)=\begin{cases}-s, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\\ 1-s, & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1。\end{cases}$

因此当 $f:[0,1]\times R\times R\to R$ 连续时,微分方程 Dirichlet 边值问题:

$$\begin{cases}-u''(t)=f(t,u(t),u'(t)),t\in[0,1],\\ u(0)=u(1)=0,\end{cases}$$

解的存在性等价于积分方程组

$$\begin{cases}u(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s,\\ v(t)=\int_0^1 G_t(t,s)f(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s,\end{cases}\tag{2}$$

解的存在性,其中 $v=u'$。

引理1[2] 格林函数 $G(t,s)$ 具有下列性质:

1) $0\leqslant G(t,s)\leqslant t(1-t)$, $\forall t,s\in[0,1]$,

2) $G(t,s)\geqslant s(1-s)\cdot t(1-t)$, $\forall t,s\in[0,1]$。

假设下列条件成立：

(H_1)：存在定义在$[0,1]$上的非负连续函数 $p(t)$，$q(t)$，对 $t\in[0,1]$，有 $|f(t,x_1,y_1)-f(t,x_2,y_2)|\leqslant p(t)|x_1-x_2|+q(t)|y_1-y_2|$，$x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbf{R}$。

(H_2)：存在定义在$[0,1]$上的非负连续函数 $\phi_1(t)$，$\phi_2(t)$，使得对任意非负连续函数 $\psi_1(t)$，$\psi_2(t)$，都有：

$$\int_0^1 G(t,s)p(s)\psi_1(s)\mathrm{d}s\leqslant M\phi_1(t),\ t\in[0,1],\tag{3}$$

$$\int_0^1 |G_t(t,s)|q(s)\psi_2(s)\mathrm{d}s\leqslant N\phi_2(t),\ t\in[0,1],\tag{4}$$

其中，M，N 是依赖于 $\psi_1(t)$，$\psi_2(t)$的非负数。

特别是，当 $\psi_1(t)=\phi_1(t)$时，使得式(3)成立的最小的 M 记作λ_{11}；当 $\psi_1(t)=\phi_2(t)$时，使得式(3)成立的最小的 M 记作λ_{12}；当 $\psi_2(t)=\phi_1(t)$时，使得式(4)成立的最小的 N 记作λ_{21}；当 $\psi_2(t)=\phi_2(t)$时，使得式(4)成立的最小的 N 记作λ_{22}。

(H_3)：由(H_2)中 λ_{11}，λ_{12}，λ_{21}，λ_{22}构成的二阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22}\end{pmatrix}$$

的谱半径记为 $r(\boldsymbol{A})$，且满足 $r(\boldsymbol{A})<1$。

引理 2[10-11] 若 $\lambda_{ij}\geqslant 0(i,j=1,2)$，二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_{11} & \lambda_{12}\\ \lambda_{21} & \lambda_{22}\end{pmatrix}$的谱半径 $r(\boldsymbol{A})<1$ 等价于 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 是非奇异矩阵且矩阵$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$的元素都是非负数，其中 $\boldsymbol{I}$ 是二阶单位矩阵。

利用矩阵的伴随矩阵，由引理 2 容易看出，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径 $r(\boldsymbol{A})<1$ 等价于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素满足$\lambda_{11}<1$，$\lambda_{22}<1$ 且$(1-\lambda_{11})(1-\lambda_{22})>\lambda_{12}\lambda_{21}$。令 $g(x)=(x-\lambda_{11})(x-\lambda_{22})-\lambda_{12}\lambda_{21}$，$x\in\mathbf{R}$。由函数 $g(x)$的单调性、连续性和 $g(1)>0$，存在 $\rho\in\left[\max\left\{\dfrac{\lambda_{11}+1}{2},\dfrac{\lambda_{22}+1}{2}\right\},1\right)$和正数 θ 使得 $g(\rho)>0$ 和不等式组：

$$\begin{cases}\lambda_{11}+\theta\lambda_{12}\leqslant\rho,\\ \dfrac{\lambda_{21}}{\theta}+\lambda_{22}\leqslant\rho。\end{cases}\tag{5}$$

成立，其中 $\theta=\begin{cases}\dfrac{\rho-\lambda_{11}}{\lambda_{12}},若\ \lambda_{12}\neq 0;\\ \dfrac{\lambda_{21}}{\rho-\lambda_{22}},若\ \lambda_{12}=0,\lambda_{21}\neq 0;\\ 1,若\ \lambda_{12}=\lambda_{21}=0。\end{cases}$

下面举例说明条件(H_2)的合理性：

由引理 1 可知格林函数 $G(t,s)$满足 $G(t,s)\leqslant t(1-t)$，$\forall\, t,s\in[0,1]$，因此对任意非负连续函数 $\psi_1(t)$有

$$\int_0^1 G(t,s)p(s)\psi_1(s)\mathrm{d}s\leqslant t(1-t)\int_0^1 p(s)\psi_1(s)\mathrm{d}s。$$

故可取 $\phi_1(t)=t(1-t)$，$M=\int_0^1 p(s)\psi_1(s)\mathrm{d}s$。

又由 $|G_t(t,s)|\leqslant 1$，对任意非负连续函数 $\psi_2(t)$可得：

$$\int_0^1 |G_t(t,s)|q(s)\psi_2(s)\mathrm{d}s\leqslant\int_0^1 q(s)\psi_2(s)\mathrm{d}s。$$

故可取 $\phi_2(t)\equiv 1$，$N=\int_0^1 q(s)\psi_2(s)\mathrm{d}s$。

当 $\phi_1(t)=t(1-t)$，$\phi_2(t)=1$ 时，举例说明条件(H_3)的合理性。

1) 当 $p(t)=5, q(t)=1$ 时。经过积分计算可得：

$$\int_0^1 G(t,s)p(s)\phi_1(s)\mathrm{d}s=\frac{5}{12}(1+t-t^2)\cdot t(1-t)\leqslant\frac{5}{12}(1+t-t^2)\Big|_{t=\frac{1}{2}}\cdot t(1-t),$$

$$\int_0^1 G(t,s)q(s)\phi_2(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{2}t(1-t),$$

$$\int_0^1 |G_t(t,s)|p(s)\phi_1(s)\mathrm{d}s=\frac{5}{12}(-6t^4+12t^3-6t^2+1)\leqslant\frac{5}{12}(-6t^4+12t^3-6t^2+1)\Big|_{t=0}=\frac{5}{12},$$

$$\int_0^1 |G_t(t,s)|q(s)\phi_2(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{2}(2t^2-2t+1)\leqslant\frac{1}{2}(2t^2-2t+1)\Big|_{t=0}=\frac{1}{2}。$$

因此可取，$\lambda_{11}=\frac{25}{48}$，$\lambda_{12}=\frac{1}{2}$，$\lambda_{21}=\frac{5}{12}$，$\lambda_{22}=\frac{1}{2}$。容易看出 $\lambda_{11}<1$，$\lambda_{22}<1$ 且 $(1-\lambda_{11})(1-\lambda_{22})>\lambda_{12}\lambda_{21}$，从而满足条件($H_3$)。

2) 当 $p(t)=6t, q(t)=2t$ 时。经过积分计算可得：

$$\int_0^1 G(t,s)p(s)\psi_1(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{10}t(1-t)(2+2t+2t^2-3t^3)$$

$$\leqslant\frac{1}{10}(2+2t+2t^2-3t^3)\big|_{t=\frac{2+\sqrt{22}}{9}}\cdot t(1-t)\approx 0.336t(1-t),$$

$$\int_0^1 G(t,s)q(s)\psi_2(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}t(1-t)(1+t)\leqslant\frac{1}{3}(1+t)\Big|_{t=1}t(1-t),$$

$$\int_0^1 |G_t(t,s)|p(s)\psi_1(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{10}(-24t^5+45t^4-20t^3+2)\leqslant\frac{1}{10}(-24t^5+45t^4-20t^3+2)\big|_{t=1}=\frac{3}{10},$$

$$\int_0^1 |G_t(t,s)|q(s)\psi_2(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}(4t^3-3t^2+1)\leqslant\frac{1}{3}(4t^3-3t^2+1)\big|_{t=1}=\frac{2}{3}。$$

因此可取，$\lambda_{11}=0.336$，$\lambda_{12}=\frac{2}{3}$，$\lambda_{21}=\frac{3}{10}$，$\lambda_{22}=\frac{2}{3}$。容易看出 $\lambda_{11}<1$，$\lambda_{22}<1$ 且 $(1-\lambda_{11})(1-\lambda_{22})>\lambda_{12}\lambda_{21}$，从而满足条件($H_3$)。

2 主要结果

定理 1　若条件(H_1)、(H_2)、(H_3)成立，则二阶微分方程 Dirichlet 边值问题(1)存在唯一解 $u\in C[0,1]$。

证明：证明中使用的基本空间是 Banach 空间 $C[0,1]\times C[0,1]$，范数为 $\|(u,v)\|_\infty=\|u\|+\|v\|$，其中 $\|u\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|u(t)|$。定义非线性算子 $T:C[0,1]\times C[0,1]\to C[0,1]\times C[0,1]$：

$$T(u,v)=(T_1(u,v),T_2(u,v)),$$

其中

$$T_1(u,v)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s,$$

$$T_2(u,v)=\int_0^1 G_t(t,s)f(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s。$$

显然，u 是边值问题(1)的连续解当且仅当 $(u,u')=T(u,u')=(T_1(u,u'),T_2(u,u'))$，即 (u,u') 是算子 T 的不动点。因此下面讨论算子 T 不动点的存在唯一性。

任意取 $(u_0,v_0)\in C[0,1]\times C[0,1]$，定义序列：

$$u_1=T_1(u_0,v_0),u_2=T_1^2(u_0,v_0),\cdots,$$

$$v_1=T_2(u_0,v_0),v_2=T_2^2(u_0,v_0),\cdots。$$

首先证明 $\{(u_n(t),v_n(t))\}$ 是 $C[0,1]\times C[0,1]$ 上的柯西列。由条件(H_1)和(H_2)可知，存在非负常数 $M=M_1+M_2$，其中 M_1 依赖于 $|u_1(t)-u_0(t)|$，M_2 依赖于 $|v_1(t)-v_0(t)|$，使得：

$$
\begin{aligned}
|u_2(t)-u_1(t)| &= \left|\int_0^1 G(t,s)f(s,u_1(s),v_1(s))\mathrm{d}s-\int_0^1 G(t,s)f(s,u_0(s),v_0(s))\mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant \int_0^1 G(t,s)\,|f(s,u_1(s),v_1(s))-f(s,u_0(s),v_0(s))|\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_0^1 G(t,s)(p(s)|u_1(s)-u_0(s)|+q(s)|v_1(s)-v_0(s)|)\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant M_1\phi_1(t)+M_2\phi_1(t)=M\phi_1(t),\ t\in[0,1]。
\end{aligned}
$$

类似可证,存在非负常数 $N=N_1+N_2$,使得

$$
\begin{aligned}
|v_2(t)-v_1(t)| &\leqslant \int_0^1 |G_t(t,s)|\cdot(p(s)|u_1(s)-u_0(s)|+q(s)|v_1(s)-v_0(s)|)\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant N_1\phi_2(t)+N_2\phi_2(t)=N\phi_2(t),\ t\in[0,1]。
\end{aligned}
$$

下面利用数学归纳法证明:对任意的 $k\geqslant1$,有

$$
|u_k(t)-u_{k-1}(t)|\leqslant a\rho^{k-1}\phi_1(t),\ |v_k(t)-v_{k-1}(t)|\leqslant a\rho^{k-1}\theta\phi_2(t),\ t\in[0,1], \tag{6}
$$

其中 $a=\max\left\{M,\dfrac{N}{\theta}\right\}$,$\rho$,$\theta$ 由(5)式给出。

明显当 $k=1$ 时,(6)式成立。假设当 $k=n$ 时,(6)式也成立。当 $k=n+1$ 时,利用式(5)和条件(H_2)有

$$
\begin{aligned}
|u_{n+1}(t)-u_n(t)| &= \left|\int_0^1 G(t,s)f(s,u_n(s),v_n(s))\mathrm{d}s-\int_0^1 G(t,s)f(s,u_{n-1}(s),v_{n-1}(s))\mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant \int_0^1 G(t,s)\,|f(s,u_n(s),v_n(s))-f(s,u_{n-1}(s),v_{n-1}(s))|\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_0^1 G(t,s)(p(s)|u_n(s)-u_{n-1}(s)|+q(s)|v_n(s)-v_{n-1}(s)|)\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant a\rho^{n-1}\int_0^1 G(t,s)(p(s)\phi_1(s)+q(s)\theta\phi_2(s))\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant a\rho^{n-1}(\lambda_{11}+\lambda_{12}\theta)\phi_1(t)\leqslant a\rho^n\phi_1(t),\ t\in[0,1]
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
|v_{n+1}(t)-v_n(t)| &\leqslant \textstyle\int_0^1 |G_t(t,s)|(p(s)|u_n(s)-u_{n-1}(s)|+q(s)|v_n(s)-v_{n-1}(s)|)\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant a\rho^{n-1}\textstyle\int_0^1 |G_t(t,s)|(p(s)\phi_1(s)+q(s)\theta\phi_2(s))\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant a\rho^{n-1}(\lambda_{21}+\lambda_{22}\theta)\phi_2(t)\leqslant a\rho^n\theta\phi_2(t),\ t\in[0,1]。
\end{aligned}
$$

这说明式(6)对任意的 $k\geqslant1$ 时成立。对任意的 $m,n\geqslant1$,由式(6)可得

$$
\begin{aligned}
|u_{n+m}(t)-u_n(t)| &= |u_{n+m}(t)-u_{n+m-1}(t)+u_{n+m-1}(t)-u_{n+m-2}(t)+\cdots+u_{n+1}(t)-u_n(t)| \\
&\leqslant |u_{n+m}(t)-u_{n+m-1}(t)|+|u_{n+m-1}(t)-u_{n+m-2}(t)|+\cdots+|u_{n+1}(t)-u_n(t)| \\
&\leqslant a\rho^n\cdot\phi_1(t)\cdot(1+\rho+\rho^2+\cdots+\rho^{m-1}) \\
&\leqslant a\rho^n\cdot\phi_1(t)\cdot\frac{1-\rho^m}{1-\rho},\ t\in[0,1]
\end{aligned} \tag{7}
$$

和

$$
\begin{aligned}
|v_{n+m}(t)-v_n(t)| &\leqslant |v_{n+m}(t)-v_{n+m-1}(t)|+|v_{n+m-1}(t)-v_{n+m-2}(t)|+\cdots+|v_{n+1}(t)-v_n(t)| \\
&\leqslant a\theta\rho^n\cdot\phi_2(t)\cdot(1+\rho+\rho^2+\cdots+\rho^{m-1}) \\
&\leqslant a\theta\rho^n\cdot\phi_2(t)\cdot\frac{1-\rho^m}{1-\rho},\ t\in[0,1],
\end{aligned} \tag{8}
$$

因此,$\{(u_n(t),v_n(t))\}$是 $C[0,1]\times C[0,1]$上的柯西列。由空间 $C[0,1]\times C[0,1]$的完备性,存在$(u,v)\in C[0,1]\times C[0,1]$,使得$\{(u_n(t),v_n(t))\}$在 $C[0,1]\times C[0,1]$上一致收敛于$(u(t),v(t))$。利用函数 f 的连续性和函数列的一致收敛性,不难证明:

$$
u(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s,\quad t\in[0,1],
$$

$$
v(t)=\int_0^1 G_t(t,s)f(s,u(s),v(s))\mathrm{d}s,\quad t\in[0,1]。
$$

且满足 $u'=v$。说明算子 T 存在不动点(u,u')。在式(7)～(8)中令 $m\to+\infty$,可得到迭代序列一致收敛于微分方程解的误差估计式：

$$|u(t)-u_n(t)|\leqslant a\rho^n\cdot\phi_1(t)\cdot\frac{1}{1-\rho},t\in[0,1],$$

$$|v(t)-v_n(t)|\leqslant a\theta\rho^n\cdot\phi_2(t)\cdot\frac{1}{1-\rho},t\in[0,1]。$$

算子 T 不动点唯一性的证明类似于不动点存在性的证明,故略去。

3　结论

研究了含一阶导数项的二阶微分方程 Dirichlet 边值问题解的存在唯一性,首先利用变量代换转化为等价积分方程组连续解的存在唯一性问题。然后在非线性项满足广义的 Lipschitz 条件下,运用 Picard 逐次逼近法和矩阵的谱理论证明了解的存在唯一性,并给出一致收敛于唯一解迭代序列的误差估计式。在后续的研究中,将针对分数阶微分方程边值问题解的存在唯一性问题进行研究。

参考文献：

[1]马如云.非线性常微分方程非局部问题[M].北京:科学出版社,2004.

[2]CABADA A.Green's functions in the theory of ordinary differential equations[M].New York:Springer,2014.

[3]LI Y X.Positive solutions of second-order boundary value problems with sign-changing nonlinear terms[J].Journal of Mathematical Analysis and Applications,2003,282(1):232-240.

[4]王娇.一类非线性二阶常微分方程 Dirichlet 问题正解的存在性[J].山东大学学报(理学版),2018,53(6):64-69.
WANG Jiao.Existence of positive solutions for a class of nonlinear second-order Dirichlet problem[J].Journal of Shandong University (Natural Science),2018,53(6):64-69.

[5]AGARWAL RP,O'REGAN D.Singular boundary value problems for superlinear second order ordinary and delay differential equations[J].Journal of Differential Equations,1996,130:333-335.

[6]MA R Y,THOMPSON B.Multiplicity results for second-order two-point boundary value problems with superlinear or sublinear nonlinearities[J].Journal of Mathematical Analysis and Applications,2005,203:726-735

[7]GRITSANS A,SADYRBAEV F,YERMACHENKO I.Dirichlet boundary value problem for the second-order asymptotically linear system[J].International Journal of Differential Equations,2016,35(5):1-12.

[8]王红,林晓宁.奇异二阶微分方程狄利克莱边值问题解的存在及惟一性[J].东北师范大学报(自然科学版),2006,38(2):1-5.
WANG Hong,LIN Xiaoning.The existence and uniqueness for singular Dirichlet boundary value problems[J].Journal of Northeast Normal University (Natural Science Edition),2006,38(2):1-5.

[9]崔玉军,赵聪.四阶微分方程奇异边值问题解的唯一性[J].山东大学学报(理学版),2017,52(2):73-76.
CUI Yujun,ZHAO Cong.Uniqueness of solutions for singular boundary value problems of fourth-order differential equations [J].Journal of Shandong University (Natural Science),2017,52(2):73-76.

[10]PRECUP R.The role of matrices that are convergent to zero in the study of semilinear operator systems[J].Mathematical and Computer Modelling,2009,49:703-708.

[11]PRECUP R.Methods in nonlinear integral equations[M].Dordrecht:Kluwer,2002.

(责任编辑:刘西奎)