

随机时滞马尔可夫跳跃系统的有限时间 H_∞ 控制

刘西奎^{1,2}, 刘文成¹, 李 艳², 庄继晶¹

(1. 山东科技大学 数学与系统科学学院, 山东 青岛 266590; 2. 山东科技大学 电气信息系, 山东 济南 250031)

摘要: 研究了一类具有时滞和外部扰动的线性随机马尔可夫跳跃系统的有限时间 H_∞ 控制问题, 由通用控制器实现系统有限时间 H_∞ 有界。首先, 构造 Lyapunov 函数并结合线性矩阵不等式理论, 给出随机系统有限时间 H_∞ 有界的充分条件; 然后, 设计一种部分依赖时滞的通用控制器, 使得闭环系统有限时间 H_∞ 有界; 最后, 通过一个数值算例验证所提方法的有效性。

关键词: 时滞; 马尔可夫跳跃; 通用控制器; 有限时间 H_∞ 有界

中图分类号: O231.3

文献标志码: A

Finite-time H_∞ control of stochastic time-delay Markovian jump systems

LIU Xikui^{1,2}, LIU Wencheng¹, LI Yan², ZHUANG Jijing¹

(1. College of Mathematics and Systems Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China;

2. Department of Electrical Engineering and Information Technology, Shandong University of Science and Technology, Jinan, Shandong 250031, China)

Abstract: This paper deals with the finite-time H_∞ control problem for linear stochastic Markovian jump systems with time-delay and external disturbance, where the finite-time H_∞ boundedness is realized by a general controller. Firstly, a sufficient condition was proposed for the finite-time H_∞ boundedness by constructing a Lyapunov function and combining linear matrix inequality theory. Secondly, a kind of partially delay-dependent controller was developed to guarantee the finite-time H_∞ boundedness of the closed-loop systems. Finally, the effectiveness of the proposed methods was demonstrated through a numerical example.

Key words: time-delay; Markovian jump; general controller; finite-time H_∞ boundedness

众所周知, 马尔可夫跳跃系统是由多个模态或子系统组成的切换系统, 系统在各个子系统间的切换服从一定的概率分布。该系统适合描述突变现象, 如零部件故障、子系统之间关联改变以及突发性环境扰动等, 被广泛应用到电力系统、制造系统、通讯系统等工程领域。近年来, 关于马尔可夫跳跃系统的研究取得了丰富的成果。文献[1]分别讨论了连续和离散时间马尔可夫跳跃系统的稳定性和镇定问题。文献[2]使用量化方法研究了一类具有时变转移概率的奇异马尔可夫跳跃系统的镇定问题。文献[3]针对离散时间马尔可夫跳变系统, 结合有限时间理论, 给出了有限频段和有限时间两种尺度的 H_∞ 滤波器设计方法。文献[4]研究了马尔可夫跳跃系统的不定平均场随机线性二次最优控制, 通过定义一种广义黎卡提差分方程, 得到最优控制的一般形式。文献[5-6]分别研究了离散时间和连续时间随机马尔可夫跳跃系统的 H_2 指数问题, 并用于

收稿日期: 2021-06-16

基金项目: 国家自然科学基金项目(61972236); 山东省自然科学基金项目(ZR2018MF013)

作者简介: 刘西奎(1973—), 男, 山东泰安人, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为随机鲁棒控制, E-mail: liuxikuiqd@163.com
李 艳(1975—), 女, 山东泰安人, 副教授, 硕士生导师, 主要研究方向为随机鲁棒控制, 本文通信作者。

E-mail: liyanhd@163.com

故障检测滤波器设计。

在许多工业系统中,如飞行器的姿态控制、机械臂跟踪控制等,人们只关注系统在有限时间内的特性,即暂态性能。具体来说,当系统的初始状态在某一范围内时,系统的状态在固定的时间间隔内不超过某一预先给定的界限。Kamenkov^[7]首次提出了有限时间稳定性的定义。Dorato^[8]提出了短时间稳定的概念,并且讨论了状态变量在固定的有限时间间隔内不超过特定的范围。Weiss等^[9]研究了当干扰存在时的有限时间稳定性,即有限时间有界问题。Amato等^[10-11]在有限时间稳定方面取得一些重要结果,但没考虑随机因素对系统的影响。事实上,动力系统中普遍存在着随机干扰。因此,随机系统的有限时间稳定问题^[12-14]得到广泛关注。文献[13]研究了 Ito 型随机马尔可夫跳跃系统的有限时间稳定/镇定问题。文献[14]考虑线性随机马尔可夫跳跃系统的有限时间镇定问题,通过设计一种部分依赖时滞的通用控制器,保证闭环系统有限时间稳定。严志国等^[15]将有限时间稳定与 H_∞ 控制问题相结合,既考虑系统的暂态性能又考虑系统对干扰的抑制,解决了线性随机系统有限时间 H_∞ 控制问题。文献[16]研究了线性随机马尔可夫跳跃系统的有限时间 H_2/H_∞ 控制问题。由于信号传输速度的有限性,时滞广泛存在于工业系统中,是导致系统不稳定和性能不佳的主要根源。近年来,时滞系统的有限时间控制研究取得了丰富的成果^[17-20]。文献[17]解决了时滞马尔可夫跳跃系统的有限时间稳定和镇定问题。文献[18-19]分别研究了时滞离散时间系统的状态反馈和基于观测器的输出反馈有限时间 H_∞ 控制问题。文献[20]通过设计状态反馈控制器,使得时滞马尔可夫系统有限时间 H_∞ 有界。尽管对时滞马尔可夫跳跃系统的研究取得了很多成果,但目前还没有文献研究 Ito 型时滞马尔可夫跳跃系统在通用控制器下的有限时间 H_∞ 控制问题。

本研究通过设计一种部分依赖时滞的通用控制器,使得 Ito 型时滞马尔可夫跳跃系统有限时间稳定并满足给定的 H_∞ 扰动衰减指标。所设计的控制器既包含非时滞状态又包含时滞状态,两者依概率分布异步发生。与传统的状态反馈控制器^[20-21]相比,设计的控制器具有通用性强、保守性小的优点。本研究主要贡献是:利用线性矩阵不等式方法,给出 Ito 型时滞马尔可夫跳跃系统有限时间有界的充分条件;设计一种部分依赖时滞的控制器,使得闭环系统有限时间 H_∞ 有界。该控制器同时含有异步发生的时滞状态和非时滞状态,与传统的状态反馈和时滞状态反馈控制器相比,具有一般性和较小的保守性。

符号表示: $\mathbf{E}[\cdot]$ 是 $[\cdot]$ 的数学期望;矩阵 $\mathbf{M} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\mathbf{M} > 0$ ($\mathbf{M} \geq 0$)表示 \mathbf{M} 是正定(半正定)矩阵; $\lambda_{\max}(\mathbf{M})$ 与 $\lambda_{\min}(\mathbf{M})$ 分别表示矩阵 \mathbf{M} 的最大特征值和最小特征值; $(\mathbf{M})^\star \triangleq \mathbf{M} + \mathbf{M}^T$ 。

1 定义和问题描述

考虑如下时滞随机马尔可夫跳跃系统:

$$\begin{cases} d\mathbf{x}(t) = [\mathbf{A}(\theta_t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_\tau(\theta_t)\mathbf{x}(t-\tau) + \mathbf{B}(\theta_t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}(\theta_t)\mathbf{v}(t)]dt + \\ \quad [\mathbf{C}(\theta_t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}_\tau(\theta_t)\mathbf{x}(t-\tau) + \mathbf{D}(\theta_t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}(\theta_t)\mathbf{v}(t)]d\omega(t); \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{H}(\theta_t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{H}_\tau(\theta_t)\mathbf{x}(t-\tau) + \mathbf{D}_1(\theta_t)\mathbf{v}(t), \forall t \in [0, \tilde{T}]; \\ \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t), \theta_t = \theta_0, \forall t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 是系统状态, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ 是控制输入, $\mathbf{z}(t) \in \mathbf{R}^q$ 是控制输出;时滞 τ 满足 $\tau \geq 0$; $\boldsymbol{\phi}(t)$ 是定义在 $[-\tau, 0]$ 的连续函数; $\omega(t)$ 是定义在概率空间 (Ω, \mathcal{F}, P) 上的一维Wiener过程,满足 $\mathbf{E}[d\omega(t)] = 0$, $\mathbf{E}[d^2\omega(t)] = dt$ 。 $\omega(t)$ 与 $\{\theta_t, t \geq 0\}$ 相互独立。随机过程 $\{\theta_t, t \geq 0\}$ 是一个右连续的马尔可夫链,在集合 $S = \{1, 2, \dots, N\}$ 中取值,其转移概率矩阵为 $\boldsymbol{\Pi} = [\pi_{ij}]_{N \times N}$, π_{ij} 是由状态 i 到状态 j 的转移率,满足转移概率

$$\Pr(\theta_{t+\Delta t} = j | \theta_t = i) = \begin{cases} \pi_{ij}\Delta t + o(\Delta t), i \neq j; \\ 1 + \pi_{ii}\Delta t + o(\Delta t), i = j. \end{cases}$$

式中: $\pi_{ij} \geq 0$;当 $i \neq j$ 时, $\pi_{ii} = -\sum_{j \neq i} \pi_{ij}$; $\Delta t > 0, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ 。

外部扰动 $\mathbf{v}(t)$ 满足

$$\int_0^T \mathbf{v}^T(s) \mathbf{v}(s) ds < d^2. \quad (2)$$

为简单起见,当 $\theta_t = i$ 时,适当维数的常数矩阵 $\mathbf{A}(\theta_t), \mathbf{A}_\tau(\theta_t), \mathbf{B}(\theta_t), \mathbf{C}(\theta_t), \mathbf{C}_\tau(\theta_t), \mathbf{D}(\theta_t), \mathbf{G}(\theta_t), \mathbf{F}(\theta_t), \mathbf{H}(\theta_t), \mathbf{H}_\tau(\theta_t)$ 和 $\mathbf{D}_1(\theta_t)$ 分别记作 $\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_{\tau i}, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i, \mathbf{C}_{\tau i}, \mathbf{D}_i, \mathbf{G}_i, \mathbf{F}_i, \mathbf{H}_i, \mathbf{H}_{\tau i}$ 和 \mathbf{D}_{1i} 。

定义 1^[15] 对于系统(1) ($\mathbf{u}(t)=0$), 给定常数 $c_1 > 0, c_2 > 0, \tilde{T} > 0, d > 0$ 和矩阵 $\mathbf{R}_i > 0$, 如果

$$\mathbf{E}[\mathbf{x}^T(t_1) \mathbf{R}_i \mathbf{x}(t_1)] \leq c_1 \Rightarrow \mathbf{E}[\mathbf{x}^T(t_2) \mathbf{R}_i \mathbf{x}(t_2)] < c_2, t_1 \in [-\tau, 0], t_2 \in [0, \tilde{T}], \quad (3)$$

并且 $\mathbf{v}(t)$ 满足式(2), 则称系统(1)关于 $\Gamma_i = (c_1, c_2, \tilde{T}, \mathbf{R}_i, d)$ 有限时间有界。

注 1 对于系统(1) ($\mathbf{u}(t)=0, \mathbf{v}(t)=0$), 如果式(3)成立, 则称系统(1)关于 $\hat{\Gamma}_i = (c_1, c_2, \tilde{T}, \mathbf{R}_i)$ 有限时间稳定。

定义 2^[15] 如果系统(1)关于 $\Gamma_i = (c_1, c_2, \tilde{T}, \mathbf{R}_i, d)$ 有限时间有界, 并且在零初始条件下对任意 $\mathbf{v}(t) \neq 0$ 满足式(2)和以下不等式

$$\mathbf{E}\left[\int_0^T \mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}(t) dt\right] < \gamma^2 \mathbf{E}\left[\int_0^T \mathbf{v}^T(t) \mathbf{v}(t) dt\right],$$

则称系统(1)关于 $\tilde{\Gamma}_i = (c_1, c_2, \tilde{T}, \mathbf{R}_i, d, \gamma)$ 有限时间 H_∞ 有界。

引理 1 (Gronwall 不等式)^[22] 设 $f(t)$ 是一个非负函数, 如果存在非负常数 p 和 q , 满足

$$f(t) \leq p + q \int_0^t f(s) ds, 0 \leq t \leq \tilde{T},$$

则

$$f(t) \leq p e^{qt}, 0 \leq t \leq \tilde{T}.$$

引理 2 (舒尔补引理)^[23] 对于实矩阵 \mathbf{H} , 实对称矩阵 \mathbf{S} , 正定矩阵 \mathbf{U} , 下列不等式等价:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} + \mathbf{H}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{H}^T &< 0, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^T & -\mathbf{U} \end{bmatrix} &< 0. \end{aligned}$$

2 有限时间有界性分析

本节讨论 $\mathbf{u}(t)=0$ 时, 系统(1)的有限时间有界性。通过线性矩阵不等式方法, 给出系统(1)有限时间有界的充分条件。

定理 1 对于正常数 η , 如果存在正常数 $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}$, 正定矩阵 $\mathbf{P}_i, \mathbf{O}_i, \mathbf{Q}$, 满足

$$\begin{bmatrix} \Psi_{i1} & \mathbf{P}_i \mathbf{A}_{\tau i} & \mathbf{P}_i \mathbf{G}_i & \mathbf{C}_i^T \\ \mathbf{A}_{\tau i}^T \mathbf{P}_i & -\mathbf{Q} & 0 & \mathbf{C}_{\tau i}^T \\ \mathbf{G}_i^T \mathbf{P}_i & 0 & -\mathbf{O}_i & \mathbf{F}_i^T \\ \mathbf{C}_i & \mathbf{C}_{\tau i} & \mathbf{F}_i & -\mathbf{P}_i^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{Q} < \mathbf{R}_i, \quad (5)$$

$$\lambda_{i1} \mathbf{I} < \bar{\mathbf{P}}_i < \lambda_{i2} \mathbf{I}, \quad (6)$$

$$c_1(\lambda_{i2} + \tau) + \lambda_{\max}(\mathbf{O}_i) d^2 < c_2 e^{-\eta \tilde{T}} \lambda_{i1}. \quad (7)$$

式中, $\Psi_{i1} = (\mathbf{P}_i \mathbf{A}_i)^\star + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} \mathbf{P}_j + \mathbf{Q} - \eta \mathbf{P}_i, \bar{\mathbf{P}}_i = \mathbf{R}_i^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}_i \mathbf{R}_i^{-\frac{1}{2}}, i \in S$ 。则系统(1) ($\mathbf{u}(t)=0$)关于 $\Gamma_i = (c_1, c_2, \tilde{T}, \mathbf{R}_i, d)$ 有限时间有界。

证明: 构造 Lyapunov 函数

$$V(\mathbf{x}_t, \theta_t) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}(\theta_t) \mathbf{x}(t) + \int_{t-\tau}^t \mathbf{x}^T(s) \mathbf{Q} \mathbf{x}(s) ds. \quad (8)$$

对于 $\theta_t = i \in S$, 令 \mathcal{L} 为随机过程 $\{\mathbf{x}_t, \theta_t\}$ 的无穷小算子, 则

$$\mathcal{L}V(\mathbf{x}_t, \theta_t = i) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{E}[V(\mathbf{x}_{t+\Delta t}, \theta_{t+\Delta t}) | \theta_t = i] - V(\mathbf{x}_t, \theta_t = i),$$

进而

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(\mathbf{x}_t, \theta_t = i) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} \{ \mathbf{E}[\mathbf{x}^T(t + \Delta t) \mathbf{P}(\theta_{t+\Delta t}) \mathbf{x}(t + \Delta t) + \int_{t-\tau+\Delta t}^{t+\Delta t} \mathbf{x}^T(s) \mathbf{Q} \mathbf{x}(s) ds] - \\ &\quad \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}_i \mathbf{x}(t) - \int_{t-\tau}^t \mathbf{x}^T(s) \mathbf{Q} \mathbf{x}(s) ds \} \\ &= \mathbf{x}^T(t) [(\mathbf{P}_i \mathbf{A}_i)^* + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} \mathbf{P}_j + \mathbf{Q}] \mathbf{x}(t) + 2 \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}_i \mathbf{A}_{\tau i} \mathbf{x}(t - \tau) + \\ &\quad 2 \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}_i \mathbf{G}_i \mathbf{v}(t) - \mathbf{x}^T(t - \tau) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{\Xi}^T \mathbf{P}_i \mathbf{\Xi}_0. \end{aligned} \quad (9)$$

式中 $\mathbf{\Xi} = \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{C}_{\tau i} \mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{F}_i \mathbf{v}(t)$ 。

由引理 2, 式(4) 等价于

$$\begin{bmatrix} \Psi_{i1} + \mathbf{C}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{C}_i & \mathbf{P}_i \mathbf{A}_{\tau i} + \mathbf{C}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{C}_{\tau i} & \mathbf{P}_i \mathbf{A}_{\tau i} + \mathbf{C}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{F}_i \\ \mathbf{A}_{\tau i}^T \mathbf{P}_i + \mathbf{C}_{\tau i}^T \mathbf{P}_i \mathbf{C}_i & -\mathbf{Q} + \mathbf{C}_{\tau i}^T \mathbf{P}_i \mathbf{C}_{\tau i} & \mathbf{C}_{\tau i}^T \mathbf{P}_i \mathbf{F}_i \\ \mathbf{G}_i^T \mathbf{P}_i + \mathbf{F}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{C}_i & \mathbf{F}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{C}_{\tau i} & -\mathbf{O}_i + \mathbf{F}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{F}_i \end{bmatrix} < 0,$$

左右两边分别乘以 $[\mathbf{x}^T(t) \quad \mathbf{x}^T(t - \tau) \quad \mathbf{v}^T(t)]^T$ 及其转置, 并对式(9), 得

$$\mathcal{L}V(\mathbf{x}_t, \theta_t = i) < \eta V_1(\mathbf{x}_t, \theta_t = i) + \mathbf{v}^T(t) \mathbf{O}_i \mathbf{v}(t), \forall t \in [0, \tilde{T}], \quad (10)$$

式中 $V_1(\mathbf{x}_t, \theta_t = i) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}_i \mathbf{x}(t)$ 。进一步,

$$\mathcal{L}V(\mathbf{x}_t, \theta_t = i) < \eta V(\mathbf{x}_t, \theta_t = i) + \lambda_{\max}(\mathbf{O}_i) \mathbf{v}^T(t) \mathbf{v}(t), \forall t \in [0, \tilde{T}]. \quad (11)$$

对式(11)两边从 0 到 $t (t \in [0, \tilde{T}])$ 积分并取数学期望, 得

$$\mathbf{E}[V(\mathbf{x}_t, \theta_t = i)] < \mathbf{E}[V(\mathbf{x}_0, \theta_0)] + \eta \mathbf{E}[\int_0^t V(\mathbf{x}_s, \theta_s = i) ds] + \lambda_{\max}(\mathbf{O}_i) \mathbf{E}[\int_0^t \mathbf{v}^T(s) \mathbf{v}(s) ds]. \quad (12)$$

应用引理 1, 得

$$\mathbf{E}[V(\mathbf{x}_t, \theta_t = i)] < \mathbf{E}[V(\mathbf{x}_0, \theta_0)] e^{\eta t} + \lambda_{\max}(\mathbf{O}_i) \mathbf{E}[\int_0^t \mathbf{v}^T(s) \mathbf{v}(s) ds] e^{\eta t}. \quad (13)$$

设 $\tilde{\lambda}_i = \min_{i \in S} \lambda_{\min}(\bar{\mathbf{P}}_i)$, $\hat{\lambda}_i = \max_{i \in S} \lambda_{\max}(\bar{\mathbf{P}}_i)$, 根据式(5)和(6), 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[V(\mathbf{x}_t, \theta_t = i)] &= \mathbf{E}[V_1(\mathbf{x}_t, \theta_t = i)] + \mathbf{E}[\int_{t-\tau}^t \mathbf{x}^T(s) \mathbf{Q} \mathbf{x}(s) ds] \\ &\geq \mathbf{E}[V_1(\mathbf{x}_t, \theta_t = i)] \geq \tilde{\lambda}_i \mathbf{E}[\mathbf{x}^T(t) \mathbf{R}_i \mathbf{x}(t)] \geq \lambda_{i1} \mathbf{E}[\mathbf{x}^T(t) \mathbf{R}_i \mathbf{x}(t)], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[V(\mathbf{x}_0, \theta_0)] e^{\eta t} &= \mathbf{E}[\mathbf{x}^T(0) \mathbf{R}_i^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}_i \mathbf{R}_i^{-\frac{1}{2}} \mathbf{x}(0)] e^{\eta t} + \mathbf{E}[\int_{-\tau}^0 \mathbf{x}^T(s) \mathbf{Q} \mathbf{x}(s) ds] e^{\eta t} \\ &\leq c_1 (\hat{\lambda}_i + \tau) e^{\eta \tilde{T}} \leq c_1 (\lambda_{i2} + \tau) e^{\eta \tilde{T}}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\lambda_{\max}(\mathbf{O}_i) \mathbf{E}[\int_0^t \mathbf{v}^T(s) \mathbf{v}(s) ds] e^{\eta t} < \lambda_{\max}(\mathbf{O}_i) d^2 e^{\eta \tilde{T}}. \quad (16)$$

结合式(13)~(16), 则

$$\mathbf{E}[\mathbf{x}^T(t) \mathbf{R}_i \mathbf{x}(t)] \leq e^{\eta \tilde{T}} \left[\frac{c_1 (\lambda_{i2} + \tau) + \lambda_{\max}(\mathbf{O}_i) d^2}{\lambda_{i1}} \right]. \quad (17)$$

又式(7)成立, 故对于 $\forall t \in [0, \tilde{T}]$, $\mathbf{E}[\mathbf{x}^T(t) \mathbf{R}_i \mathbf{x}(t)] < c_2$ 。由定义 1 知, 系统(1) ($\mathbf{u}(t) = 0$) 关于 $\Gamma_i = (c_1, c_2, \tilde{T}, \mathbf{R}_i, d)$ 有限时间有界。

注 2 当 $\mathbf{F}_i = 0, \mathbf{G}_i = 0$ 时, 定理 1 为系统(1)有限时间稳定的充分条件。从而, 定理 1 退化为文献[28]的定理 1。

3 通用控制器的设计

本节提出一种新型控制器

$$\mathbf{u}(t) = \alpha(t) \mathbf{K}(\theta_t) \mathbf{x}(t) + (1 - \alpha(t)) \mathbf{K}_\tau(\theta_t) \mathbf{x}(t - \tau), \quad (18)$$

式中: $\mathbf{K}(\theta_t)$ 和 $\mathbf{K}_\tau(\theta_t)$ 表示控制器增益, 随机变量 $\alpha(t)$ 是伯努利变量, 满足

$$\alpha(t) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x}(t) \text{ 是有效的;} \\ 0, & \mathbf{x}(t - \tau) \text{ 是有效的.} \end{cases}$$

$$\Pr\{\alpha(t) = 1\} = \alpha, \Pr\{\alpha(t) = 0\} = 1 - \alpha.$$

显然

$$\mathbf{E}[\alpha(t) - \alpha] = 0, \mathbf{E}[(\alpha(t) - \alpha)^2] = \alpha(1 - \alpha) = \beta^2.$$

将控制器(18)代入系统(1), 得

$$\begin{cases} d\mathbf{x}(t) = [\hat{\mathbf{A}}(\theta_t) \mathbf{x}(t) + \hat{\mathbf{A}}_\tau(\theta_t) \mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{G}(\theta_t) \mathbf{v}(t) + (\alpha(t) - \alpha) \mathbf{M}(\theta_t)] dt + \\ \quad [\hat{\mathbf{C}}(\theta_t) \mathbf{x}(t) + \hat{\mathbf{C}}_\tau(\theta_t) \mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{F}(\theta_t) \mathbf{v}(t) + (\alpha(t) - \alpha) \mathbf{N}(\theta_t)] d\omega(t); \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{H}(\theta_t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{H}_\tau(\theta_t) \mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{D}_1(\theta_t) \mathbf{v}(t), \quad \forall t \in [0, \tilde{T}]; \\ \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\phi}(t), \quad \theta_t = \theta_0, \quad \forall t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (19)$$

式中: $\hat{\mathbf{A}}(\theta_t) = \mathbf{A}(\theta_t) + \alpha \mathbf{B}(\theta_t) \mathbf{K}(\theta_t)$, $\hat{\mathbf{A}}_\tau(\theta_t) = \mathbf{A}_\tau(\theta_t) + (1 - \alpha) \mathbf{B}(\theta_t) \mathbf{K}_\tau(\theta_t)$, $\mathbf{M}(\theta_t) = \mathbf{B}(\theta_t) \mathbf{K}(\theta_t) \mathbf{x}(t) - \mathbf{B}(\theta_t) \mathbf{K}_\tau(\theta_t) \mathbf{x}(t - \tau)$, $\hat{\mathbf{C}}(\theta_t) = \mathbf{C}(\theta_t) + \alpha \mathbf{D}(\theta_t) \mathbf{K}(\theta_t)$, $\hat{\mathbf{C}}_\tau(\theta_t) = \mathbf{C}_\tau(\theta_t) + (1 - \alpha) \mathbf{D}(\theta_t) \mathbf{K}_\tau(\theta_t)$, $\mathbf{N}(\theta_t) = \mathbf{D}(\theta_t) \mathbf{K}(\theta_t) \mathbf{x}(t) - \mathbf{D}(\theta_t) \mathbf{K}_\tau(\theta_t) \mathbf{x}(t - \tau)$ 。

接下来, 在定理 1 的基础上, 给出闭环系统(19)有限时间 H_∞ 有界的充分条件。

定理 2 给定正常数 η , 如果存在正常数 $\gamma, \lambda_{i1}, \lambda_{i2}$, 矩阵 $\mathbf{X}_i > 0, \hat{\mathbf{Q}} > 0, \mathbf{Y}_i$ 及 $\mathbf{Y}_{\tau i}$, 使得如下不等式成立

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{i1} & \tilde{\Psi}_{i2} & \mathbf{G}_i \mathbf{X}_i & \mathbf{H}_i^T & \tilde{\Psi}_{i3} & \tilde{\Psi}_{i4} & \mathbf{X}_i & \boldsymbol{\Phi}_i \\ \tilde{\Psi}_{i2}^T & \tilde{\Psi}_{i5} & 0 & \mathbf{H}_{\tau i}^T & \tilde{\Psi}_{i6} & \tilde{\Psi}_{i7} & 0 & 0 \\ \mathbf{X}_i^T \mathbf{G}_i^T & 0 & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{D}_{1i} & \mathbf{F}_i^T & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{H}_i & \mathbf{H}_{\tau i} & \mathbf{D}_{1i}^T & -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\Psi}_{i3}^T & \tilde{\Psi}_{i6}^T & \mathbf{F}_i & 0 & -\mathbf{X}_i & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\Psi}_{i4}^T & \tilde{\Psi}_{i7}^T & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{X}_i & 0 & 0 \\ \mathbf{X}_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat{\mathbf{Q}} & 0 \\ \boldsymbol{\Phi}_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{\Lambda}_i \end{bmatrix} < 0, \quad (20)$$

$$\mathbf{R}_i^{-1} < \hat{\mathbf{Q}}, \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda_{i2} \mathbf{I} & \mathbf{R}_i^{-\frac{1}{2}} \\ \mathbf{R}_i^{-\frac{1}{2}} & -\mathbf{X}_i \end{bmatrix} < 0, \quad (22)$$

$$-2 \mathbf{R}_i^{-\frac{1}{2}} + \mathbf{X}_i + \lambda_{i1} \mathbf{I} < 0, \quad (23)$$

$$c_1(\lambda_{i2} + \tau) + \gamma^2 d^2 < c_2 e^{-\eta \tilde{T}} \lambda_{i1}. \quad (24)$$

式中: $\tilde{\Psi}_{i1} = (\mathbf{A}_i \mathbf{X}_i + \alpha \mathbf{B}_i \mathbf{Y}_i) \star + \pi_{ii} \mathbf{X}_i - \eta \mathbf{X}_i$, $\tilde{\Psi}_{i2} = \mathbf{A}_{\tau i} \mathbf{X}_i + (1 - \alpha) \mathbf{B}_i \mathbf{Y}_{\tau i}$, $\tilde{\Psi}_{i3} = \mathbf{X}_i \mathbf{C}_i^T + \alpha \mathbf{Y}_i^T \mathbf{D}_i^T$, $\tilde{\Psi}_{i4} = \beta \mathbf{Y}_i^T \mathbf{D}_i^T$, $\tilde{\Psi}_{i5} = -2 \mathbf{X}_i + \hat{\mathbf{Q}}$, $\tilde{\Psi}_{i6} = \mathbf{X}_i \mathbf{C}_{\tau i}^T + (1 - \alpha) \mathbf{Y}_{\tau i}^T \mathbf{D}_i^T$, $\tilde{\Psi}_{i7} = -\beta \mathbf{Y}_{\tau i}^T \mathbf{D}_i^T$, $\boldsymbol{\Lambda}_i = \text{diag}[\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{i-1}, \mathbf{X}_{i+1}, \dots, \mathbf{X}_N]$, $\boldsymbol{\Phi}_i = [\sqrt{\pi_{i1}} \mathbf{X}_i, \dots, \sqrt{\pi_{i(i-1)}} \mathbf{X}_i, \sqrt{\pi_{i(i+1)}} \mathbf{X}_i, \dots, \sqrt{\pi_{iN}} \mathbf{X}_i]$, 那么系统(19)关于 $\tilde{r}_i = (c_1, c_2, \tilde{T}, \mathbf{R}_i, d, \gamma)$ 有限时间 H_∞ 有界。同时, 控制器增益为 $\mathbf{K}_i = \mathbf{Y}_i \mathbf{X}_i^{-1}$, $\mathbf{K}_{\tau i} = \mathbf{Y}_{\tau i} \mathbf{X}_i^{-1}$ 。

证明: 对于闭环系统(19), 选择 Lyapunov 函数(8), 则

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(\mathbf{x}_t, \theta_t = i) &= \mathbf{E}[\mathbf{d}\mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}_i \mathbf{d}\mathbf{x}(t) + \mathbf{d}\mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}_i \mathbf{d}\mathbf{x}(t) + \\ &\quad \mathbf{d}\left(\int_{t-\tau}^t \mathbf{x}^T(s) \mathbf{Q} \mathbf{x}(s) ds\right)] + \mathbf{x}^T(t) \left[\sum_{j=1}^N \pi_{ij} \mathbf{P}_j\right] \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{E}[\mathbf{W}^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}(t)] + \mathbf{E}[\mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}_i \mathbf{W}] + \mathbf{E}[\mathbf{W}^T \mathbf{P}_i \mathbf{W}] + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) - \\
&\quad \mathbf{x}^T(t - \tau) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{x}^T(t) \left[\sum_{j=1}^N \pi_{ij} \mathbf{P}_j \right] \mathbf{x}(t) \\
&= [\hat{\mathbf{A}}(\theta_t) \mathbf{x}(t) + \hat{\mathbf{A}}_\tau(\theta_t) \mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{G}(\theta_t) \mathbf{v}(t)]^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}(t) + \\
&\quad \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}_i [\hat{\mathbf{A}}(\theta_t) \mathbf{x}(t) + \hat{\mathbf{A}}_\tau(\theta_t) \mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{G}(\theta_t) \mathbf{v}(t)] + \\
&\quad \tilde{\mathbf{E}}^T \mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{E}[(\alpha(t) - \alpha)^2] \mathbf{N}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{N}_i \mathbf{x}^T(t) \left[\sum_{j=1}^N \pi_{ij} \mathbf{P}_j \right] \mathbf{x}(t).
\end{aligned}$$

式中: $\mathbf{W} = [\hat{\mathbf{A}}(\theta_t) \mathbf{x}(t) + \hat{\mathbf{A}}_\tau(\theta_t) \mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{G}(\theta_t) \mathbf{v}(t) + (\alpha(t) - \alpha) \mathbf{M}(\theta_t)] dt +$
 $[\hat{\mathbf{C}}(\theta_t) \mathbf{x}(t) + \hat{\mathbf{C}}_\tau(\theta_t) \mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{F}(\theta_t) \mathbf{v}(t) + (\alpha(t) - \alpha) \mathbf{N}(\theta_t)] d\omega(t)$ 。

因为 $\mathbf{E}[\alpha(t) - \alpha] = 0$, $\mathbf{E}[(\alpha(t) - \alpha)^2] = \alpha(1 - \alpha) = \beta^2$, 所以

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}V(\mathbf{x}_t, \theta_t = i) &= \mathbf{x}^T(t) [(\mathbf{P}_i \hat{\mathbf{A}}_i)^* + \sum_{j=1}^N \pi_{ij} \mathbf{P}_j] \mathbf{x}(t) + 2 \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}_i \hat{\mathbf{A}}_{\tau i} \mathbf{x}(t - \tau) + \\
&2 \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}_i \mathbf{G}_i \mathbf{v}(t) + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^T(t - \tau) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t - \tau) + \beta^2 \mathbf{N}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{N}_i + \tilde{\mathbf{E}}^T \mathbf{P}_i \tilde{\mathbf{E}}, \quad (25)
\end{aligned}$$

式中 $\tilde{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{C}}_i \mathbf{x}(t) + \hat{\mathbf{C}}_{\tau i} \mathbf{x}(t - \tau) + \mathbf{F}_i \mathbf{v}(t)$ 。

令 $\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^{-1}$, 根据式(20)和不等式

$$-\mathbf{X}_i \mathbf{Q} \mathbf{X}_i \leq -2 \mathbf{X}_i + \hat{\mathbf{Q}}, \quad (26)$$

得

$$\begin{bmatrix}
\tilde{\Psi}_{i1} & \tilde{\Psi}_{i2} & \mathbf{G}_i \mathbf{X}_i & \mathbf{H}_i^T & \tilde{\Psi}_{i3} & \tilde{\Psi}_{i4} & \mathbf{X}_i & \Phi_i \\
\tilde{\Psi}_{i2}^T & \tilde{\Psi}_{i5} & 0 & \mathbf{H}_{\tau i}^T & \tilde{\Psi}_{i6} & \tilde{\Psi}_{i7} & 0 & 0 \\
\mathbf{X}_i^T \mathbf{G}_i^T & 0 & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{D}_{1i}^T & \mathbf{F}_i^T & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{H}_i & \mathbf{H}_{\tau i} & \mathbf{D}_{1i}^T & -\mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\tilde{\Psi}_{i3}^T & \tilde{\Psi}_{i6}^T & \mathbf{F}_i & 0 & -\mathbf{X}_i & 0 & 0 & 0 \\
\tilde{\Psi}_{i4}^T & \tilde{\Psi}_{i7}^T & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{X}_i & 0 & 0 \\
\mathbf{X}_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\hat{\mathbf{Q}} & 0 \\
\Phi_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{A}_i
\end{bmatrix} < 0, \quad (27)$$

式中 $\tilde{\Psi}_{i5} = -\mathbf{X}_i \mathbf{Q} \mathbf{X}_i$ 。

令 $\mathbf{X}_i = \mathbf{P}_i^{-1}$, $\mathbf{Y}_i = \mathbf{K}_i \mathbf{X}_i$, $\mathbf{Y}_{\tau i} = \mathbf{K}_{\tau i} \mathbf{X}_i$, 式(27)左右两边分别乘以对角矩阵 $\text{diag}\{\mathbf{X}_i^{-1}, \mathbf{X}_i^{-1}, \mathbf{I}, \mathbf{I}, \dots, \mathbf{I}\}$ 及其转置, 再结合引理2, 可以得到

$$\begin{bmatrix}
\Pi_{i1} & \Pi_{i2} & \Pi_{i3} \\
\Pi_{i2}^T & -\gamma^2 \mathbf{I} + \mathbf{F}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{F}_i & \mathbf{D}_{1i} \\
\Pi_{i3}^T & \mathbf{D}_{1i}^T & -\mathbf{I}
\end{bmatrix} < 0. \quad (28)$$

式中:

$$\Pi_{i1} = \begin{bmatrix} \hat{\Omega}_{i1} & \hat{\Omega}_{i2} \\ \hat{\Omega}_{i2}^T & \hat{\Omega}_{i3} \end{bmatrix}, \hat{\Omega}_{i1} = (\mathbf{P}_i \mathbf{A}_i + \alpha \mathbf{P}_i \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i)^* + (\mathbf{C}_i + \alpha \mathbf{D}_i \mathbf{K}_i)^T \mathbf{P}_i (\mathbf{C}_i + \alpha \mathbf{D}_i \mathbf{K}_i) + \beta^2 (\mathbf{D}_i \mathbf{K}_i)^T \mathbf{P}_i (\mathbf{D}_i \mathbf{K}_i) +$$

$$\sum_{j=1}^N \pi_{ij} \mathbf{P}_j + \mathbf{Q} - \gamma \mathbf{P}_i, \hat{\Omega}_{i2} = \mathbf{P}_i \mathbf{A}_{\tau i} + \mathbf{P}_i (\mathbf{B}_i \mathbf{K}_{\tau i}) + \beta^2 (\mathbf{D}_i \mathbf{K}_i)^T \mathbf{P}_i (\mathbf{D}_i \mathbf{K}_{\tau i}) + (\mathbf{C}_i + \alpha \mathbf{D}_i \mathbf{K}_i)^T \mathbf{P}_i (\mathbf{C}_{\tau i} + (1 - \alpha) \mathbf{D}_i \mathbf{K}_{\tau i}),$$

$$\hat{\Omega}_{i3} = -\mathbf{Q} + \beta^2 (\mathbf{D}_i \mathbf{K}_{\tau i})^T \mathbf{P}_i (\mathbf{D}_i \mathbf{K}_{\tau i}) + (\mathbf{C}_{\tau i} + \alpha \mathbf{D}_i \mathbf{K}_{\tau i})^T \mathbf{P}_i (\mathbf{C}_{\tau i} + (1 - \alpha) \mathbf{D}_i \mathbf{K}_{\tau i}),$$

$$\Pi_{i2} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_i \mathbf{G}_i + (\mathbf{C}_i + \alpha \mathbf{D}_i \mathbf{K}_i)^T \mathbf{P}_i \mathbf{F}_i \\ (\mathbf{C}_{\tau i} + (1 - \alpha) \mathbf{D}_i \mathbf{K}_{\tau i})^T \mathbf{P}_i \mathbf{F}_i \end{bmatrix}, \Pi_{i3} = [\mathbf{H}_i \quad \mathbf{H}_{\tau i}]^T.$$

对式(28)两边分别乘以矩阵 $[\mathbf{x}^T(t) \quad \mathbf{x}^T(t - \tau) \quad \mathbf{v}^T(t) \quad \mathbf{z}^T(t)]^T$ 及其转置, 并与式(25)对比, 得

$$\mathcal{L}V(\mathbf{x}_t, \theta_t = i) < \eta V(\mathbf{x}_t, \theta_t = i) + \gamma^2 \mathbf{v}^T(t) \mathbf{v}(t) - \mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}(t), \forall t \in [0, \tilde{T}]. \quad (29)$$

在零初始条件下,对式(29)两边积分并取数学期望,得

$$\mathbf{E}[V(\mathbf{x}_t, \theta_t = i)] < \eta \mathbf{E}\left[\int_0^T V(\mathbf{x}_s, \theta_s = i) ds\right] + \gamma^2 \mathbf{E}\left[\int_0^T \mathbf{v}^T(s) \mathbf{v}(s) ds\right] - \mathbf{E}\left[\int_0^T \mathbf{z}^T(s) \mathbf{z}(s) ds\right]. \quad (30)$$

根据引理 1,有

$$\mathbf{E}[V(\mathbf{x}_t, \theta_t = i)] < e^{\eta \tilde{T}} \{\gamma^2 \mathbf{E}\left[\int_0^{\tilde{T}} \mathbf{v}^T(t) \mathbf{v}(t) dt\right] - \mathbf{E}\left[\int_0^{\tilde{T}} \mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}(t) dt\right]\}. \quad (31)$$

从而

$$\mathbf{E}\left[\int_0^{\tilde{T}} \mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}(t) dt\right] < \gamma^2 \mathbf{E}\left[\int_0^{\tilde{T}} \mathbf{v}^T(t) \mathbf{v}(t) dt\right].$$

由式(29),进一步得

$$\mathcal{L}V(\mathbf{x}_t, \theta_t = i) < \eta V(\mathbf{x}_t, \theta_t = i) + \gamma^2 \mathbf{v}^T(t) \mathbf{v}(t). \quad (32)$$

因为 $\mathbf{R}_i > 0$ 且 $\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^{-1}$, 则由式(21)可以得式(5)成立。显然,式(6)等价于 $\bar{\mathbf{P}}_i < \lambda_{i2} \mathbf{I}$ 且 $\bar{\mathbf{P}}_i > \lambda_{i1} \mathbf{I}$, 即

$$-\lambda_{i2} \mathbf{I} + \mathbf{R}_i^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}_i \mathbf{R}_i^{-\frac{1}{2}} < 0, \quad (33)$$

且

$$\lambda_{i1} \mathbf{I} - \mathbf{R}_i^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}_i \mathbf{R}_i^{-\frac{1}{2}} < 0. \quad (34)$$

由引理 2, 可知式(22)和(33)等价。通过式(23)和(26), 可以得式(34), 即式(22)和(23)等价于式(6)。令定理 1 中的 $\mathbf{O}_i = -\gamma^2 \mathbf{I}$, 则式(11)与(32)等价, 式(7)与(24)等价。其余证明与式(12)~(17)证明相同, 在此省略。

注 3 当 $\alpha(t) = 1$ 和 0 时, 控制器(18)分别为状态反馈控制器 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}(\theta_t) \mathbf{x}(t)$ 和时滞状态反馈控制器 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_\tau(\theta_t) \mathbf{x}(t - \tau)$ 。与文献[17-20]中的状态反馈控制器和文献[21]中的时滞反馈控制器对比, 控制器(18)更具有一般性, 可以用于网络控制系统、单接点机械手臂等实际系统。

4 数值算例

为验证前述定理的有效性, 考虑具有两个模态的随机时滞马尔可夫跳跃系统(1), 其参数如下。

模态 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} -4.1 & 0.5 \\ 1.0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{\tau 1} = \begin{bmatrix} -1.9 & 1.1 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0.61 & 0.15 \\ 0.18 & 0.16 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{\tau 1} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G}_1 &= \begin{bmatrix} 0.1 & -1.3 \\ 0.2 & -0.7 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.7 \\ 1.9 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 2.1 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H}_1 &= \begin{bmatrix} -0.4 & 0.1 \\ 0.8 & 0.1 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_{\tau 1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & -0.3 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{11} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.6 \\ 0.3 & -0.1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

模态 2:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} -4.0 & 1.0 \\ 1.1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{\tau 2} = \begin{bmatrix} -1.0 & 1.1 \\ 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{\tau 2} = \begin{bmatrix} -0.2 & -1.0 \\ 0.5 & -1.0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G}_2 &= \begin{bmatrix} 0.2 & -1.0 \\ 0.5 & -1.0 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & -1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H}_2 &= \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0.8 & 0.1 \end{bmatrix}, \mathbf{H}_{\tau 2} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.5 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

转移概率矩阵为:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix},$$

参数 $\tilde{T}=1$, $c_1=0.5$, $\tau=1$, $\alpha=0.6$, $d=1$, $\mathbf{x}_0=[0.1 \ -0.05]^\top$ 。

由定理 2 可得 η 的可行域为 $[0, 18.99]$, 图 1 和图 2 分别是 η 与 c_2 和 γ 的关系曲线图。

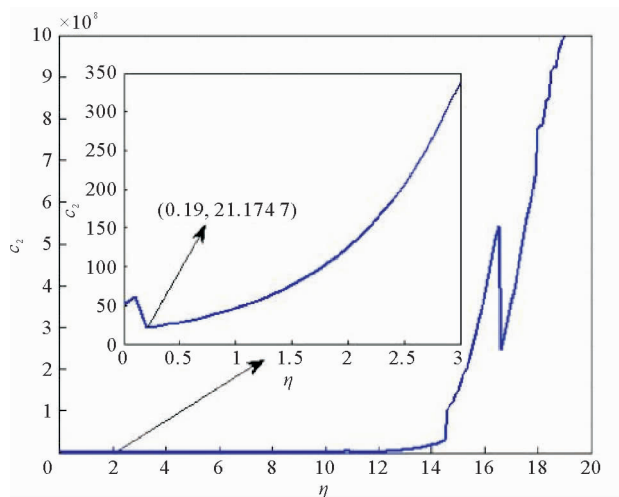


图 1 $\eta \in [0, 20]$ 时, c_2 的变化

Fig. 1 The change of c_2 when $\eta \in [0, 20]$

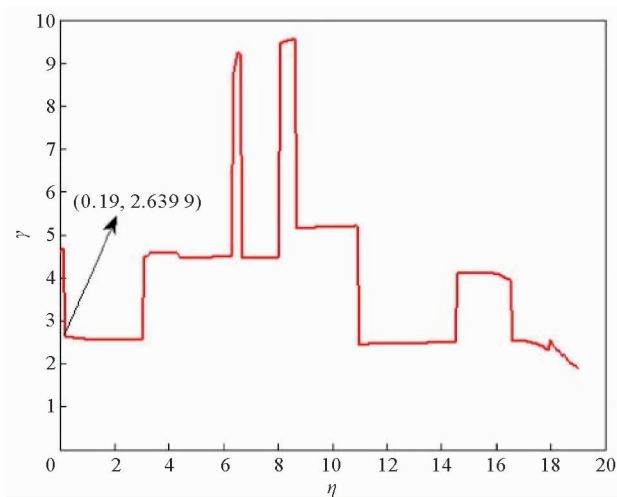


图 2 $\eta \in [0, 20]$ 时, γ 的变化

Fig. 2 The change of γ when $\eta \in [0, 20]$

从图 1 和图 2 可以看出, 当 $\eta=0.19$ 时, c_2 取得最小值 21.174 7, 对应的 $\gamma=2.639\ 9$ 。

当外部扰动 $\mathbf{v}(t) = \frac{0.1}{1+t^2}$ 时, 选择 $\eta=0.19$, 由定理 2 可得控制器(18)的增益为:

$$\mathbf{K}_1 = [-1.464\ 9 \quad -1.065\ 5], \mathbf{K}_{\tau_1} = [0.226\ 0 \quad -0.272\ 8],$$

$$\mathbf{K}_2 = [-0.835\ 7 \quad -1.384\ 2], \mathbf{K}_{\tau_2} = [0.084\ 7 \quad -0.460\ 6].$$

这表明在控制器(18)的作用下, 当 $\mathbf{E}[\mathbf{x}^\top(t_1)\mathbf{R}\mathbf{x}(t_1)] \leq 0.5$, $t_1 \in [-1, 0]$ 时, 闭环系统(19)满足 $\mathbf{E}[\mathbf{x}^\top(t)\mathbf{R}\mathbf{x}(t)] < 21.174\ 7, t \in [0, 1]$ 。同时, $\mathbf{E}\left[\int_0^T \mathbf{z}^\top(t)\mathbf{z}(t)dt\right] < 2.639\ 9^2 \mathbf{E}\left[\int_0^T \mathbf{v}^\top(t)\mathbf{v}(t)dt\right]$ 。

图 3 为闭环系统(19)的状态响应曲线, 表明闭环系统(19)有限时间稳定, 其中两个内嵌图分别是马尔可夫跳变的模态变化图和 $\alpha=0.6$ 时伯努利变量 $\alpha(t)$ 的图形。图 4 为 $\mathbf{E}[\mathbf{x}^\top(t)\mathbf{R}\mathbf{x}(t)]$ 的演化, 表明闭环系统(19)关于 $\tilde{T}_i = (c_1, c_2, \tilde{T}, \mathbf{R}_i, d, \gamma)$, $i=1, 2$, 有限时间 H_∞ 有界。

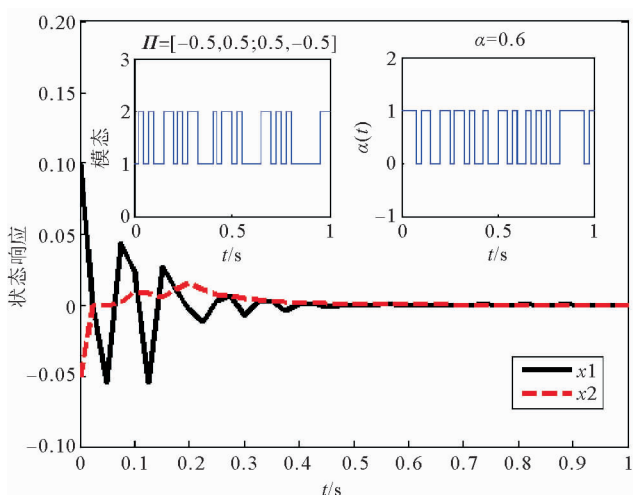


图 3 状态 $\mathbf{x}(t)$ 的响应曲线

Fig. 3 The response curves of state $\mathbf{x}(t)$

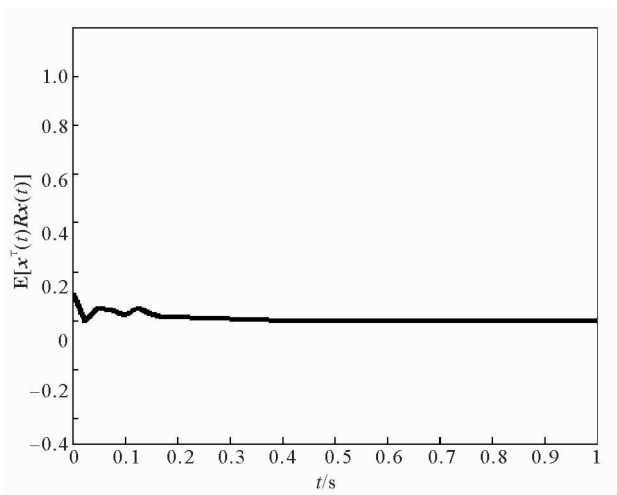


图 4 $\mathbf{E}[\mathbf{x}^\top(t)\mathbf{R}\mathbf{x}(t)]$ 的演化

Fig. 4 The evolution of $\mathbf{E}[\mathbf{x}^\top(t)\mathbf{R}\mathbf{x}(t)]$

图 5 表示 c_2 和 α 的关系,其中小图是 α 分别在闭区间 $[0.5, 1]$ 和 $[0.9, 1]$ 取值时 c_2 的曲线图。当 $\alpha(t)$ 的数学期望 $\alpha = 0.98$ 时, c_2 取最小值。即 $\alpha = 0.98$ 时,控制器(18)的保守性最小。与文献[20]的状态反馈控制器(对应 $\alpha = 1$)相比,控制器(18)保守性更小。

5 结论

本研究讨论了 Ito 型时滞马尔可夫跳跃系统的有限时间有界和有限时间 H_∞ 控制问题。首先,以线性矩阵不等式的形式给出系统有限时间有界的充分条件;然后,提出一种新型的部分依赖时滞的控制器,使得闭环系统有限时间稳定且满足给定的 H_∞ 扰动衰减指标;最后,通过一个数值算例验证了方法的有效性。

参考文献:

- [1] LI X H, ZHANG W D, LU D K. Stability and stabilization analysis of Markovian jump systems with generally bounded transition probabilities[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(13): 8416-8434.
- [2] WANG G L, ZHANG Q L, YANG C Y. Stabilization of singular Markovian jump systems with time-varying switchings[J]. Information Sciences, 2015, 297(C): 254-270.
- [3] 赵长钟, 栾小丽, 刘飞. 基于有限频段的 Markov 跳变系统有限时间 H_∞ 滤波[J]. 控制理论与应用, 2015, 32(3): 406-412.
ZHAO Changzhong, LUAN Xiaoli, LIU Fei. Finite-time H -infinity filtering for Markov jump systems in finite frequency domain[J]. Control Theory & Applications, 2015, 32(3): 406-412.
- [4] 于合谔, 刘西奎, 李伟明. 马尔科夫跳变系统的不定平均场随机线性二次最优控制问题[J]. 山东科技大学学报(自然科学版), 2018, 37(4): 69-76.
YU Heyao, LIU Xikui, LI Weiming. Indefinite mean-field stochastic linear quadratic optimal control problem of Markov jump system[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology(Natural Science), 2018, 37(4): 69-76.
- [5] LI Y, ZHANG W H, LIU X K. H_- index for discrete-time stochastic systems with Markovian jump and multiplicative noise[J]. Automatica, 2018, 90: 286-293.
- [6] LIU X K, ZHANG W H, LI Y. H_- index for continuous-time stochastic systems with Markov jump and multiplicative noise[J]. Automatica, 2019, 105: 167-178.
- [7] KAMENKOV G. On stability of motion over a finite interval of time[J]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1953, 17: 529-540.
- [8] DORATO P. Short time stability in linear time-varying systems[C] // Proceedings of the IRE International Convention Record, Part 4, New York, May. 9, 1961: 83-87.
- [9] WEISS L, INFANTE E F. Finite time stability under perturbing forces and on product spaces[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1967(1), 12: 54-59.
- [10] AMATO F, AMBROSINO R, ARIOLA M, et al. Finite-Time Stability and Control[M]. London: Springer-Verlag, 2014.
- [11] AMATO F, AMBROSINO R, ARIOLA M, et al. On the finite-time boundedness of linear systems[J]. Automatica, 2019, 107: 454-466.
- [12] LIU X K, LIU Q M, LI Y. Finite-time guaranteed cost control for uncertain mean-field stochastic systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(5): 2813-2829.

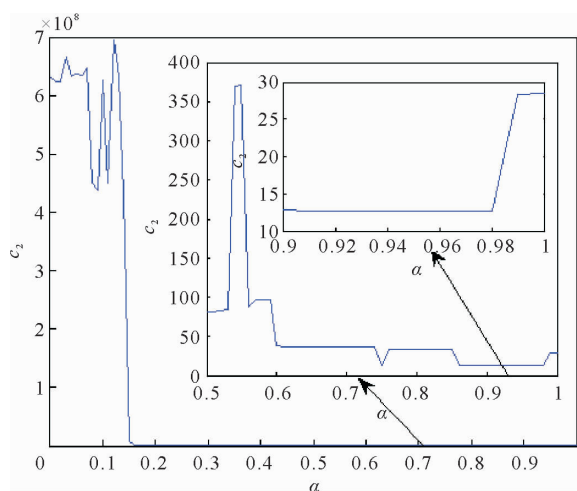


图 5 c_2 与 α 的关系

Fig. 5 The relationship between c_2 and α

- [13] YAN Z G, ZHANG W H, ZHANG G S. Finite-time stability and stabilization of \hat{Ito} stochastic systems with Markovian switching; Mode-dependent parameter approach[J]. IEEE Transactions of Automatic Control, 2015, 60(9): 2428-2433.
- [14] WANG G L, LIU L, ZHANG Q L, et al. Finite-time stability and stabilization of stochastic delayed jump systems via general controllers[J]. Journal of the Franklin Institute, 2017, 354(2): 938-966.
- [15] 严志国, 张国山. 线性随机系统有限时间 H_∞ 控制[J]. 控制与决策, 2011, 26(8): 1224-1228.
YAN Zhiguo, ZHANG Guoshan. Finite time H_∞ control for linear stochastic systems[J]. Control and Decision, 2011, 26(8): 1224-1228.
- [16] YAN Z G, SONG Y X, PARK J H. Finite-time H_2/H_∞ control for linear \hat{Ito} stochastic Markovian jump systems; Mode-dependent approach[J]. IET Control Theory & Applications, 2020, 14(20): 3557-3567.
- [17] LI Z C, LI M, XU Y L, et al. Finite-time stability and stabilization of semi-Markovian jump systems with time delay[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2018, 28: 2064-2081.
- [18] CHEN M H, SUN J. H_∞ finite-time control for discrete time-varying system with interval time-varying delay[J]. Journal of the Franklin Institute, 2018, 355: 5037-5057.
- [19] MA Y C, JIA X R, ZHANG Q L. Robust observer-based finite-time H_∞ control for discrete-time singular Markovian jumping system with time delay and actuator saturation[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2018, 28: 1-22.
- [20] TIAN G T. Finite-time H_∞ control for stochastic Markovian jump systems with time-varying delay and generally uncertain transition rates[J]. International Journal of Systems Science, 2021, 52(12): 2446-2459.
- [21] LIU M, HO D W C, NIU Y G. Stabilization of Markovian jump linear system over networks with random communication delay[J]. Automatica, 2009, 45(2): 416-421.
- [22] OKSENDAL B. Stochastic differential equations: An introduction with applications[M]. New York: Springer-Verlag, 2000.
- [23] OUELLETTE D V. Schur complements and statistics[J]. Linear Algebra and its Applications, 1981, 36(6): 187-295.

(责任编辑: 傅 游)