

DOI: 10.16452/j.cnki.sdkjzk.2020.06.013

文章编号:1672-3767(2020)06-0102-07

引用格式:刘莹,孙建强.Riesz 空间分数阶非线性 sine-Gordon 方程新的保能量格式[J].山东科技大学学报(自然科学版), 2020,39(6):102-108.

LIU Ying, SUN Jianqiang. A new energy-preserving scheme for Riesz space fractional nonlinear sine-Gordon equation[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science), 2020, 39(6): 102-108.

Riesz 空间分数阶非线性 sine-Gordon 方程 新的保能量格式

刘 莹, 孙建强

(海南大学 理学院, 海南海口 570228)

摘 要:首先利用傅里叶拟谱方法对 Riesz 空间分数阶导数离散近似,再利用 Boole 离散线积分方法结合高阶平均向量场方法构造出 Riesz 空间分数阶非线性 sine-Gordon 方程新的保能量格式。最后利用新格式数值模拟不同初值条件下 Riesz 空间分数阶非线性 sine-Gordon 方程孤立波的演化行为。数值实验验证了新格式的有效性和精确性。

关键词:高阶平均向量场方法;Boole 离散线积分法;Riesz 空间分数阶非线性 sine-Gordon 方程;傅里叶拟谱方法;Riesz 空间分数阶导数

中图分类号:O241.5

文献标志码:A

A new energy-preserving scheme for Riesz space fractional nonlinear sine-Gordon equation

LIU Ying, SUN Jianqiang

(College of Science, Hainan University, Haikou, Hainan 570228, China)

Abstract: In this paper a new energy-preserving scheme for Riesz space fractional nonlinear sine-Gordon equation is presented. The Riesz space fractional derivative was discretized initially by Fourier pseudo spectral method. Subsequently, a new energy-preserving scheme for Riesz space fractional nonlinear sine-Gordon equation was constructed by the Boole discrete line integral method and high order average vector field method. Finally, the new scheme was applied to numerically simulate the Riesz space fractional nonlinear sine-Gordon equation with different initial conditions. The validity and accuracy of the new scheme were verified by numerical experiments.

Key words: vector field method; Boole discrete line integral method; Riesz space fractional nonlinear sine-Gordon equation; Fourier pseudo-spectral method; Riesz space fractional derivative

近年来越来越多的学者发现许多重要的动力学问题都表现出分数阶的行为,这些行为可能随空间和时间而变化而变化。这说明变阶微积分为复杂动力学问题的描述提供了一个有效的数学框架^[1]。Riesz 空间分数阶非线性 sine-Gordon 方程已成为现代非线性波动理论的基本方程之一,广泛存在于物理学的不同领域,如约瑟夫森结理论、场理论、晶格理论等^[2-3]。一般来说,分数阶微分方程的解析解是不易得到的,研究高

收稿日期:2019-11-26

基金项目:国家自然科学基金项目(11961020,11561018)

作者简介:刘 莹(1995—),女,山东菏泽人,硕士研究生,主要从事微分方程的数值解法方面的研究。

E-mail: 768176675@qq.com

孙建强(1971—),男,湖南双峰人,教授,主要从事微分方程的数值解法研究,本文通信作者。

E-mail: sunjq123@qq.com

效可靠的数值方法非常重要。近年来,对于 Riesz 空间分数阶非线性 sine-Gordon 方程数值方法主要有变分迭代法、差分法和谱方法^[4-6]。分数阶非线性微分方程一般具有能量守恒特性,保能量算法在数值求解分数阶非线性微分方程中具有越来越重要的意义^[7-8]。考虑分数阶非线性 sine-Gordon 方程:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial |x|^\alpha} + \sin(u(x, t)) = 0, \quad (1)$$

在有限域 $\Omega = (a, b) \times (0, T]$, 满足以下的初始条件 $u(x, 0) = \phi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$, $x \in [a, b]$, 和狄利克雷边界条件 $u(a, t) = u(b, t) = 0$, $t \in [0, T]$ 。 $\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial |x|^\alpha}$ 是 Riesz 空间分数阶导数, $1 \leq \alpha \leq 2$ ^[9-14]。当 $\alpha = 2$ 时, 是经典的 sine-Gordon 方程; 当 $\alpha = 1$ 时, 为约瑟夫森结理论中出现的非局部 sine-Gordon 方程。分数阶非线性 sine-Gordon 方程被认为是经典 sine-Gordon 方程(对应 $\alpha = 2$) 与非局部 sine-Gordon 方程(对应 $\alpha = 1$) 之间的插值。函数 $\phi, \psi: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ 是光滑的, 满足了 $\phi(a) = \phi(b) = \psi(a) = \psi(b) = 0$ 的兼容性条件。方程(1)具有能量守恒函数^[7]:

$$E(t) = \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right\|_{x,2}^2 + \frac{1}{2} \left\langle -\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial |x|^\alpha}, u(x, t) \right\rangle_x + \|1 - \cos(u(x, t))\|_{x,1}.$$

在这里, 本研究利用四阶平均向量场方法结合傅里叶拟谱方法构造 Riesz 空间分数阶非线性 sine-Gordon 方程(1)的一种新的高阶保能量格式^[8,15]。具体地, 首先利用傅里叶拟谱方法对 Riesz 空间分数阶 sine-Gordon 方程(1)进行空间离散近似, 得到有限维的哈密尔顿系统, 再利用四阶平均向量场方法和 Boole 离散线积分法离散哈密尔顿系统^[16-17]。最后将构造的新格式对 Riesz 空间分数阶非线性 sine-Gordon 方程在不同初值条件下进行数值模拟, 对新格式数值解的行为进行分析, 最后得出结论。

1 傅里叶拟谱方法对 Riesz 空间分数阶导数的离散

1.1 Riesz 空间分数阶导数

定义 1 当 $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbf{N}$ 和 $a \leq x \leq b$ 时, α 阶的 Riesz 空间分数阶导数^[13] 定义为:

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial |x|^\alpha} = -\kappa_\alpha ({}_a D_x^\alpha + {}_x D_b^\alpha) u(x, t), \quad (2)$$

这里 $\kappa_\alpha = (1/2) \sec(\alpha\pi/2)$, 且 $\alpha \neq 1$, ${}_a D_x^\alpha$ 和 ${}_x D_b^\alpha$ 分别为左和右 Riemann-Liouville 分式算子。

$$\begin{aligned} {}_a D_x^\alpha u(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{u(\xi, t)}{(x-\xi)^{\alpha+1-n}} d\xi, \\ {}_x D_b^\alpha u(x, t) &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b \frac{u(\xi, t)}{(\xi-x)^{\alpha+1-n}} d\xi, \end{aligned}$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数。

引理 1 x 在无限区间 $(-\infty, \infty)$ 上, 对于函数 $u(x)$, 有下列等式成立^[13]:

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial |x|^\alpha} = -\kappa_\alpha (-\infty D_x^\alpha + {}_x D_\infty^\alpha) u(x, t) = -(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x, t), \quad (3)$$

其中 $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbf{N}$ 。

1.2 傅里叶拟谱方法对 Riesz 空间分数阶导数的离散

x 在无限区间 $(-\infty, \infty)$ 上, 分数阶拉普拉斯算子可以被定义^[8] 为:

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x, t) = -F^{-1} |x|^\alpha F u(x, t), \quad (4)$$

其中 F 和 F^{-1} 分别表示 $u(x, t)$ 的傅里叶变换和傅里叶逆变换。因此, 有

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} |x|^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\eta} u(\eta, t) d\eta d\xi. \quad (5)$$

另一方面, 在具有周期边界条件的有界区间 $\Omega = (a, b)$ 上, 由傅里叶级数定义为:

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u(x, t) = -\sum_{l \in \mathbf{Z}} |v_l|^\alpha \hat{u}_l e^{iv_l(x-a)}, \quad (6)$$

其中 $v_l = \frac{2l\pi}{b-a}$, 傅里叶系数为

$$\hat{u}_l = \frac{1}{b-a} \int_{\Omega} u(x, t) e^{-iv_l(x-a)} dx.$$

下面利用傅里叶拟谱方法对 Riesz 空间分数阶导数在空间上进行离散^[8]。假设空间积分区间 $\Omega = [a, b]$, 将 Ω 进行 N 等分, N 是一个正偶数, 空间步长 $h = \frac{b-a}{N}$ 。令 $x_j = a + jh, j = 0, \dots, N-1$ 为空间傅里叶配置点。令函数 $u(x)$ 中的 $u_N(x)$ 表示插值逼近 $I_N u(x)$, 有

$$I_N u(x) = u_N(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} \tilde{u}_k e^{ik\mu(x-a)}. \quad (7)$$

其中 $\tilde{u}_k = \frac{1}{Nc_k} \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) e^{-ik\mu(x_j-a)}, \mu = \frac{2\pi}{b-a}$, 当 $|k| < N/2$ 时, $c_k = 1$; 当 $k = \pm N/2$ 时, $c_k = 2$ 。

则由式(6)和式(7)可得

$$-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u_N(x_j) = - \sum_{k=-N/2}^{N/2} |k\mu|^{\alpha} \tilde{u}_k e^{ik\mu(x_j-a)}. \quad (8)$$

令 $u_j = u(x_j)$, 将 \tilde{u}_k 代入式(8), 再由引理 1 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{\alpha} u_N(x_j)}{\partial |x|^{\alpha}} &= -(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u_N(x_j) = - \sum_{k=-N/2}^{N/2} |k\mu|^{\alpha} \left(\frac{1}{Nc_k} \sum_{l=0}^{N-1} u_l e^{-ik\mu(x_l-a)} \right) e^{ik\mu(x_j-a)} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} u_l \left(- \sum_{k=-N/2}^{N/2} \frac{1}{Nc_k} |k\mu|^{\alpha} e^{ik\mu(x_j-x_l)} \right) = (D_2^{\alpha} u)_j. \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $u = (u_0, \dots, u_{N-1})^T, D_2^{\alpha}$ 是如下的 $N \times N$ 阶矩阵

$$(D_2^{\alpha})_{j,l} = - \sum_{k=-N/2}^{N/2} \frac{1}{Nc_k} |k\mu|^{\alpha} e^{ik\mu(x_j-x_l)}.$$

2 Riesz 空间分数阶非线性 sine-Gordon 方程的新的保能量格式

令 $v(x, t) = u_t(x, t)$, 则式(1)等价于:

$$u_t(x, t) = v(x, t), \quad (10)$$

$$v_t(x, t) = \frac{\partial^{\alpha} u(x, t)}{\partial |x|^{\alpha}} - \sin(u(x, t)). \quad (11)$$

在空间方向上, 利用傅里叶拟谱方法对方程(10)和(11)进行离散, 则有:

$$\frac{du_j}{dt} = v_j, \quad (12)$$

$$\frac{dv_j}{dt} = (D_2^{\alpha} u)_j - \sin(u_j). \quad (13)$$

其中 $j = 0, \dots, N-1$, 等式(12)和(13)可表示为半离散哈密顿系统形式:

$$\frac{dZ}{dt} = J \nabla H(Z), \quad J = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix}. \quad (14)$$

其中 $Z = (u^T, v^T)^T, v = (v_0, v_1, \dots, v_{N-1})^T, I$ 是 $N \times N$ 单位矩阵, 方程(1)的能量函数相应的离散哈密顿能量函数为:

$$H(Z) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N-1} (v_j^2 + 2(1 - \cos(u_j))) - \frac{1}{2} u^T D_2^{\alpha} u. \quad (15)$$

对于有限维哈密顿系统(14), Quispel 和 McLachlan 提出了在时间方向上具有四阶精度的高阶平均向量场方法^[15]。在时间方向上对有限维哈密顿系统利用四阶平均向量场方法进行离散, 可以得到 Riesz 空间分数阶非线性 sine-Gordon 方程的高阶保能量格式:

$$\frac{\mathbf{Z}^{n+1} - \mathbf{Z}^n}{\tau} = (\bar{\mathbf{I}} - \frac{\tau^2}{12} \hat{\mathbf{J}}^2) \int_0^1 f((1-\xi)\mathbf{Z}^n + \xi\mathbf{Z}^{n+1}) d\xi. \quad (16)$$

其中: $\bar{\mathbf{I}}$ 为 $2N \times 2N$ 单位矩, $f(\mathbf{Z}) = \mathbf{J} \nabla H(\mathbf{Z})$, $\hat{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{D}_2^a - \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$, $\text{diag}(\mathbf{B}) = [\cos(\frac{u_1^{n+1} + u_1^n}{2}), \cos(\frac{u_2^{n+1} + u_2^n}{2}), \dots, \cos(\frac{u_N^{n+1} + u_N^n}{2})]$.

但是对于格式(16)右端的三角函数 $\sin u$, 相应的积分函数为:

$$\int_0^1 \sin((1-\xi)u^n + \xi u^{n+1}) d\xi = \frac{\cos(u^n) - \cos(u^{n+1})}{u^{n+1} - u^n}. \quad (17)$$

式(17)中除法的分子和分母都接近于零, 为便于计算积分项, 将基于平均向量场方法的 Boole 离散线积分方法^[16]应用于格式(16), 构造出方程(1)的新的保能量格式。假设连接 z^n 和 z^{n+1} 的最简单路径为:

$$\sigma(\xi\tau) = \xi z^{n+1} + (1-\xi)z^n, \quad \xi \in [0, 1].$$

对式(16)右端的积分项进行 Boole 离散积分, 则有:

$$\frac{\mathbf{Z}^{n+1} - \mathbf{Z}^n}{\tau} = (\bar{\mathbf{I}} - \frac{\tau^2}{12} \hat{\mathbf{J}}^2) \mathbf{J} \sum_{j=1}^s \beta_j \nabla_z H(\xi_j z^{n+1} + (1-\xi_j)z^n) = (\bar{\mathbf{I}} - \frac{\tau^2}{12} \hat{\mathbf{J}}^2) \sum_{j=1}^s b_j f(Y_j). \quad (18)$$

其中, $\xi_j = \frac{j-1}{s-1}$, $b_j = \int_0^1 \prod_{i=1, i \neq j}^s \frac{t - \xi_i}{\xi_j - \xi_i} dt$, $Y_j = \xi_j z^{n+1} + (1-\xi_j)z^n$, $j=1, \dots, s$ 。式(16)中的积分项可以被式(18)高精度计算出来。当 $s=5$ 时, 得到式(18)的新格式:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{Z}^{n+1} - \mathbf{Z}^n}{\tau} = & \frac{1}{90} (\bar{\mathbf{I}} - \frac{\tau^2}{12} \hat{\mathbf{J}}^2) \mathbf{J} (7 \nabla_z H(\mathbf{Z}^n) + 32 \nabla_z H(\frac{3\mathbf{Z}^n + \mathbf{Z}^{n+1}}{4}) + 12 \nabla_z H(\frac{\mathbf{Z}^n + \mathbf{Z}^{n+1}}{2}) \\ & + 32 \nabla_z H(\frac{\mathbf{Z}^n + 3\mathbf{Z}^{n+1}}{4}) + 7 \nabla_z H(\mathbf{Z}^{n+1})). \end{aligned} \quad (19)$$

式(19)可以表示为矩阵向量形式:

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} \\ \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\tau} \end{bmatrix} = \left(\bar{\mathbf{I}} - \frac{\tau^2}{12} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_2^a - \mathbf{B} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}_2^a - \mathbf{B} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{F}^1 \\ \mathbf{F}^2 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

其中: $\mathbf{F}^1 = (F_1^1, F_2^1, \dots, F_N^1)^\top$, $\mathbf{F}^2 = (F_1^2, F_2^2, \dots, F_N^2)^\top$,

$$\begin{aligned} F_j^1 = & \frac{1}{90} (7v_j^n + 32(\frac{3v_j^n + v_j^{n+1}}{4}) + 12(\frac{v_j^n + v_j^{n+1}}{2}) + 32(\frac{v_j^n + 3v_j^{n+1}}{4}) + 7v_j^{n+1}), \\ F_j^2 = & \frac{1}{90} (\mathbf{D}_2^a (7\mathbf{u}^n + 32(\frac{3\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n+1}}{4}) + 12(\frac{\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n+1}}{2}) + 32(\frac{\mathbf{u}^n + 3\mathbf{u}^{n+1}}{4}) + 7\mathbf{u}^{n+1})_j - \frac{1}{90} (7\sin(u_j^n) \\ & + 32\sin(\frac{3u_j^n + u_j^{n+1}}{4}) + 12\sin(\frac{u_j^n + u_j^{n+1}}{2}) + 32\sin(\frac{u_j^n + 3u_j^{n+1}}{4}) + 7\sin(u_j^{n+1})). \end{aligned}$$

式(20)可以改写为:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = F_j^1 - \frac{\tau^2}{12} (\mathbf{D}_2^a \mathbf{F}^1)_j + \frac{\tau^2}{12} \cos(\frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2}) F_j^1, \quad (21)$$

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\tau} = F_j^2 - \frac{\tau^2}{12} (\mathbf{D}_2^a \mathbf{F}^2)_j + \frac{\tau^2}{12} \cos(\frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2}) F_j^2. \quad (22)$$

定理 1 式(16)精确保持哈密顿系统能量守恒^[15]

$$H(z^{n+1}) = H(z^n). \quad (23)$$

证明: 在式(16)中, 对于 $\hat{\mathbf{J}}$ 有:

$$\hat{\mathbf{J}} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial z_1 \partial z_1}(\hat{z}) & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial z_1 \partial z_N}(\hat{z}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 H}{\partial z_N \partial z_1}(\hat{z}) & \cdots & \frac{\partial^2 H}{\partial z_N \partial z_N}(\hat{z}) \end{bmatrix}, \text{ 其中 } \hat{z} = \frac{z^{n+1} + z^n}{2}.$$

令 $\bar{H}_{ij}(\hat{z}) = \frac{\partial^2 H}{\partial z_i \partial z_j}(\hat{z})$, 则等式(16)等价于

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{Z}^{n+1} - \mathbf{Z}^n}{\tau} &= (\bar{\mathbf{I}} - \frac{\tau^2}{12} \hat{\mathbf{J}}^2) \mathbf{J} \int_0^1 \nabla H((1-\xi)\mathbf{Z}^n + \xi\mathbf{Z}^{n+1}) d\xi \\ &= (\mathbf{J} - \frac{\tau^2}{12} \mathbf{S}) \int_0^1 \nabla H((1-\xi)\mathbf{Z}^n + \xi\mathbf{Z}^{n+1}) d\xi. \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $\mathbf{S} = \hat{\mathbf{J}}^2 \mathbf{J} = \mathbf{J} \bar{\mathbf{H}} \mathbf{J} \bar{\mathbf{H}} \mathbf{J}$ 和 \mathbf{J} 为反对称矩阵, 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} (H(\mathbf{z}^{n+1}) - H(\mathbf{z}^n)) &= \frac{1}{\tau} \int_0^1 \frac{d}{d\xi} H((1-\xi)\mathbf{z}^n + \xi\mathbf{z}^{n+1}) d\xi \\ &= (\int_0^1 \nabla H((1-\xi)\mathbf{z}^n + \xi\mathbf{z}^{n+1}) d\xi)^T \frac{\mathbf{z}^{n+1} - \mathbf{z}^n}{\tau} \\ &= (\int_0^1 \nabla H((1-\xi)\mathbf{z}^n + \xi\mathbf{z}^{n+1}) d\xi)^T (\mathbf{J} - \frac{\tau^2}{12} \mathbf{S}) \int_0^1 \nabla H((1-\xi)\mathbf{z}^n + \xi\mathbf{z}^{n+1}) d\xi = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

由(25)可知格式(16)具有能量守恒特性。

由于计算机不能精确计算式(16)的积分项, 积分项高精度离散后得到的式(19)与式(16)比较具有5阶精度, 产生的能量误差很少, 可以忽略不计。

3 数值模拟

为了验证理论分析, 利用高阶平均向量场方法结合 Boole 离散线积分方法所得到的新的保能量格式(20)对 Riesz 空间分数阶非线性 sine-Gordon 方程(1)进行数值模拟。定义相对能量误差为:

$$RE(t) = \left| \frac{H(\mathbf{Z}^n) - H(\mathbf{Z}^0)}{H(\mathbf{Z}^0)} \right|. \quad (26)$$

3.1 数值模拟 1

考虑 Riesz 空间分数阶非线性 sine-Gordon 方程在 $\mathbf{I} = [-20, 20]$ 和长度 $T = 60$ 的时间周期上。取初始条件

$$\begin{cases} u(x, 0) = \frac{2}{\cosh(0.3x)}, \\ v(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (27)$$

其中 $(x, t) \in \mathbf{I} \times [0, T]$, 取空间步长 $h = 0.5$, 时间步长 $\tau = 0.03$, $\alpha = 1.9$ 。

图1是方程孤立波在 $\alpha = 1.9$ 和 $t \in [0, 60]$ 内相互作用的图形。结果表明, 存在类似呼吸子的解, 即在空间上是局部的, 在时间上是周期性的。运算结果与文献[7]一致, 可以正确地数值模拟方程的解。从图2可以看出方程的相对能量误差随时间的变化, 误差仅为 10^{-14} , 达到了机器精度, 新格式保持了方程的能量守恒。

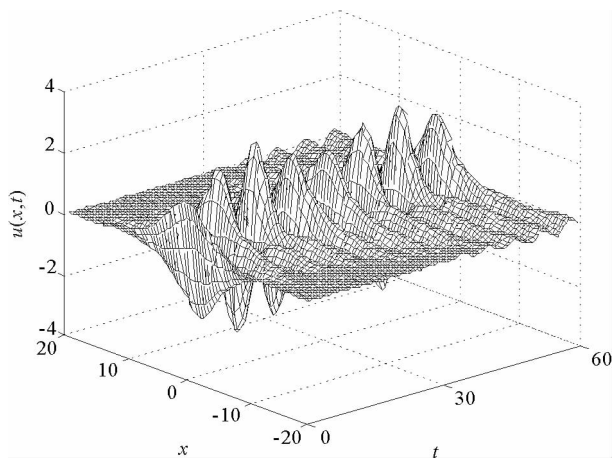
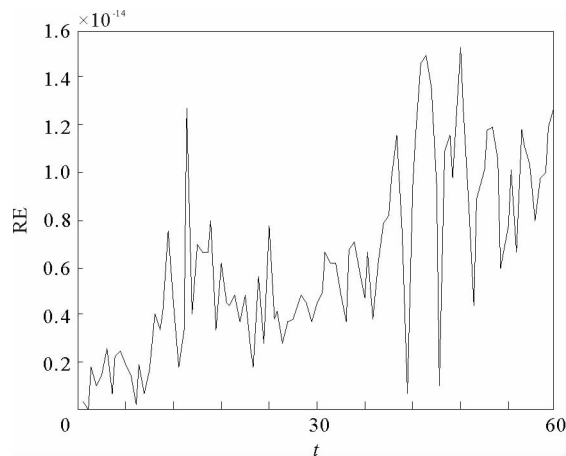
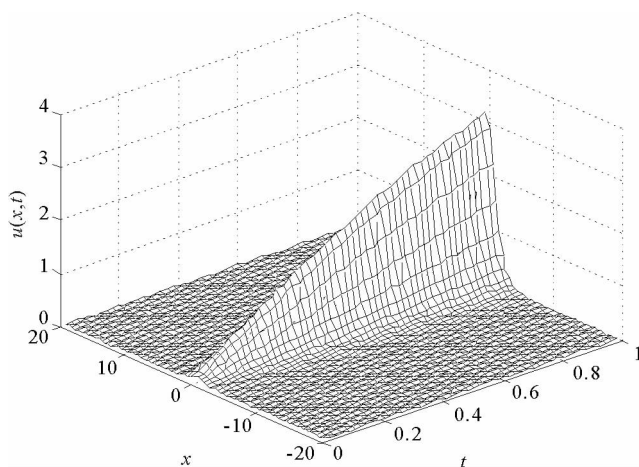
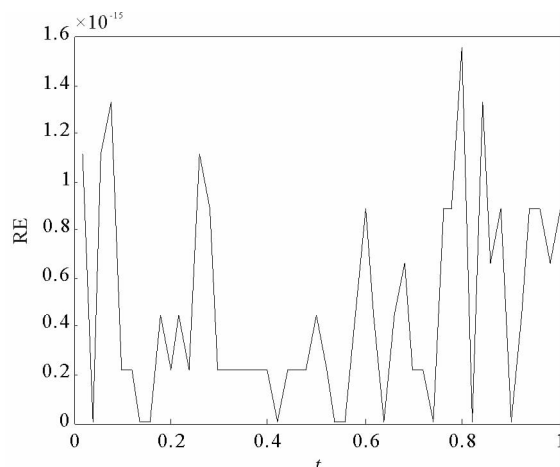
3.2 数值模拟 2

考虑 Riesz 空间分数阶非线性 sine-Gordon 方程在 $\mathbf{I} = [-20, 20]$ 和长度 $T = 1$ 的时间周期上。取初始条件

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ v(x, 0) = 4 \operatorname{sech}(x). \end{cases} \quad (28)$$

其中 $(x, t) \in \mathbf{I} \times [0, T]$, 取空间步长 $h = 0.5$, 时间步长 $\tau = 0.001$, $\alpha = 1.75$ 。

图3是方程孤立波在 $\alpha = 1.75$ 和 $t \in [0, 1]$ 内相互作用的图形。从图3可以看出方程数值解的波形非常的光滑, 运算结果与文献[10]一致, 同样可以对方程的解进行数值模拟。从图4可以看出相对能量误差随时间的变化, 误差仅为 10^{-15} , 同样达到了机器精度, 同样可以看出新格式保持了方程的能量守恒。

图1 孤立波在 $t \in [0, 60]$ 的数值解Fig. 1 Numerical solutions of solitary wave when $t \in [0, 60]$ 图2 孤立波在 $t \in [0, 60]$ 的相对能量误差Fig. 2 Relative energy error of solitary wave when $t \in [0, 60]$ 图3 孤立波在 $t \in [0, 1]$ 的数值解Fig. 3 Numerical solutions to solitary wave when $t \in [0, 1]$ 图4 孤立波在 $t \in [0, 1]$ 的相对能量误差Fig. 4 Relative energy errors of solitary wave when $t \in [0, 1]$

4 结论

利用傅里叶拟谱方法对 Riesz 空间分数阶非线性 sine-Gordon 方程在空间上离散, 并利用 Boole 离散线积分法对高阶平均向量场方法中的积分项进行数值离散, 得到方程的一个新的保能量格式, 再利用新的保能量格式对方程在不同初始条件下进行数值模拟。数值结果表明, 新格式能很好地模拟 Riesz 空间分数阶非线性 sine-Gordon 方程的行为, 并精确地保持了方程的离散能量守恒特性。在数值模拟 Riesz 空间分数阶非线性 sine-Gordon 方程时, 新格式比以往的格式在方程的保能量守恒特性方面具有优越性。

参考文献:

- [1] GALUE L, KALLA S, AL-SAQABI B. Fractional extensions of the temperature field problems in oil strata[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 186(1): 35-44.
- [2] GUO B Y, PASCUAL P J, RODRIGUEZ M J, et al. Numerical solution of the sine-Gordon equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 1986, 18(1): 1-14.
- [3] 刘盎然, 高巍, 李宏. 一维 Sine-Gordon 方程四阶紧致有限体积方法[J]. 应用数学进展, 2015, 4(3): 262-270.
LIU Angran, GAO Wei, LI Hong. A fourth-order compact finite volume scheme for 1D Sine-Gordon equations[J]. Advances in Applied Mathematics, 2015, 4(3): 262-270.

- [4]BATIHA B, NOORANI M S M, HASHIM I. Numerical solution of sine-Gordon equation by variational iteration method[J]. *Physics Letters A*, 2007, 370(5): 437-440.
- [5]RAN M, ZHANG C. Compact difference scheme for a class of fractional-in-space nonlinear damped wave equations in two space dimensions[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2016, 71(5): 1151-1162.
- [6]LIU Z, LU S, LIU F. Fully discrete spectral methods for solving time fractional nonlinear sine-Gordon equation with smooth and non-smooth solutions[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2018, 333: 213-224.
- [7]ZHAO J, LI Y, XU Y. An explicit fourth-order energy-preserving scheme for Riesz space fractional nonlinear wave equations [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, 351: 124-138.
- [8]WANG P, HUANG C. Structure-preserving numerical methods for the fractional Schrödinger equation[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2018, 129: 137-158.
- [9]ALFIMOV G, PIERANTOZZI T, VAZQUEZ L. Numerical study of a fractional sine-Gordon equation[J]. *Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 2004, 4: 153-162.
- [10]MACIAS-DIAZ J. Numerical study of the process of nonlinear supratransmission in Riesz space-fractional sine-Gordon Equations[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2017, 46: 89-102.
- [11]MACIAS-DIAZ J, HENDY A, DE STAELEN R H. A pseudo energy-invariant method for relativistic wave equations with Riesz space-fractional derivatives[J]. *Computer Physics Communications*, 2017, 224: 98-107.
- [12]MACIAS-DIAZ J, HENDY A, DE STAELEN R H. A compact fourth-order in space energy-preserving method for Riesz space-fractional nonlinear wave equations[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2018, 325: 1-14.
- [13]RAY S S. A new analytical modelling for nonlocal generalized Riesz fractional sine-Gordon equation[J]. *Journal of King Saud University-Science*, 2016, 28(1): 48-54.
- [14]陈一鸣, 张兴军. 移位 Chebyshev 多项式数值求解分数阶非线性 sine-Gordon 方程[J]. *辽宁工程技术大学学报(自然科学版)*, 2019, 38(1): 87-91.
- CHEN Yiming, ZHANG Xingjun. Numerical solution of fractional nonlinear sine-Gordon equation by shift Chebyshev polynomial[J]. *Journal of Liaoning Technical University (Natural Science)*, 2019, 38(1): 87-91.
- [15]QUISPÉL G R W, MCLAREN D I. A new class of energy-preserving numerical integration methods[J]. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2008, 41(4): 045206.
- [16]IAVERNARO F, PACE B. S-stage trapezoidal methods for the conservation of Hamiltonian functions of polynomial type [J]. *AIP Conference Proceedings*, 2007, 936(1): 603-606.
- [17]JIANG C L, SUN J Q, HE X F, et al. High order energy-preserving method of the “Good” Boussinesq equation[J]. *Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications*, 2016, 9(1): 111-122.

(责任编辑:傅 游)