

带约束分数阶正系统稳定性与镇定的判定 和计算的一个新方法

司新栋,杨洪礼

(山东科技大学 数学与系统科学学院,山东 青岛 266590)

摘要:研究带控制约束的连续分数阶线性系统稳定性与镇定问题。利用 Metzler 矩阵理论和线性系统稳定性理论,得到连续分数阶线性系统为正系统和渐进稳定的一个充要条件。然后将求解带控制约束的连续分数阶系统状态反馈控制问题转化为一类线性规划问题。通过求解线性规划得到满足所给约束条件的控制律,使得闭环系统保持稳定性与正性并且满足控制约束条件。最后通过数值实验验证所提出方法的正确性。

关键词:分数阶线性系统; Metzler 矩阵; 稳定性; 镇定; 线性规划

中图分类号: O231.1

文献标志码: A

A new method for judgment and computation of stability and stabilization of fractional order positive systems with constraints

SI Xindong, YANG Hongli

(College of Mathematics and Systems Science, Shandong University of
Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

Abstract: This paper dealt with the stability and stabilization of continuous fractional-order linear systems with control constraints. By using Metzler matrix theory and linear system stability theory, a sufficient and necessary condition for continuous fractional-order linear systems to be positive and asymptotically stable was firstly obtained. Then the problem of state feedback control for continuous fractional-order systems with control constraints was transformed into a linear programming problem. By solving the linear programming, the control law is satisfying the given constraint condition was obtained, which makes the closed-loop system stable and positive and satisfies the control constraint condition. Finally, the correctness of the proposed method was verified by numerical experiments.

Key words: fractional order linear system; Metzler matrix; stability; stabilization; linear programming

分数阶微积分是对整数阶微积分的推广。分数阶正系统是指具有非负状态的分数阶系统,在许多问题中,由于其能直观刻画绝对温度、能级、高度、浓度等^[1-2],能够更准确描述工程问题,因此近年来分数阶正系统的研究得到更多工程人员的关注^[3-4]。相比较而言,整数阶正系统的研究结果比较多:文献[5-9]对整数阶正系统基本问题,如正性、可控性、客观性、可达性进行了研究;文献[10-11]基于代数方法对正系统稳定性进行研究;文献[12-13]得到了正系统稳定的充分条件,并将其化为二次规划问题;文献[14]得到了正系统稳定的充分必要条件,把稳定性条件转化成线性矩阵不等式问题;文献[15-17]得到了正系统稳定的充分必要条件,把稳定性条件表示成线性规划问题;文献[18]提出了一种利用状态反馈控制求解闭环系统稳定问题的

收稿日期:2019-06-18

基金项目:国家自然科学基金项目(61503222)

作者简介:司新栋(1995—),男,山东滨州人,硕士研究生,主要从事系统与控制理论的研究,E-mail:sxd_math@163.com

杨洪礼(1974—),男,副教授,博士,主要从事优化理论与算法、系统理论与控制、非负矩阵与张量分解等方面的研究,本文通信作者,E-mail:yhlmath@126.com

方法。

然而,对于分数阶正系统而言,上述问题的研究结果却不多。特别是对带有状态和控制约束的工程问题,系统的稳定性是需要满足的先决条件,是控制系统能够正常运行的前提^[19],所以研究该问题具有实际意义。由于分数阶积分定义形式的特殊性,传统整数阶系统的稳定性结论和研究方法不能直接应用于带有控制和状态约束的分数阶系统^[20],因此,带约束的分数阶系统的稳定性研究是必要的。

本研究利用线性规划方法研究带控制约束的分数阶系统的稳定与镇定问题。从 Metzler 矩阵理论和分数阶线性系统稳定性理论出发,针对系统为不确定系统、状态非负有上界约束和控制非负有上界约束三种情况,利用线性规划得到状态反馈控制律,进而使得分数阶线性系统保持稳定性与正性并且满足约束条件。得到一类新的求解连续分数阶系统稳定性与正性控制的线性规划方法。该方法简单可行,对于维数较高的问题也比较容易实现,数值实验表明此方法稳定,能提高状态反馈控制求解效率,是一个比较有吸引力的方法。

文中符号的具体说明如下: \mathbf{R}^n 表示 n 维实向量空间, $\mathbf{R}^{n \times n}$ 表示 $n \times n$ 维实矩阵的集合, $\mathbf{x}(t)$ 表示系统状态向量, $\mathbf{u}(t)$ 表示系统控制向量, \mathbf{A}^T 表示矩阵 \mathbf{A} 的转置, \mathbf{E} 表示单位矩阵, \mathbf{O} 表示零矩阵, $\mathbf{0}$ 表示零向量, $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ 或 $\mathbf{x} < \mathbf{0}$ 表示向量 \mathbf{x} 的每一个分量 $x_i > 0$ 或 $x_i < 0$ 。 \mathbf{b}_i 表示矩阵 \mathbf{B} 的第 i 行向量; $\mathbf{b}_i^{(k)}$ 表示对应矩阵 $\mathbf{B}^{(k)}$ 的第 i 行向量; $\mathbf{y}^{(i)} \in \mathbf{R}^m (i=1,2,\dots,n)$ 表示 m 维列向量。

1 引言

考虑连续分数阶线性系统

$$\begin{cases} D^\alpha \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ 0 < \alpha \leq 1, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \geq \mathbf{0}. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 为系统状态矩阵, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态向量, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ 是系统控制向量。

定义 1^[21] 令 α 为分数阶导数的阶,则关于 $\mathbf{x}(t)$ 的 Riemann-Liouville 分数阶导数定义为

$$D_0^\alpha \mathbf{x}(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \frac{\mathbf{x}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \right), 0 < \alpha \leq 1, \quad (2)$$

其中, Gamma 函数为

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, z \in \mathbf{R}. \quad (3)$$

定义 2^[21] 令 α 为分数阶导数的阶,则关于 $\mathbf{x}(t)$ 的 Caputo 分数阶导数定义为

$${}^c D_0^\alpha \mathbf{x}(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t \frac{\mathbf{x}'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \right), 0 < \alpha \leq 1. \quad (4)$$

根据定义 1 与定义 2,得到 Caputo 分数阶导数与 Riemann-Liouville 分数阶导数关系为

$$D_0^\alpha \mathbf{x}(t) = {}^c D_0^\alpha \mathbf{x}(t) + \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \mathbf{x}_0. \quad (5)$$

定义 3^[22] 设 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$,若 $a_{ij} \geq 0 (i \neq j)$,则 \mathbf{A} 为 Metzler 矩阵。

定理 1^[23] 系统(1)为正的充分必要条件是矩阵 \mathbf{A} 为 Metzler 矩阵。

根据定义 3 和定理 1,系统(1)为分数阶正系统的充分必要条件是矩阵 \mathbf{A} 中的非对角线元素非负,即 $a_{ij} \geq 0 (i \neq j)$ 。

下面给出无控制约束条件下系统(1)的稳定性与镇定问题。

定理 2^[23] 若存在一个 Lyapunov 函数和一个 class-k 函数 $\beta_i, i=1,2,3$,满足

$$\begin{cases} \beta_1(\|\mathbf{x}(t)\|) \leq V(\mathbf{x}(t)) \leq \beta_2(\|\mathbf{x}(t)\|), \\ {}^c D^\alpha V(\mathbf{x}(t)) \leq -\beta_3(\|\mathbf{x}(t)\|). \end{cases}$$

其中 $\alpha \in [0,1]$,则系统(1)是渐进稳定的。

引理 1^[23] 对于连续分数阶正系统

$$\begin{cases} D^\alpha \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \\ 0 < \alpha \leq 1, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 > \mathbf{0}. \end{cases} \quad (6)$$

函数 $V(\mathbf{x}(t)) = \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{x}(t)$, $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}$ 为 Lyapunov 函数的充要条件是 \mathbf{A} 是 Metzler 矩阵且 $\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} < \mathbf{0}$ 。

由定理 2 与引理 1 得到定理 3。

定理 3^[23] 系统(6)渐进稳定的充分必要条件是存在一个向量 $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}$, 使得 $\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} < \mathbf{0}$ 。

若存在一个状态反馈控制 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$, 使得系统(1)对应的连续分数阶系统

$$\begin{cases} D^\alpha \mathbf{x}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{x}(t), \\ 0 < \alpha \leq 1, \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 > \mathbf{0}. \end{cases} \quad (7)$$

渐进稳定, 则系统(1)能镇定。

定理 4 系统(7)具有渐进稳定性和保持正性的充分必要条件是矩阵 $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ 为 Metzler 矩阵且 $(\mathbf{A} + \mathbf{BK})\boldsymbol{\lambda} < \mathbf{0}$ 。

证明: 存在一个状态反馈控制 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$ 使得系统(1)中 $\mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{BK}$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, 得到系统(7)。

充分性: 矩阵 $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ 为 Metzler 矩阵, 根据定理 1, 系统(7)具有正性。又由于 $(\mathbf{A} + \mathbf{BK})\boldsymbol{\lambda} < \mathbf{0}$, 根据定理 3, 系统(7)具有渐进稳定性。

必要性: 系统(7)具有正性, 根据定理 1, 矩阵 $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ 为 Metzler 矩阵。由于系统(7)具有渐进稳定性, $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ 为 Metzler 矩阵, 根据定理 3, $(\mathbf{A} + \mathbf{BK})\boldsymbol{\lambda} < \mathbf{0}$ 。

2 主要结果

工程问题中, 系统或状态存在约束是常见的现象。文献[24]采用传统 Ziegler-Nichols 方法进行分数阶控制器设计, Luo 等^[25]基于相位裕度、幅值裕度及参数鲁棒稳定性条件, 开展了分数阶控制器设计和数值计算方法的研究。上述研究成果都是基于频域的线性系统分数阶控制器设计, 若以状态空间形式描述线性系统, 并要求满足不同的控制任务, 则以上控制器并不适用。为确保不同的控制目标得以实现, 需要设计不同内容形式的控制器对被控系统加以控制。

本节将对分数阶系统(1)为不确定系统(uncertain)、状态非负有上界约束、控制非负有上界约束三种情况进行讨论, 寻找状态反馈控制 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$, 使得系统(7)保持稳定和正性, 进而系统(1)能镇定。受文献[23]启发, 根据定理 4, 将该问题转化为线性规划问题进行求解。

定理 5 当系统(1)为不确定系统, $[\overline{\mathbf{A}} \ \overline{\mathbf{B}}] = \left\{ \sum_{k=1}^l \alpha_k [\mathbf{A}^{(k)} \ \mathbf{B}^{(k)}] \mid \sum_{k=1}^l \alpha_k = 1, \alpha_k \geq 0 \right\}$, 其中 $[\mathbf{A}^{(k)} \ \mathbf{B}^{(k)}]$, $k=1, 2, \dots, l$, 表示 l 个不同的矩阵对, 即 \mathbf{A}, \mathbf{B} 含有不确定因素时, 则系统(7)保持稳定和正性的充分必要条件是存在一个状态反馈控制 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t)$, 满足下列线性规划问题:

$$(\text{LP1}) \begin{cases} \mathbf{A}^{(k)} \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{B}^{(k)} \sum_{i=1}^n \mathbf{y}^{(i)} < \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}, \\ a_{ij}^k \lambda_j + b_i^k y^{(i)} \geq 0, i \neq j = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, l. \end{cases} \quad (8)$$

证明: 充分性: 由 $\mathbf{K} = [\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_n]$, $\mathbf{K}_i = \lambda_i^{-1} \mathbf{y}^{(i)}$, $i=1, 2, \dots, n$, 容易得到

$$\mathbf{B}^k \mathbf{K} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{B}^k \sum_{i=1}^n \mathbf{y}^{(i)}, k=1, 2, \dots, l. \quad (9)$$

将式(9)代入 $\mathbf{A}^{(k)} \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{B}^{(k)} \sum_{i=1}^n \mathbf{y}^{(i)} < \mathbf{0}$ 得到

$$(\mathbf{A}^{(k)} + \mathbf{B}^{(k)} \mathbf{K}) \boldsymbol{\lambda} < \mathbf{0}, k=1, 2, \dots, l, \boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}. \quad (10)$$

由于 $\lambda_j > 0$, 对于 $i \neq j$ 有

$$(a_{ij}^{(k)}\lambda_j + b_i^{(k)}y_j)\lambda_j^{-1} = a_{ij}^{(k)} + b_i^{(k)}\lambda_j^{-1}y^{(j)} = a_{ij}^{(k)} + b_i^{(k)}K_j = (A^{(k)} + B^{(k)}K)_{ij} \geq 0, k=1,2,\dots,l. \quad (11)$$

根据式(10)、式(11)得到存在一个状态反馈控制 $u(t) = Kx(t)$, 使得每一个 $A+BK$ 矩阵为 Metzler 矩阵且 $(A+BK)\lambda < 0$, 进而根据定理 4 得到系统(7)具有稳定性和正性。

必要性: 系统(7)具有稳定性和正性, 且系统为不确定系统, 有 $[\bar{A} \ \bar{B}] = \{ \sum_{k=1}^l \alpha_k [A^{(k)} \ B^{(k)}] \mid \sum_{k=1}^l \alpha_k = 1, \alpha_k \geq 0 \}$ 。根据定理 4, 得到存在一个状态反馈控制 $u(t) = Kx(t)$, 使得每一个矩阵 $A+BK$ 为 Metzler 矩阵且 $(A+BK)\lambda < 0$ 。根据 $A+BK$ 为 Metzler 矩阵, 当 $K = \begin{bmatrix} \frac{y^{(1)}}{\lambda_1^{-1}y^{(1)}} & \frac{y^{(2)}}{\lambda_2^{-1}y^{(2)}} & \cdots & \frac{y^{(n)}}{\lambda_n^{-1}y^{(n)}} \end{bmatrix}$ 得到

$$A^{(k)} + B^{(k)}K = a_{ij}^{(k)} + b_i^{(k)}K_j = a_{ij}^{(k)} + b_i^{(k)}\lambda_j^{-1}y^{(j)} \geq 0, i \neq j, k=1,2,\dots,l. \quad (12)$$

根据 $(A+BK)\lambda < 0$ 得到

$$(A^{(k)} + B^{(k)}K)\lambda = A^{(k)}\lambda + B^{(k)}\sum_{i=1}^n y^{(i)} < 0, k=1,2,\dots,l, \lambda > 0. \quad (13)$$

根据式(12)、式(13)得到线性规划(LP1)。

引理 2^[26] 系统(6)任意初始条件 $0 \leq x_0 \leq x$, 有 $0 \leq x(t) \leq x$ 的充分必要条件是 $(A+BK)x < 0$ 。

根据引理 2 及定理 4 得到如下定理。

定理 6 当系统(1)中状态非负且有上界约束 x_{\max} , 即 $0 \leq x(t) \leq x_{\max}$ 时, 则系统(7)保持稳定和正性的充分必要条件是存在一个状态反馈控制 $u(t) = Kx(t)$, 满足下列线性规划问题

$$(LP2) \begin{cases} A\epsilon + B \sum_{i=1}^n y^{(i)} < 0, \\ 0 < \epsilon \leq x_{\max}, \\ a_{ij}\epsilon_j + b_i y^{(j)} \geq 0, i \neq j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (14)$$

证明: 充分性: 由 $K = [K_1 K_2 \cdots K_n]$, $K_i = \epsilon_i^{-1} y^{(i)}$, $i=1,2,\dots,n$, 容易得到

$$BK\epsilon = B \sum_{i=1}^n y^{(i)}, \quad (15)$$

将式(15)代入 $A\epsilon + B \sum_{i=1}^n y^{(i)} < 0$ 得到

$$(A+BK)\epsilon < 0, \epsilon > 0, \quad (16)$$

由于 $\epsilon_j > 0$, 对于 $i \neq j$, 有

$$(a_{ij}\epsilon_j + b_i y^{(j)})\epsilon_j^{-1} = a_{ij} + b_i \epsilon_j^{-1} y^{(j)} = a_{ij} + b_i K_j = (A+BK)_{ij} \geq 0, \quad (17)$$

$A+BK$ 矩阵为 Metzler 矩阵且 $(A+BK)\epsilon < 0$ 。根据引理 2, 对于 $0 < x_0 \leq \epsilon$ 有 $0 \leq x(t) \leq \epsilon$, 由于 $0 < \epsilon \leq x_{\max}$ 得到

$$0 \leq x(t) \leq \epsilon \leq x_{\max}. \quad (18)$$

根据式(16)和式(17)得到存在一个状态反馈控制 $u(t) = Kx(t)$, 使得每一个 $A+BK$ 矩阵为 Metzler 矩阵, 且 $(A+BK)\epsilon < 0$, 进而根据定理 4 得到系统(7)具有稳定性和正性。根据式(18)得到满足条件 $0 \leq x(t) \leq x_{\max}$ 。

必要性: 系统(7)具有稳定性和正性, 根据定理 4 得到存在一个状态反馈控制 $u(t) = Kx(t)$, 使得每一个矩阵 $A+BK$ 为 Metzler 矩阵且 $(A+BK)\epsilon < 0$ 。由引理 2, $0 \leq x_0 \leq \epsilon$ 时, 有 $0 \leq x(t) \leq \epsilon$ 。当 $\epsilon > x_{\max}$ 时, 有 $x(t) > x_{\max}$, 与状态非负有上界矛盾, 所以 $0 < \epsilon \leq x_{\max}$ 。式(14)中第一个与第三个不等式证明同定理 3, 进而得到线性规划(LP2)。

定理 7 当系统(1)中控制非负且有上界约束 \bar{u} , 即 $0 \leq u(t) \leq \bar{u}$ 时, 则系统(7)保持稳定和正性的充分必要条件是存在一个状态反馈控制 $u(t) = Kx(t)$, 满足下列线性规划问题

$$(LP3) \begin{cases} Ax + B \sum_{i=1}^n y^{(i)} < 0, \\ x > 0, \\ y^{(i)} \geq 0, \\ \sum_{i=1}^n y^{(i)} \leq \bar{u}, \\ a_{ij}x_j + b_i y^{(j)} \geq 0, i \neq j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (19)$$

证明:充分性:由 $K = [K_1 K_2 \cdots K_n]$, $K_i = x_i^{-1} y^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, 容易得到

$$BKx = B \sum_{i=1}^n y^{(i)}, \quad (20)$$

将式(20)代入 $Ax + B \sum_{i=1}^n y^{(i)} < 0$ 得到

$$(A + BK)x < 0, x > 0, \quad (21)$$

由于 $x_j > 0$, 对于 $i \neq j$, 有

$$(a_{ij}x_j + b_i y^{(j)})x_j^{-1} = a_{ij} + b_i x_j^{-1} y^{(j)} = a_{ij} + b_i K_j = (A + BK)_{ij} \geq 0, \quad (22)$$

所以 $A + BK$ 矩阵为 Metzler 矩阵且 $(A + BK)x < 0$ 。

根据定理 4 得到系统(7)具有稳定性和正性。由引理 2, 对于 $0 \leq x_0 \leq x$, 有 $0 \leq x(t) \leq x$, 根据 $y_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n y^{(i)} \leq \bar{u}$, $i = 1, 2, \dots, n$ 得到 $K > 0$ 且 $Kx \leq \bar{u}$, 所以

$$0 \leq u(t) = Kx \leq \bar{u}。$$

必要性:系统(7)具有稳定性和正性,根据定理 4 得到存在一个状态反馈控制 $u(t) = Kx(t)$, 使得每一个矩阵 $A + BK$ 为 Metzler 矩阵且 $(A + BK)x < 0$ 。由引理 2, $0 \leq x_0 \leq x$ 时, 有 $0 \leq x(t) \leq x$ 。由于 $0 \leq u(t) = Kx \leq \bar{u}$, $K = x_i^{-1} y^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, 则

$$y^{(i)} = Kx_i, \text{ 进而得到 } \sum_{i=1}^n y^{(i)} \leq \bar{u}, y^{(i)} > 0。 \text{ 式(19)中}$$

第一个与第五个不等式证明类似于定理 5, 进而得到线性规划(LP3)。

3 数值例子

数值实验通过 MATLAB 软件得出, 实验结果均四舍五入保留四位小数。

考虑分数阶 R, L, u 型电路, 其中 R_1, R_2, R_3 是电阻, L_1, L_2, L_3 是电感, u_1, u_2 是源电压, x_1, x_2 是线圈里的电流。电路如图 1 所示。

根据电路图得到分数阶 R, L, u 型电路系统为

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$$\text{其中, } \alpha = 0.5, L^{-1} = \begin{bmatrix} L_1 + L_3 & -L_3 \\ -L_3 & L_2 + L_3 \end{bmatrix}, A = L^{-1} \begin{bmatrix} -(R_1 + R_3) & R_3 \\ R_3 & -(R_2 + R_3) \end{bmatrix}, B = L^{-1}。$$

例 1 考虑分数阶 R, L, u 型电路系统, 当电感或者电阻变化时, 系统为不确定系统且含有不确定因素 $\beta (0 \leq \beta \leq 1)$, 其中 A, B 表示如下

$$A = \begin{bmatrix} -1.1 & 0.5 \\ -0.3 & -0.7 - 0.1\beta \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.2 + 0.1\beta \end{bmatrix}。$$

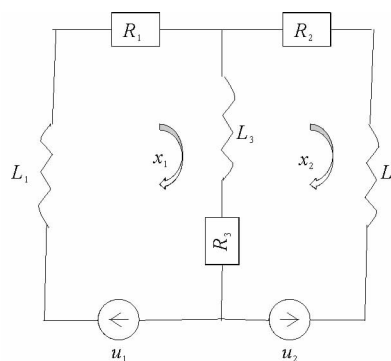


图 1 R, L, u 形式电路图

Fig. 1 R, L, u circuit

根据定理 5, 结合线性规划不等式组

$$\begin{bmatrix} -1.1 & 0.5 & 0.4 & 0.4 \\ -0.3 & -0.7 & 0.2 & 0.2 \\ -1.1 & 0.5 & 0.4 & 0.4 \\ -0.3 & -0.8 & 0.3 & 0.3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ y^{(1)} \\ y^{(2)} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 & -0.4 \\ 0.3 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & -0.4 \\ 0.3 & 0 & -0.3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ y^{(1)} \\ y^{(2)} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

求得线性规划问题的解, 通过 $K = \begin{bmatrix} \frac{y_1}{\lambda_1^{-1} y_1} & \frac{y_2}{\lambda_2^{-1} y_2} \end{bmatrix}$, 得到 $K = [1.6136 \quad 0.5196]$ 。

正性判定: 通过状态反馈控制得到新的系统(7), 当 $\beta = 0$ 时, 矩阵

$$A_1 = A + BK = \begin{bmatrix} -0.4546 & 0.7078 \\ 0.0227 & -0.5961 \end{bmatrix}。$$

$\beta = 1$ 时, $A_2 = A + BK = \begin{bmatrix} -0.4546 & 0.7078 \\ 0.1841 & -0.6441 \end{bmatrix}$, 矩阵 A_1, A_2 为 Metzler 矩阵, 得到系统(7)具有正性。

稳定性判定: 存在 $P_1 = \begin{bmatrix} 1.1403 & 0.8071 \\ 0.8071 & 1.7973 \end{bmatrix}$, 使 $A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -E$, 同时存在 $P_2 = \begin{bmatrix} 1.7120 & 1.5113 \\ 1.5113 & 2.4370 \end{bmatrix}$, 使 $A_2^T P_2 + P_2 A_2 = -E$, 得到系统(7)具有稳定性; A_1 特征值 $\lambda_1 = -0.3801, \lambda_2 = -0.6705$, A_2 的特征值 $\lambda_1 = -0.1761, \lambda_2 = -0.9225$, 也可以得到系统(7)具有稳定性。

根据例 1, 当 $\beta = 0$ 时, 对于不同的初始条件(10,20), (14,6), (16,2), 新系统的状态轨迹如图 2 所示, 当 $\beta = 1$ 时, 对于不同的初始条件(10,20), (14,6), (16,2), 新系统的状态轨迹如图 3 所示。

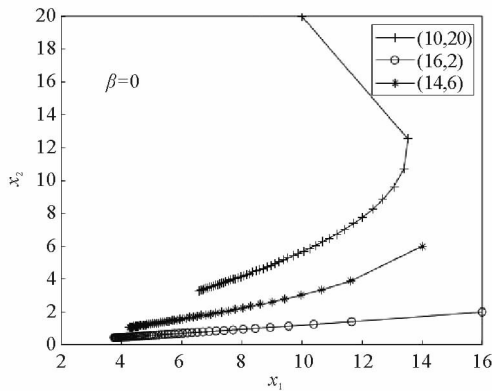


图 2 例 1 系统状态轨迹图

Fig. 2 System state trajectory of example 1

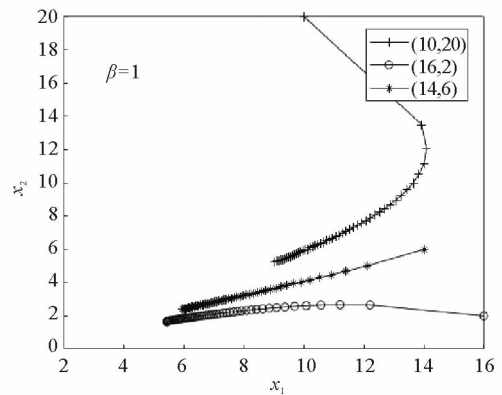


图 3 例 1 系统状态轨迹图

Fig. 3 System state trajectory of example 1

其中, 时间步长为 0.1 s, 总时长为 50 s, 并且 Mittag-Leffler 指数函数中的 $k=400$ 。状态轨迹在第一象限均收敛到(0,0), 表明新系统从随机选取的非负初始条件演化而来, 新系统具有稳定性。

根据定理 5, 当系统为不确定系统, 即矩阵 A, B 含有不确定因素, 可以利用线性规划求出一个状态反馈控制使新系统保持正性与稳定性。

例 2 考虑分数阶 R, L, u 型电路系统, 电路需要满足条件为线圈里的电流非负有上界即 $0 \leq x_i(t) \leq 2, i=1, 2$, 其中 A, B 表示如下:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 \\ -0.3 & -0.7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix}。$$

根据定理 6, 结合线性规划不等式组

$$\begin{bmatrix} -1 & -0.5 & 0.4 & 0.4 \\ -0.3 & -0.7 & 0.2 & 0.2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & -0.4 \\ 0.3 & 0 & -0.2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

求得线性规划问题的解, 通过 $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{y_1}{\epsilon_1^{-1} y_1} & \frac{y_2}{\epsilon_2^{-1} y_2} \end{bmatrix}$, 得到 $\mathbf{K} = [1.590 \ 9 \quad 2.857 \ 1]$ 。

正性判定: 通过状态反馈控制得到新的系统(7), 矩阵

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} -0.363 \ 6 & 0.642 \ 8 \\ 0.018 \ 2 & -0.128 \ 6 \end{bmatrix}。$$

矩阵 $\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ 为 Metzler 矩阵, 得到系统(7)具有正性。

稳定性判定: 存在 $\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1.504 \ 3 & 2.585 \ 6 \\ 2.585 \ 6 & 16.815 \ 6 \end{bmatrix}$, 使 $\mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 = -\mathbf{E}$, 得到系统(7)具有稳定性; \mathbf{A}_1 特

征值 $\lambda_1 = -0.405 \ 8, \lambda_2 = -0.086 \ 4$, 也可以得到系统(7)具有稳定性。

根据例 2, 对于不同的初始条件 $(1.5, 0.5)$, $(1.4, 0.8)$, $(0.8, 1.2)$, 新系统的状态轨迹如图 4 所示。其中, 时间步长为 0.1 s , 总时长为 150 s , 并且 Mittag-Leffler 指数函数中的 $k=400$ 。状态轨迹在第一象限收敛到 $(0, 0)$, 表明新系统从随机选取的非负初始条件演化而来, 新系统具有稳定性。

根据定理 6, 当原系统状态非负有上界时, 可以利用线性规划求出一个状态反馈控制使新系统具有正性和稳定性, 且新系统的状态非负有上界。

例 3 考虑分数阶 R, L, u 型电路系统, 电路需要满足条件为源电压非负有上界即 $0 \leq \mu_i(t) \leq 30, i=1, 2$, 其中 \mathbf{A}, \mathbf{B} 表示如下

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1.1 & 0.5 \\ -0.3 & -0.7 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix}。$$

根据定理 7, 结合线性规划不等式组

$$\begin{bmatrix} -1.1 & 0.5 & 0.4 & 0.4 \\ -0.3 & -0.7 & 0.2 & 0.2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 & -0.4 \\ 0.3 & 0 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix},$$

求得线性规划问题的解, 通过 $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{y_1}{\epsilon_1^{-1} y_1} & \frac{y_2}{\epsilon_2^{-1} y_2} \end{bmatrix}$, 得到 $\mathbf{K} = [1.613 \ 6 \quad 0.000 \ 5]$ 。

正性判定: 通过状态反馈控制得到新的系统(7), 矩阵 $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} -0.454 \ 6 & 0.500 \ 2 \\ 0.022 \ 7 & -0.699 \ 9 \end{bmatrix}$; 矩阵

$\mathbf{A} + \mathbf{BK}$ 为 Metzler 矩阵, 得到系统(7)具有正性。

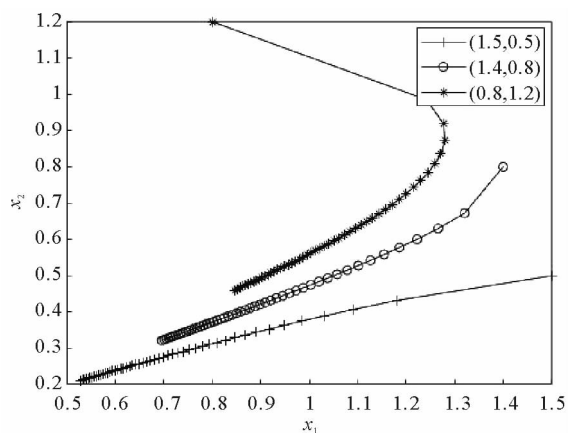


图 4 例 2 系统状态轨迹图

Fig. 4 System state trajectory of example 2

稳定性判定:存在 $P_1 = \begin{bmatrix} 1.1254 & 0.5088 \\ 0.5088 & 1.0780 \end{bmatrix}$, 使 $A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -E$, 得到系统(7)具有稳定性; A_1 特征值 $\lambda_1 = -0.4147, \lambda_2 = -0.7397$, 也可以得到系统(7)具有稳定性。

根据例3, 对于不同的初始条件(16,4), (10,20), (14,8), 新系统的状态轨迹如图5所示。其中, 时间步长为0.1s, 总时长为30s, 并且 Mittag-Leffler 指数函数中的 $k=400$ 。状态轨迹在第一象限收敛到(0,0), 表明新系统从随机选取的非负初始条件演化而来, 新系统具有稳定性。

相应的控制轨迹如图6所示。

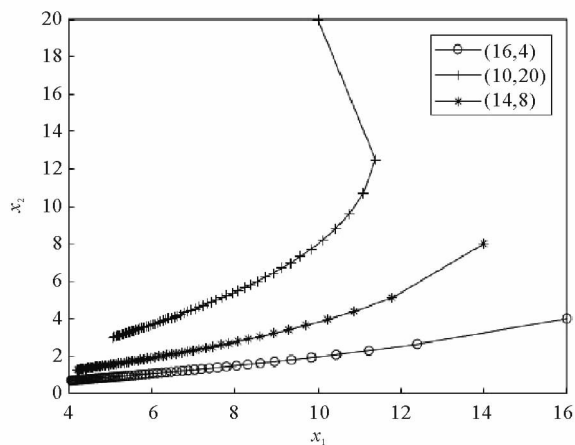


图5 例3系统状态轨迹图

Fig. 5 System state trajectory of example 3

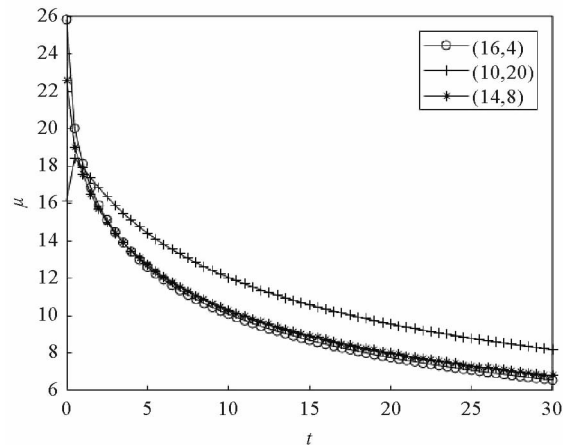


图6 例3状态演化轨迹图

Fig. 6 The evolution of control about example 3

可以看出, 对 μ 的限制满足条件。

根据定理6, 当原系统控制非负有上界时, 可以利用线性规划求出一个状态反馈控制使新系统保持正性和稳定性, 且新系统的控制非负有上界。

4 结论

主要研究了带约束的连续分数阶系统的稳定性与正性的一个判定与求解方法。首先得到连续分数阶线性系统为正系统和渐进稳定的一个充要条件, 然后将求解带控制约束的连续分数阶系统状态反馈控制问题转化为一类线性规划问题, 最后通过求解线性规划得到满足所给约束条件的控制律, 使得闭环系统保持稳定性与正性并且满足控制约束条件。通过该方法可以得到使闭环系统保持稳定性与正性并且满足控制约束条件的控制律, 符合实际工程的应用。同其他方法相比, 该方法易于数值实现。数值实验表明, 该方法正确可行且方便求解, 提高了求解效率。在后续的研究中, 将针对状态空间描述的一般形式的分数阶线性系统以及分数阶非线性系统, 进行稳定性与正性控制研究。

参考文献:

- [1] DAI W, FANG Y, QIN G. Classification of positive solutions to fractional order hartree equations via a direct method of moving planes[J]. Journal of Differential Equations, 2018, 265(5): 2044-2063.
- [2] SHEN J, LAM J. Stability and performance analysis for positive fractional-order systems with time-varying delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 61(9): 2676-2681.
- [3] WANG C, ZHAO Y. Performance analysis and control of fractional-order positive systems[J]. IET Control Theory & Applications, 2019, 13(7): 928-934.
- [4] LI A P, LIU G R, LUO Y P, et al. An indirect lyapunov approach to robust stabilization for a class of linear fractional-order system with positive real uncertainty[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2018, 57(1/2): 39-55.

- [5] REN Y, SUN G, FENG Z. Observer-based stabilization for switched positive system with mode-dependent average dwell time[J]. ISA Transactions, 2017, 70: 37-45.
- [6] EBIHARA Y, PEAUCELLE D, ARZELIER D. Convergence rate analysis of multi-agent positive systems under formation control: an efficient algorithm by exploiting positivity[J]. SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration, 2016, 9(5): 216-224.
- [7] BRIAT C. Stability and performance analysis of linear positive systems with delays using input-output methods[J]. International Journal of Control, 2018, 91(7): 1669-1692.
- [8] LIU L J, KARIMI H R, ZHAO X. New approaches to positive observer design for discrete-time positive linear systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2018, 355(10): 4336-4350.
- [9] 周明媛, 杨洪礼, 潘鹏. 连续正奇异线性系统正性判定的一种新方法[J]. 山东科技大学学报(自然科学版), 2018, 37(4): 83-91.
- ZHOU Mingyuan, YANG Hongli, PAN Peng. A novel approach to positivity analysis of continuous-time positive singular linear systems[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology(Natural Science), 2018, 37(4): 83-91.
- [10] BERMAN A, NEUMANN M, STEM R J. Nonnegative matrices in dynamic systems[M]. New York: Wiley, 1989.
- [11] LEENHEER P D, AEYELS D. Stabilization of positive linear systems[J]. Systems & Control Letters, 2001, 44(4): 259-271.
- [12] KOCISZEWSKI R, KACZOREK T. Application of LMI approach to positive stabilization of 2D linear systems by state feedback[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2009, 42(13): 262-267.
- [13] KACZOREK T. Stabilization of positive linear systems[C]// 1999 IEEE Conference on Decision & Control, 1999: 2-5.
- [14] GAO H, LAM J, WANG C, et al. Control for stability and positivity: Equivalent conditions and computation[J]. IEEE Transactions on Circuits & Systems: II Express Briefs, 2005, 52(9): 540-544.
- [15] HMAMED A, BENZAOUIA A, TADEO F, et al. Positive stabilization of discrete-time systems with unknown delay and bounded controls[C]// 2007 IEEE American Control Conference, 2007: 5616-5622.
- [16] HMAMED A, BENZAOUIA A, TADEO F, et al. Memoryless control to drive states of delayed continuous-time systems within the nonnegative orthant[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2008, 41(2): 3934-3939.
- [17] HMAMED A, BENZAOUIA A, TADEO F, et al. Stabilization under constrained states and controls of positive systems with time delays[J]. European Journal of Control, 2012, 18(2): 182-190.
- [18] LUNZE J, LEHMANN D. A state-feedback approach to event-based control[J]. Automatica, 2010, 46(1): 211-215.
- [19] 何杰, 田丰. 船舶卫星通信系统的稳定性控制系统开发[J]. 舰船科学技术, 2019, 41(18): 136-138.
- HE Jie, TIAN Feng. Development of stability control system for ship satellite communication system[J]. Ship Science and Technology, 2019, 41(18): 136-138.
- [20] 田小敏, 杨忠, 司海飞. 分数阶系统控制综述[J]. 金陵科技学院学报, 2016, 32(4): 22-27.
- TIAN Xiaomin, YANG Zhong, SI Haifei. Review of fractional system control[J]. Journal of Jinling University of Science and Technology, 2016, 32(4): 22-27.
- [21] JARAD F, ABDELJAWAD T, BALEANU D. On the generalized fractional derivatives and their Caputo modification[J]. Journal of Nonlinear Sciences and Applications, 2017, 10(5): 2607-2619.
- [22] SOUZA M, WIRTH F R, SHORTEN R N. A note on recursive schur complements, block hurwitz stability of metzler matrices, and related results[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(8): 4167-4172.
- [23] BENZAOUIA A, HMAMED A, MESQUINE F, et al. Stabilization of continuous-time fractional positive systems by using a Lyapunov function[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(8): 2203-2208.
- [24] BETTOU K, CHAREF A, MESQUINE F. A new design method for fractional order PID controller[J]. International Journal of Sciences and Techniques of Automatic Control and Compute Engineering, 2008, 2(1): 414-429.
- [25] LUO Y, CHEN Y Q. Fractional-order proportional derivative controller for robust motion control: tuning procedure and validation[C]// American Control Conference, 2009: 1412-1418.
- [26] RAMI M A, TADEO F, BENZAOUIA A. Control of constrained positive discrete systems[C]// IEEE American Control Conference, 2007: 5851-5856.