

一种改进的病态测距方程非线性估计的正则化数值迭代法

张建霞,曲国庆,席 换,王 晖

(山东理工大学 建筑工程学院,山东 淄博 255000)

摘 要:传统非线性正则化数值迭代法能够解决病态测距定位方程,但该方法常假设 3 个方向具有相同的病态程度,将正则化约束作用于所有的方向,加剧了问题的复杂性并影响解的收敛效率。因此,针对已知点和未知点近似共面引起的病态问题,提出一种改进的非线性正则化数值迭代法。该方法将正则化约束仅作用于病态方向即 Z 方向,对态性良好的方向不进行约束,解决了测距定位方程的病态问题,也提高了传统非线性正则化数值迭代方法的收敛效率。该计算方法采用协方差迹最小准则来确定正则化参数。实验表明:该方法能够提高非线性最小二乘线性化方法的求解精度,收敛效率明显优于传统非线性正则化迭代法。

关键词:测距定位方程;非线性;正则化;病态方向

中图分类号:P228.4

文献标志码:A

An improved regularized numerical iteration method for nonlinear estimation of ill-conditioned distance equations

ZHANG Jianxia, QU Guoqing, XI Huan, WANG Hui

(School of Civil and Architecture Engineering, Shandong University of Technology, Zibo, Shandong 255000, China)

Abstract: The traditional nonlinear regularization numerical iteration method can solve the ill-conditioned distance equations, but it often assumes that the three directions have the same ill-conditioned degree and the regularization constraint is applied to all directions, which will increase the complexity of the problem and affect the convergence efficiency of the solution. In this paper, an improved nonlinear regularization numerical iteration method is proposed for the ill-conditioned problem caused by the approximate coplanar of the known points and unknown points. Acting only on the ill-conditioned direction, that is, the Z direction, but not on the direction feebly influenced by ill conditions, this iteration method solves the ill-conditioned problem of distance equations and improves the convergence efficiency of the traditional nonlinear regularization numerical iteration method. The minimum criterion of covariance tracks is used to determine the regularization parameters. Experiments show that the proposed method can improve the solution accuracy of the nonlinear least squares linearization method, and its convergence efficiency is significantly better than the traditional nonlinear regularization iteration method.

Key words: distance equations; nonlinearity; regularization; ill-conditioned direction

测距定位方程用来描述已知点和待测点之间的欧氏距离,是大地测量与导航定位中重要的观测方程^[1]。该方程是非线性方程,传统方法利用非线性最小二乘法,依据泰勒级数展开至一阶项进行求解,适用于初值

收稿日期:2020-12-15

基金项目:国家自然科学基金项目(41974105)

作者简介:张建霞(1996—),女,山西忻州人,硕士研究生,主要从事 GNSS 测量数据处理的研究。

曲国庆(1962—),男,山东烟台人,教授,博士,主要从事 GNSS 测量数据处理的研究,本文通信作者。

E-mail: qgq@sdut.edu.cn

精度高和非线性强度弱的情况;对于非线性强度较强的模型,线性近似产生的模型误差可能大于观测误差,给观测方程带来系统性的误差,降低解的精度和可信度^[2-3]。对于这类问题,可采用智能优化算法或将其线性化展开至二阶项进行求解^[4-7]。对于残差小的非线性方程,一般采用高斯牛顿迭代法进行求解^[8]。但是,若测距定位方程存在病态问题时,初始迭代矩阵具有严重的病态性,基于非线性最小二乘的数值迭代法会出现强烈的不稳定现象,无法收敛^[9-10]。因此,根据测距定位方程的病态机制,选择合适的求解病态非线性方程的方法就显得尤为重要。

针对短程测距问题,有学者研究了测距定位方程非线性最小二乘解的性质,指出非线性最小二乘解是观测向量末端以观测权为质量的质点系的重心,发展了短程测距定位方程的重心迭代方法和封闭式牛顿方法,能够一定程度缓解短程测距的病态问题^[11-13]。近年来的研究包括基于数值最优化理论通过附加稳定泛函或者避免迭代矩阵取逆运算,优化迭代步长来提高短程测距定位的收敛效率、稳定性和可靠性^[1,14-15]。非线性正则化数值方法在处理病态测距定位问题的应用过程中过于硬套,多集中于数值方法的构建,但在大地测量中,测距定位方程的病态问题主要是因为已知点和未知点近似共面,如三维测边网、室内定位方程和水下测距定位方程,导致测距定位方程在高程方向即 Z 方向产生病态问题^[16]。传统非线性正则化数值迭代法假设各个方向都存在病态问题,给各个方向附加正则化约束,这会严重加剧问题的复杂性、非线性收敛效率和解的可信度。

因此,针对大地测量观测构型缺陷产生的病态问题,提出一种改进的病态测距方程非线性估计的正则化数值迭代法。该方法采用分方向处理的思想,将非线性正则化约束只作用于病态方向,不对态性良好的水平方向进行约束,这样既保证水平方向能够稳定收敛到非线性最小二乘解,又能够有效降低病态方向对参数估计解的影响。本研究通过分析正则化参数与协方差的关系,提出采用协方差迹最小准则来确定正则化参数。最后采用病态仿真数据和实测数据,验证了该方法的有效性。

1 病态测距定位方程的非线性正则化数值迭代法

假设某观测系统中,共存在 n 个已知点,第 i 个已知点可表示为 (x_i, y_i, z_i) , 已知点到未知点的观测距离为 L_1, L_2, \dots, L_n , 所对应的观测误差为 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ 。要求根据已知点坐标和观测距离来确定未知点的几何位置 (x, y, z) , 观测数据和已知点坐标 $n \geq 4$, 即可列出超定测距定位方程:

$$L_i = d_i(\mathbf{x}) + \epsilon_i, \quad (1)$$

其中, $d_i(\mathbf{x}) = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}$ 为已知点与未知点间的欧式距离。测距定位方程为非线性方程,借助于非线性最小二乘进行求解,依据泰勒公式将其在 (x_0, y_0, z_0) 展开至一阶项可得:

$$L_i - d_i(\mathbf{x}_0) = \frac{x - x_i}{d_i(\mathbf{x}_0)} dx + \frac{y - y_i}{d_i(\mathbf{x}_0)} dy + \frac{z - z_i}{d_i(\mathbf{x}_0)} dz + \Delta_i + \epsilon_i, \quad (2)$$

其中 Δ_i 为线性化残余误差。

大地测量与导航定位中,由于观测几何结构设计问题导致测距定位方程具有病态性,比如已知点与待测点近似共面会导致测距定位方程在 Z 方向产生病态问题,为将病态方向与态性良好的方向分开讨论,可将观测方程表示为:

$$L_i - d_i(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{x - x_i}{d_i(\mathbf{x}_0)} & \frac{y - y_i}{d_i(\mathbf{x}_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} + \frac{z - z_i}{d_i(\mathbf{x}_0)} dz + \Delta_i + \epsilon_i. \quad (3)$$

忽略线性化余项,可构建线性化平差模型的向量表达式:

$$\mathbf{L} = \mathbf{B}_1 d\mathbf{r} + \mathbf{B}_2 dz + \boldsymbol{\epsilon}, \quad (4)$$

式中, $d\mathbf{r} = [dx, dy]^T$ 为水平方向坐标信息变化量; dz 为高程方向坐标信息变化量; \mathbf{B}_1 为平面方向的方向矢量,即水平方向所对应的设计矩阵; \mathbf{B}_2 为 Z 方向的方向矢量,即 Z 方向所对应的设计矩阵。根据式(4)可得线性化误差方程:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{B}_1 d\mathbf{r} + \mathbf{B}_2 dz - \mathbf{l}, \quad (5)$$

式中, $\mathbf{l} = \mathbf{L} - \mathbf{d}(\mathbf{x}_0)$ 。上述方程的最小二乘解使残差在平方意义上取极小值 \min :

$$\boldsymbol{\varphi}(\bar{\mathbf{d}}\mathbf{x}_0) = \mathbf{V}(\mathbf{x}_0)^T \mathbf{P} \mathbf{V}(\mathbf{x}_0) = \min, \quad (6)$$

其中: $\boldsymbol{\varphi}: \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ 称为最小二乘目标函数; $\bar{\mathbf{d}}\mathbf{x}_0 = [\bar{d}\mathbf{r}, \bar{d}\mathbf{z}]^T$ 为参数改正向量的最小二乘估计解。运用无约束优化解法,其最小二乘解满足正交条件:

$$\boldsymbol{\varphi}'(\bar{\mathbf{d}}\mathbf{x}_0) = \mathbf{h}(\bar{\mathbf{d}}\mathbf{x}_0) = 2[\mathbf{B}_1^T(\mathbf{x}_0) \quad \mathbf{B}_2^T(\mathbf{x}_0)]^T \mathbf{P} \mathbf{V}(\mathbf{x}_0) = 0. \quad (7)$$

将式(5)代入式(7)进行化简,考虑到线性化初值精度,可构建高斯牛顿迭代公式:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_k) & \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_k) & \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{l} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

其中 k 为迭代次数。

高斯牛顿法收敛条件相对于牛顿法更加严格。对于一般非线性最小二乘问题,文献[17]利用几何性质证明高斯牛顿法的适应条件取决于残差的大小和非线性强度。当残差较大或者设计矩阵存在病态时,此时高斯牛顿法易陷入死循环或者得到的解并非有效解^[15]。为解决测距定位方程的病态问题,传统方法是基于标准稳定泛函约束的正则化方法,其目标函数为:

$$\boldsymbol{\Psi}(\bar{\mathbf{d}}\mathbf{x}_0) = \mathbf{V}(\mathbf{x}_0)^T \mathbf{P} \mathbf{V}(\mathbf{x}_0) + \alpha \bar{\mathbf{d}}\mathbf{x}_0^T \bar{\mathbf{d}}\mathbf{x}_0 = \min, \quad (9)$$

其中 α 为正则化参数,主要用来平衡解的不稳定性和平滑性^[10]。考虑到线性化初值,将目标函数对待估参数求一阶偏导数令其等于零,结合式(5)进行化简可得:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \bar{\mathbf{d}}\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_k) + \alpha \mathbf{I} & \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_k) & \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_k) + \alpha \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{l} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

式(10)为传统非线性正则化迭代法。

由式(10)可知,传统非线性正则化迭代法假设各个方向具有相同的病态问题,因此将稳定泛函作用于所有方向,这种假设能够提高解的稳定性,但并不切合实际,增加了问题的复杂度且降低了数值算法的收敛性。大地测量与导航定位中,观测结构共面导致的病态问题较常见,先计算设计矩阵的条件数证明存在病态,再利用特征分析法求得3个方向对应的特征值,一般将“特征值很接近于零”作为判断方程病态性的依据^[18-19]来判断病态方向。针对共面导致的病态集中于 \mathbf{Z} 方向的问题,给出一种改进的正则化数值迭代法,即

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \bar{\mathbf{d}}\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_k) & \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_k) & \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_k) + \alpha \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{l} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

该方法采用分方向处理病态问题的思想,降低了问题的复杂度,能保证水平方向上仍然为最小二乘解,在降低病态性对解的影响的同时提高收敛效率。

2 正则化参数的确定

精确确定正则化参数是保证病态测距定位方程的非线性正则化迭代法解算效果的关键,过大或过小都会影响参数估计解,过大会导致解算模型过度平滑,过小对问题解算未起到明显改善效果,解的不稳定性依然存在。本研究提出一种基于最小协方差迹来确定正则化参数的方法。设

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_k) & \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_k) & \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_k) + \alpha \mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (12)$$

根据协因数传播定律,结合式(12)可计算观测方程的协因数阵为:

$$\mathbf{Q}_{\text{dx}} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_k) & \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_k) \\ \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{B}_1(\mathbf{x}_k) & \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{B}_2(\mathbf{x}_k) \end{bmatrix} \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \|\mathbf{Q}\|^2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

根据分块矩阵求逆运算,可得到参数估计解垂直方向和水平方向的协因数阵

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_{\text{dzdz}} = \|\mathbf{Q}_{\text{dzdz}}\| = [\mathbf{N}_{22}(\mathbf{x}_k) + \alpha \mathbf{I} - \mathbf{N}_{12}(\mathbf{x}_k) \mathbf{N}_{11}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{N}_{21}(\mathbf{x}_k)]^{-1} - \alpha \|\mathbf{Q}\|^2, \\ \mathbf{Q}_{\text{drdr}} = \mathbf{N}_{11}^{-1}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{N}_{11}^{-1}(\mathbf{x}_k) \mathbf{N}_{12}(\mathbf{x}_k) \mathbf{Q}_{\text{dzdz}} \mathbf{N}_{21}(\mathbf{x}_k) \mathbf{N}_{11}^{-1}(\mathbf{x}_k). \end{cases} \quad (14)$$

若不附加正则化约束,水平方向和垂直方向的协因数阵为:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{Q}}_{\text{dzdz}} = \|\tilde{\mathbf{Q}}_{\text{dzdz}}\| = [\mathbf{N}_{22}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{N}_{12}(\mathbf{x}_k)\mathbf{N}_{11}^{-1}(\mathbf{x}_k)\mathbf{N}_{21}(\mathbf{x}_k)]^{-1}, \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{\text{drdr}} = \mathbf{N}_{11}^{-1}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{N}_{11}^{-1}(\mathbf{x}_k)\mathbf{N}_{12}(\mathbf{x}_k)\tilde{\mathbf{Q}}_{\text{dzdz}}\mathbf{N}_{21}(\mathbf{x}_k)\mathbf{N}_{11}^{-1}(\mathbf{x}_k). \end{cases} \quad (15)$$

由式(15)可知,测距定位方程 Z 方向的病态性也会影响水平方向即 X 和 Y 方向的求解精度,使 X 和 Y 方向也产生病态性的“虚假”问题。如果将正则化约束直接作用于所有的方向,虽能够改善问题的病态性,但加剧了问题的复杂性,降低了非线性迭代收敛效率。将式(15)减去式(14)可得:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{Q}}_{\text{dzdz}} - \mathbf{Q}_{\text{dzdz}} = \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{Q}}_{\text{dzdz}}\|} - \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{Q}}_{\text{dzdz}}\| + \alpha} + \alpha \|\mathbf{Q}\|^2 = \frac{\alpha}{\|\tilde{\mathbf{Q}}_{\text{dzdz}} + \alpha \mathbf{I}\|} + \alpha \|\mathbf{Q}\|^2, \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{\text{drdr}} - \mathbf{Q}_{\text{drdr}} = (\|\tilde{\mathbf{Q}}_{\text{dzdz}}\| - \|\mathbf{Q}_{\text{dzdz}}\|)\mathbf{N}_{11}^{-1}(\mathbf{x}_k)\mathbf{N}_{12}(\mathbf{x}_k)\mathbf{N}_{21}(\mathbf{x}_k)\mathbf{N}_{11}^{-1}(\mathbf{x}_k). \end{cases} \quad (16)$$

由式(16)可知,在一定取值范围内,参数估计解的协因数阵与正则化参数呈递降关系。通过将正则化参数作用于 Z 方向能够降低 Z 方向病态给水平方向即 X 和 Y 方向产生的影响。取水平方向和垂直方向的互协因数阵为 \mathbf{Q}_{drdz} ,则可计算参数估计解的协方差估计值

$$\mathbf{D}_{\text{dx}} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\text{dx}} = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\text{drdr}} & \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\text{drdz}} \\ \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\text{drdz}}^T & \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\text{dzdz}} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

其中 σ_0^2 为先验单位权方差。考虑到先验单位权方差未知,可采用后验单位权方差 $\hat{\sigma}_0^2(\alpha_k)$ 代替,计算公式为:

$$\hat{\sigma}_0^2(\alpha_k) = \frac{\mathbf{V}(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{P} \mathbf{V}(\mathbf{x}_k)}{n-3}. \quad (18)$$

综上分析,参数估计解在水平方向和垂直方向的方差是 α 的递降函数,这表明在适当条件下,方差会随正则化参数的增加而降低,但由于系统残差以及偏差等问题,方差会逐渐趋于稳定值。由于协方差迹能够整体反映该方法的求解精度,可设计如式(19)最优化函数来计算正则化参数:

$$\rho(\alpha_k) = \min \text{tr}[\mathbf{D}_{\text{dx}}(\alpha_k)]. \quad (19)$$

式(19)为协方差迹最小准则函数,类似于采用 L 曲线法来确定正则化参数,其搜索结果如图 1 所示,协方差随着正则化参数的增加而降低,最后趋于稳定,形状类似于 L 形。

3 算例

3.1 算例 1:短程测距定位模拟实验

采用文献[12]模拟的短程测距定位数据,包括 8 个已知点 P_1, P_2, \dots, P_8 的三维坐标以及待定点 P_9 (模拟真值为 $(0, 0, 0)\text{m}$) 到 8 个已知点的观测距离,根据这 8 个已知点的三维坐标和观测距离求待定点的三维坐标,给定初值为 $\mathbf{x}_0 = [0.1, -0.1, 0.1]^T$,迭代终止条件为 $\|\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)\| \leq 10^{-8}$ 。

由表 1 数据构造的短程测距定位方程是非线性方程,且已知点和待定点呈近似共面分布,计算设计矩阵的条件数为 115.052 0,存在中等程度的病态,再计算设计矩阵 3 个方向上的特征值分别为 6.719 4、1.222 2、0.058 4, Z 方向上的特征值最接近于 0,可判断该方程的病态性主要集中于 Z 方向, X 方向和 Y 方向态性良好。对于这类病态问题,分别采用非线性最小二乘法、高斯牛顿法、传统非线性正则化迭代法和本研究方法进行计算并对比收敛结果和迭代次数,结果如表 2 所示。

由表 2 给出的 4 种方法的数值收敛解对比可知,非线性最小二乘法虽然简单易实现,但由于受到病态的影响,解的精度较差,结果不可靠,尤其是 Z 方向上的解与真值的偏差最大,进一步证明了该方程的病态性

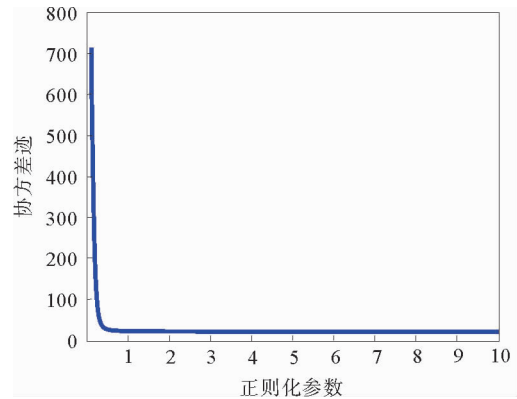


图 1 基于协方差迹最小准则确定正则化参数搜索结果

Fig. 1 Regularization parameter search results based on the minimum criterion of variance tracks

集中于 Z 方向;高斯牛顿法在处理病态问题时,受到强烈扰动而使解不稳定,无法收敛到数值解,因此不适用于病态方程组的解算;传统非线性正则化迭代法和本研究方法基于稳定泛函约束的思想,降低了病态问题对方程组解的影响,提高了非线性最小二乘解的精度;而本研究方法既保证水平方向能够稳定收敛到传统意义上的非线性最小二乘解,又能够有效降低病态方向对解的影响,通过迭代次数比较,说明本研究方法能够较快地得到数值收敛解,提高了传统非线性正则化迭代法的收敛效率,在处理大地测量中已知点和待定点近似共面导致的病态问题时具有良好的性能。

图2给出了本研究方法和传统非线性正则化迭代法的点位迭代序列,横轴代表迭代次数,纵轴分别代表 X 、 Y 、 Z 3个方向上的数值收敛解。由图2可知,该方法没有影响解的稳定性,且能更快地收敛到估计解,具有良好的性能。对于水下GPS定位、室内导航定位等短距离测距定位方程,也存在已知点和未知点近似共面的情况,本研究方法仍然适用。

3.2 算例2:蜂窝网定位模拟实验

采用文献[16]模拟的正六边形蜂窝网定位数据,其6个控制点 P_1, P_2, \dots, P_6 位于正六边形的顶点,未知点 P_7 的点位模拟真值为 $(4\ 400, 4\ 400, 0)$,表3给出了6个控制点坐标及控制点与未知点之间的伪距观测值。根据这6个控制点的三维坐标和伪距观测值求未知点的三维坐标,给定初值为 $\mathbf{x}_0 = [4\ 400, 4\ 400, 0, 0]^T$,迭代终止条件为 $\|\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)\| \leq 10^{-8}$ 。

在蜂窝网的三维定位中,控制点和未知点一般都近似分布于地表,即控制点和未知点近似共面,测距定位方程的设计矩阵存在病态问题。计算设计矩阵的条件数为 $1.563\ 0 \times 10^6$,方程存在严重病态,再计算设计矩阵3个方向上的特征值分别为 $10.449\ 5$ 、 $1.518\ 7$ 、 $0.031\ 8$, Z 方向上的特征值最接近于0,可判断该方程的病态性主要集中于 Z 方向, X 和 Y 方向上的病态性较弱。同算例1,分别采用4种方法进行计算,结果如表4所示。

表1 短程测距定位已知点的三维坐标和已知观测距离

Tab. 1 Three dimensional coordinates and observation distance of known points in the short-range ranging positioning m

点号	坐标			距离
	X	Y	Z	
P1	10.000	20.000	6.000	22.180 0
P2	8.000	30.000	0.000	30.960 0
P3	10.000	-20.000	6.000	23.170 0
P4	8.000	-30.000	0.000	30.880 0
P5	-10.000	-20.000	-6.000	23.070 0
P6	-8.000	-30.000	0.000	30.440 0
P7	-10.000	20.000	-6.000	22.700 0
P8	-8.000	30.000	0.000	30.720 0

表2 不同方法的解算结果(算例1)

Tab. 2 Calculation results of different methods(Example 1)

方法	数值收敛解/m			迭代次数 k
非线性最小二乘法	-0.633 4	0.123 6	1.424 5	—
高斯牛顿法	—	不收敛	—	—
传统非线性正则化迭代法	-0.213 7	0.122 9	0.552 0	106
本研究方法	-0.213 7	0.122 9	0.552 0	26

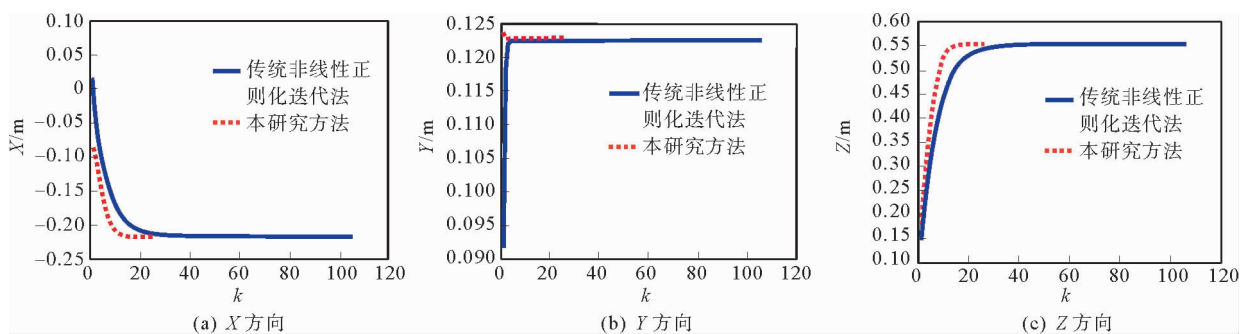


图2 2种方法的点位迭代序列图(算例1)

Fig. 2 Point iteration sequence diagrams of the two methods(Example 1)

由表 4 可知,从数值收敛解来看,非线性最小二乘法得到的收敛解误差较大,尤其是 Z 方向的解偏离真实值最大,解算结果不可信,证明 Z 方向确实受病态影响最大,病态主要集中在 Z 方向;高斯牛顿法不适用于处理病态方程,易受到初值的约束和病态的影响,使解无法收敛;传统非线性正则化迭代法和本研究方法虽然得到收敛解的数值相同,但该方法在水平方向得到的还是传统意义上的非线性最小二乘解,但因为 Z 方向受到正则化约束的作用,使得 Z 方向上解的病态性减弱,误差减小,同时因为方程整体病态的减弱也影响了其余 2 个方向的解,与模拟真值更相近,提高了非线性最小二乘法的精度。从迭代次数对比来看,该方法提高了传统非线性正则化迭代法的收敛效率,具有良好的性能。

图 3 给出了传统非线性正则化迭代法和本研究方法的点位迭代序列图,从图中可以看出,该方法在提高收敛效率的同时稳定性并没下降,能更早更快的趋于收敛。结合表 4 可以得出结论:该方法在处理病态测距定位方程时表现出良好的性能。

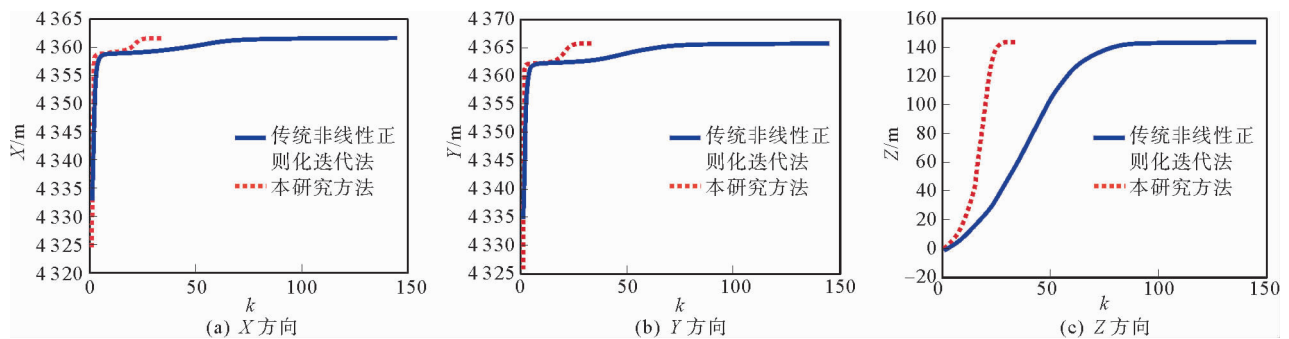


图 3 2 种方法的点位迭代序列图(算例 2)

Fig. 3 Point iteration sequence diagrams of the two methods(Example 2)

3.3 算例 3:水下定位实测数据实验

选取南海测量船围绕应答器航行一圈数据中的 15 个相邻数据,根据这 15 个已知点 P_1, P_2, \dots, P_{15} 的坐标和观测距离求待定点 P_{16} 的三维坐标。将所有数据进行单点定位的结果作为待定点的真值,即 $(2\ 438\ 925.079, 491\ 997.435, 2\ 010.694)$ 。实验所给的迭代初始值为 $\mathbf{x}_0 = [2\ 438\ 900, 492\ 000, 1\ 000]^T$, 迭代终止条件为 $\|\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)\| \leq 10^{-8}$ 。在水下定位中,布设浮标时所有浮标都漂浮在一个水平面上,出现近似共面的情况,使得水下测距定位方程线性化后的方程设计矩阵存在严重的病态性。计算设计矩阵的条件数为 $1.613\ 5 \times 10^3$, 方程存在严重病态,再计算设计矩阵在 3 个方向的特征值分别为 13.724 7、1.266 8、0.008 5, Z 方向上的特征值最接近于 0,证明水下测距定位方程的病态问题主要集中在 Z 方向上, X 方向和 Y 方向态性良好。同算例 1、2,分别采用 4 种方法进行计算,结果如表 5 所示。

表 3 蜂窝网已知点的三维坐标和已知观测距离

Tab. 3 Three dimensional coordinates and observation distance of known points in cellular network

点号	控制点坐标			伪距观测值
	X	Y	Z	
P1	4 000.00	0.00	5.00	4 923.99
P2	2 000.00	3 464.10	10.00	3 067.71
P3	-2 000.00	3 464.10	15.00	6 962.62
P4	-4 000.00	0.00	20.00	9 975.28
P5	-2 000.00	-3 464.10	25.00	10 627.00
P6	2 000.00	-3 464.10	30.00	8 711.36

表 4 不同方法的解算结果(算例 2)

Tab. 4 Calculation results of different methods(Example 2)

方法	数值收敛解/m			迭代次数 k
非线性最小二乘法	4 140.668 3	4 147.821 3	4 515.750 9	—
高斯牛顿法	—	不收敛	—	—
传统非线性正则化迭代法	4 361.555 3	4 365.632 1	143.262 2	145
本研究方法	4 361.555 3	4 365.632 1	143.262 2	35

表5 不同方法的解算结果(算例3)

Tab. 5 Calculation results of different methods(Example 3)

方法	数值收敛解/m			迭代次数 k
非线性最小二乘法	2 438 952.059 2	492 022.912 3	2 544.262 5	—
高斯牛顿法	—	不收敛	—	—
传统非线性正则化迭代法	2 438 949.021 9	492 011.361 4	2 142.926 3	512
本研究方法	2 438 949.021 9	492 011.361 4	2 142.926 3	45

由表5可知,非线性最小二乘法得到的收敛解误差较大,解算结果不可信,尤其是 Z 方向上的解与真值的偏差最大,证明 Z 方向上的病态性最强;高斯牛顿法这类普通的数值迭代法易受到初值的约束和方程病态性的影响,解无法收敛,不适用于处理病态问题。与传统非线性正则化迭代法相比,本研究方法性能更优。因此,对于水下定位存在的已知点和未知点近似共面的情况,该方法也能表现出良好的性能,适用于实际问题。

图4给出了传统非线性正则化迭代法和本研究方法的点位迭代序列。从图中可以明显地看出,该方法开始收敛的早,稳定性较好,没有较大的扰动,并且大大提高了传统非线性正则化迭代法的收敛效率,表明本方法在水下定位的实际应用中能够发挥良好的性能。

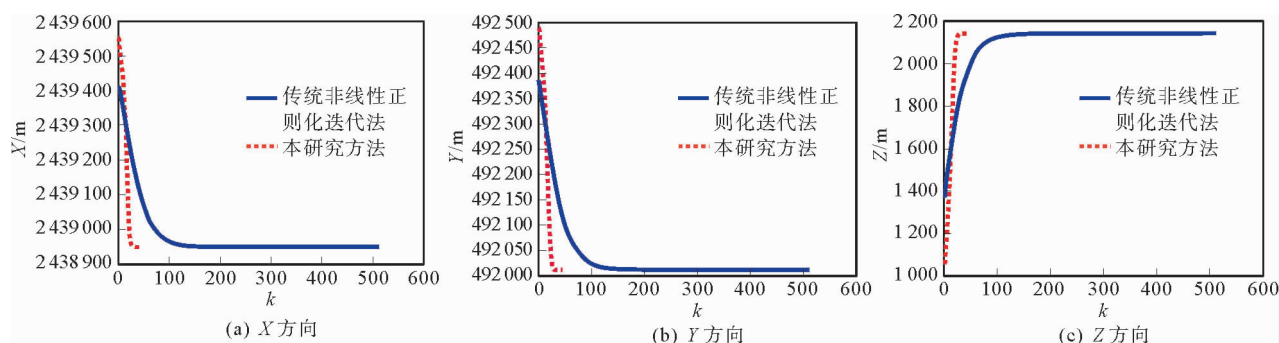


图4 2种方法的点位迭代序列图(算例3)

Fig. 4 Point iteration sequence diagrams of the two methods(Example 3)

4 结束语

在大地测量中,非线性正则化数值迭代法被广泛地应用于病态测距定位方程的解算中。然而,在测距定位中,常出现已知点和未知点近似共面的情况,此时方程线性化后的设计矩阵具有病态性,通过条件数法和特征分析法可以判断病态主要集中于 Z 方向。本研究提出一种改进的非线性正则化数值迭代法,将正则化约束仅作用于病态方向,来提高非线性收敛效率,增强解的稳定性。实验结果表明,本研究方法能够降低病态性对解的影响,提高传统非线性正则化迭代法的收敛效率,具有更好的局部收敛性质。

参考文献:

- [1]孙振,曲国庆,苏晓庆,等.测距定位方程参数估计的 Frozen-Barycentre 算法[J].武汉大学学报(信息科学版),2020,45(9): 1478-1484.
SUN Zhen,QU Guoqing,SU Xiaoqing,et al.Frozen-Barycentre algorithm for solving distance equations[J].Geomatics and Information Science of Wuhan University,2020,45(9):1478-1484.
- [2]王新洲.非线性模型参数估计的直接解法[J].武汉测绘科技大学学报,1999,24(1):64-67.
WANG Xinzhou.A direct solution method of parameter estimation of nonlinear model[J].Journal of Wuhan Technical University of Surveying and Mapping,1999,24(1):64-67.
- [3]刘国林,郑文华.非线性平差模型强度的加权曲率度量[J].山东矿业学院学报,1998,17(3):40-44.
LIU Guolin,ZHENG Wenhua.The weighted curvature measures of the nonlinear adjustment model intensity[J].Journal of

- Shandong Mining Institute, 1998, 17(3): 40-44.
- [4] SONG W, WANG Y, LI H, et al. Locating multiple optimal solutions of nonlinear equation systems based on multi-objective optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2015, 19(3): 414-431.
- [5] POURJAFARI E, MOJALLALI H. Solving nonlinear equations systems with a new approach based on invasive weed optimization algorithm and clustering[J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2012, 4: 33-43.
- [6] 郭秋英, 赵吉涛, 刘庆新. 初始种群范围及运行参数对遗传算法解算 GPS 病态方程的影响[J]. 山东科技大学学报(自然科学版), 2010, 29(6): 14-18.
- GUO Qiuying, ZHAO Jitao, LIU Qingxin. Study of effects of initial population range and running parameters on GPS ill-conditioned equations solved with genetic algorithm[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science), 2010, 29(6): 14-18.
- [7] 刘国林, 韩晓东. 一种顾及二次项的非线性条件平差法[J]. 勘察科学技术, 1997(6): 46-51.
- LIU Guolin, HAN Xiaodong. A non-linear conditional adjustment method considering second order terms[J]. Site Investigation Science and Technology, 1997(6): 46-51.
- [8] 齐珂, 曲国庆, 薛树强, 等. 测距定位方程的多解性及其非线性最小二乘迭代算法[J]. 测绘通报, 2018(8): 37-40.
- QI Ke, QU Guoqing, XUE Shuqiang, et al. Multiple solutions of distance equations and nonlinear least squares iterative algorithms[J]. Bulletin of Surveying and Mapping, 2018(8): 37-40.
- [9] 杨文龙, 薛树强, 曲国庆, 等. 测距定位方程的多解性及粒子群搜索算法[J]. 导航定位学报, 2020, 8(3): 121-126.
- YANG Wenlong, XUE Shuqiang, QU Guoqing, et al. Multiple solutions of distance equations and particle swarm optimization algorithm[J]. Journal of Navigation and Positioning, 2020, 8(3): 121-126.
- [10] 唐利民. 非线性最小二乘的不适定性及算法研究[D]. 长沙: 中南大学, 2011.
- TANG Limin. Research on the ill-posed and solving methods of nonlinear least squares problem[D]. Changsha: Central South University, 2011.
- [11] XUE S, YANG Y, DANG Y. A closed-form of Newton method for solving over-determined pseudo-distance equations[J]. Journal of Geodesy, 2014, 88(5): 441-448.
- [12] XUE S Q, YANG Y X, DANG Y M. Barycentre method for solving distance equations[J]. Survey Review, 2016, 48(348): 188-194.
- [13] 薛树强. 大地测量观测优化理论与方法研究[D]. 西安: 长安大学, 2018.
- XUE Shuqiang. Research on geodetic observation optimization theory and methods[D]. Xi'an: Chang'an University, 2018.
- [14] 孙振, 曲国庆, 苏晓庆, 等. 测距定位模型参数估计的 Landweber 迭代法[J]. 测绘科学, 2019, 44(4): 15-19.
- SUN Zhen, QU Guoqing, SU Xiaoqing, et al. Location equations of nonlinear adjustment Landweber iteration method[J]. Science of Surveying and Mapping, 2019, 44(4): 15-19.
- [15] 曲国庆, 孙振, 苏晓庆, 等. 非线性参数估计的自适应松弛正则化算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2019, 44(10): 1491-1497.
- QU Guoqing, SUN Zhen, SU Xiaoqing, et al. Adaptive relaxation regularization algorithm for nonlinear parameter estimation[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2019, 44(10): 1491-1497.
- [16] 薛树强, 杨元喜, 党亚民. 测距定位方程非线性平差的封闭牛顿迭代公式[J]. 测绘学报, 2014, 43(8): 771-777.
- XUE Shuqiang, YANG Yuanxi, DANG Yamin. A closed-form of Newton iterative formula for nonlinear adjustment of distance equations[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2014, 43(8): 771-777.
- [17] TEUNISSEN P J G. A Gauss-Markov-like theorem for integer GNSS ambiguities[J]. Artificial Satellites, 2002(37): 121-127.
- [18] 王振杰. 大地测量中不适定问题的正则化解法研究[D]. 武汉: 中国科学院测量与地球物理研究所, 2003.
- WANG Zhenjie. Research on the regularization solutions of ill-posed problems in geodesy[D]. Wuhan: Institute of Geodesy and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, 2003.
- [19] 倪云峰, 石小红. RSSI 的室内人员卡尔曼滤波定位算法[J]. 西安科技大学学报, 2020, 40(1): 167-172.
- NI Yunfeng, SHI Xiaohong. Indoor staff Kalman filter location algorithm based on RSSI[J]. Journal of Xi'an University of Science and Technology, 2020, 40(1): 167-172.