Banach 空间中 q-框架的近关系及强稳定性

周东芹，陶常利

（山东科技大学 信息科学与工程学院，山东 青岛 266510）

摘　要：根据 Hilbert 空间中框架之间的近关系，在 Banach 空间中引入了 q-框架之间的近关系以及 q-框架关于扰动的强稳定性的新概念，并且得出了判断 q-框架强稳定性的一个充分条件，丰富了 Paley-Wiener 定理的扰动结果，并且满足所提出的强稳定性。

关键词：q-框架；近关系；强稳定性

中图分类号：O152.5　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1672-3767(2011)02-0094-04

The Close Relations and Strong Stability on the q-frames in Banach Spaces

ZHOU Dongqin, TAO Changli

(College of Information Science and Engingeering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266510, China)

Abstract: There were a lot of frame theories in Hilbert spaces, scholars extended them to Banach spaces and obtained some significant conclusions. According to the close relations between frames in Hilbert spaces, we, in Banach spaces, introduced the new concepts of close relations between q-frames and strong stability of q-frames about disturbance, and obtained a sufficient condition of determining the strong stability of q-frames, enriching the disturbance results of Paley-Wiener theorem and satisfying the strong stability proposed in the paper.

Key words: q-frame; close relation; strong stability

Hilbert 空间中框架的概念是 Duffin 和 Schaeffer 在研究非调和 Fourier 级数时，抽取了 Gabor 在信号处理中的重要思想而提出的。但框架理论在非调和 Fourier 级数以外，在相当长的时间内，并没有引起人们的兴趣和重视。自从小波分析诞生以来，尤其在 1986 年 Daubechies 等人发现使用框架可将 $L^2(R)$ 函数展开成类似于标准正交基展开后的级数后，许多研究者成功地将框架应用到小波分析中，框架已成为小波分析的一个重要组成部分。目前，框架被广泛应用到信号处理、数据压缩、样本理论等领域。另外，框架的稳定性已成为框架理论的重要内容，由于算子理论和 Banach 空间理论的引入[1]，框架理论得到进一步发展。通过对基和框架的性质及扰动的研究，可以更深刻地认识基和框架的构造及特点。当 Hilbert 空间中框架的理论比较丰富以后，许多学者又将其推广到 Hilbert 空间中的框架以及 Banach 空间其他若干种类的框架中，并得到了一系列有意义的结论[2-8]。

本文研究 Banach 空间中的q-框架，通过在 q-框架之间引入近关系以及给出 q-框架关于扰动的强稳定性概念，得出了 q-框架的强稳定性的一个充分条件，即对于 q-框架有类似 Paley-Wiener 定理的扰动结果，并且满足强稳定性。

收稿日期：2010-09-29

基金项目：国家自然科学基金项目(60804034).

作者简介：周东芹(1985—)，女，山东菏泽人，硕士研究生，主要从事小波分析及其应用研究. E-mail: zhoudongqin@126.com.

陶常利(1957—)，男，山东莱芜人，教授，博士，主要从事泛函分析、算子理论、小波分析及其应用研究.

1 预备知识

首先介绍 Banach 空间 X 中 q-框架的概念。

定义 1[2] 设 X 为 Banach 空间，X^* 为 X 的对偶空间，$q>1$，序列 $\{x_n\}_{n\in N}\subset X$，如果存在正数 A,B，使对任何 $x^*\in X^*$，有 $A\|x^*\|^q\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n)|^q\leqslant B\|x^*\|^q$，则称 $\{x_n\}_{n\in N}$ 为 X 的 q- 框架，A,B 为其框架界。

特别地，当 $q=2$，X 为 Hilbert 空间时，这里定义的 q- 框架与通常在 Hilbert 空间中定义的框架是一致的。

定义 2[2] 设 X 为 Banach 空间，X^* 为 X 的对偶空间，$q>1$，序列 $\{x_n\}_{n\in N}\subset X$ 称为 q-Bessel 序列，若存在常数 $M>0$，使得 $\sum_{n=1}^{\infty}|x^*(x_n)|^q\leqslant M\|x^*\|^q$，$\forall x^*\in X^*$，此时称 M 为其 Bessel 界。

显然，q- 框架一定是 q-Bessel 序列，这与 Hilbert 空间中的框架一定是 Bessel 序列一致。

引理 1[2] 设 $\{x_n\}_{n\in N}\subset X$ 为 q- 框架，框架界为 A,B，则

1) 对每个 $\{a_n\}_{n\in N}\in l_p$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n$ 在 X 中收敛；

2) 线性算子 $U:X^*\to l_q$ 定义为 $U(x^*)=\{x(x_n)\}_{n\in N}$ 是有界线性算子，且满足 $U^*(l_q^*)=X^{**}$，$U^*(e_n)=J(x_n)$，其中 $U^*:l_q^*\to X^{**}$ 为 U 的共轭算子，$J:X\to X^{**}$ 为自然映射，$e_n=\{\delta_{kn}\}_{k\in N}$；

3) X 为自反空间，且 $X=\{\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n:\{a_n\}_{n\in N}\in l_p\}$。

2 Banach 空间中 q- 框架之间的近关系

首先介绍 q- 框架的接近关系。

定义 3[3] 设 $\chi=\{x_n\}_{n\in N}$ 和 $\gamma=\{y_n\}_{n\in N}$ 是 Banach 空间 X 中的两个 q- 框架，如果存在常数 $\lambda\geqslant 0$，使得 $\forall c=\{c_n\}_{n\in N}\in l_p$，有

$$\|\sum_{n\in N}c_n(y_n-x_n)\|\leqslant\lambda\|\sum_{n\in N}c_nx_n\|,\tag{1}$$

则称 γ 接近于 χ，其中 $p>1$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。相应地，满足式(1)的 λ 的下确界称为框架 γ 到框架 χ 的接近界，用 $c(\gamma,\chi)$ 表示。

注意，接近关系不是等价关系，因为它不满足对称性。但是当 γ 对 χ 的接近界小于 1 时，还是满足对称性的，只不过接近界不同而已。事实上，由式(1)知，$\forall c=\{c_n\}_{n\in N}\in l_p$，有

$$\|\sum_{n\in N}c_n(y_n-x_n)\|\leqslant\frac{\lambda}{1-\lambda}\|\sum_{n\in N}c_ny_n\|,$$

因为 $0\leqslant\lambda<1$，所以 $\frac{\lambda}{1-\lambda}\geqslant 0$，由接近关系的定义可得结论成立。

定义 4[3] 如果框架 χ 接近于框架 γ，且框架 γ 也接近于 χ，则称 χ 与 γ 是近的。并称 $d^0(\chi,\gamma)$ 为 χ 与 γ 的近关系的接近界，其中 $d^0(\chi,\gamma)=\max\{c(\chi,\gamma),c(\gamma,\chi)\}$。

显然 $d^0(\chi,\gamma)\geqslant 0$，且 $d^0(\chi,\gamma)=d^0(\gamma,\chi)$。

容易验证近关系除了满足对称性以外，还满足反身性与传递性，因此近关系是一个等价关系。

利用近关系可将 Banach 空间 X 中的所有 q- 框架进行分类。分类后，所有 q- 框架组成的集合 $F(X)$ 可表示为 $F(X)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\varepsilon_\alpha$，且类 $\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 满足下列性质：

1) $\varepsilon_\alpha\cap\varepsilon_\beta=\emptyset,\alpha\neq\beta$；

2) 对任何 $\chi,\gamma\in\varepsilon_\alpha$，有 $d^0(\chi,\gamma)<+\infty$；

3) 对任何 $\chi\in\varepsilon_\alpha,\gamma\in\varepsilon_\beta,\alpha\neq\beta$，有 $d^0(\chi,\gamma)=+\infty$。

3 q-框架的强稳定性

如果某种类型的一个框架在某种扰动下的结果仍是该类框架，则称该框架在此扰动下具有稳定性。目前，Hilbert空间中的各种框架以及Banach空间中的各种框架在稳定性方面已有许多结果[2]。下面利用q-框架之间的近关系引入q-框架关于扰动的强稳定性概念。

定义5 设$\chi=\{x_n\}_{n\in N}$为Banach空间X的一个q-框架，$\gamma=\{y_n\}_{n\in N}$是$\chi=\{x_n\}_{n\in N}$在某种扰动下的结果，若$\gamma=\{y_n\}_{n\in N}$不仅是X的q-框架，而且还与$\chi=\{x_n\}_{n\in N}$具有近关系，则称q-框架$\chi=\{x_n\}_{n\in N}$在该扰动下是强稳定的。

经典的Paley-Wiener定理：设$\{x_k\}_{k\in N}$为Banach空间X的基，$\{y_k\}_{k\in N}\subset X$。如果存在常数$\lambda\in[0,1)$，使得对所有有限点列$c_1,c_2,\cdots,c_n(n\in N)$，有$\|\sum_{k=1}^{n}c_k(x_k-y_k)\|\leqslant\lambda\|\sum_{k=1}^{n}c_kx_k\|$，那么$\{y_k\}_{k\in N}$为$X$的基且$\{y_k\}_{k\in N}$等价于$\{x_k\}_{k\in N}$。

对于q-框架也有类似于Paley-Wiener定理的扰动结果，并且满足强稳定性。这就是本文的主要结论。

定理1 设$\{x_n\}_{n\in N}\subset X$为$X$的$q$-框架，框架界为$A,B$，$0\leqslant\lambda<1$，$\{y_n\}_{n\in N}\subset X$，若对任何$m=1,2,\cdots$和任何$c_1,c_2,\cdots,c_m$满足

$$\|\sum_{n=1}^{m}c_n(x_n-y_n)\|\leqslant\lambda\|\sum_{n=1}^{m}c_nx_n\|,\tag{2}$$

则$\{y_n\}_{n\in N}$为X的q-框架，框架界为$A(1-\lambda)^q,B(1+\lambda)^q$，且$\{x_n\}_{n\in N}$与$\{y_n\}_{n\in N}$是近的。

证明：对任何$c_1,c_2,\cdots,c_m$，由式(2)得

$$\|\sum_{n=1}^{m}c_ny_n\|\leqslant(1+\lambda)\|\sum_{n=1}^{m}c_nx_n\|,\tag{3}$$

由Hahn-Banach定理，存在$x^*\in X^*$且$\|x^*\|=1$，使

$$\|\sum_{n=1}^{m}c_nx_n\|=x^*(\sum_{n=1}^{m}c_nx_n)\leqslant(\sum_{n=1}^{m}|c_n|^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{n=1}^{m}|x^*(x_n)|^q)^{\frac{1}{q}}\leqslant\sqrt[q]{B}(\sum_{n=1}^{m}|c_n|^p)^{\frac{1}{p}},$$

从而，

$$\|\sum_{n=1}^{m}c_ny_n\|\leqslant(1+\lambda)\sqrt[q]{B}(\sum_{n=1}^{m}|c_n|^p)^{\frac{1}{p}}。\tag{4}$$

对任何$y^*\in X^*$，由(4)得

$$\sum_{n=1}^{m}|y^*(y_n)|^q=y^*(\sum_{n=1}^{m}\frac{|y^*(y_n)|^q}{y^*(y_n)}y_n)\leqslant\|y^*\|[\sqrt[q]{B}(1+\lambda)](\sum_{n=1}^{m}|y^*(y_n)|^{(q-1)p})^{\frac{1}{p}},$$

整理得$(\sum_{n=1}^{m}|y^*(y_n)|^q)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|y^*\|[\sqrt[q]{B}(1+\lambda)]$。

令$m\to\infty$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}|y^*(y_n)|^q\leqslant\|y^*\|^q[\sqrt[q]{B}(1+\lambda)]^q=\|y^*\|^qB(1+\lambda)^q。\tag{*}$$

设$J:X\to X^{**}$为嵌入映射，$J(x)(x^*)=x^*(x)$，$U:X^*\to l_q$，$U(x^*)=\{x^*(x_n)\}_{n\in N}$，则$\sqrt[q]{A}\|x^*\|\leqslant\|U(x^*)\|\leqslant\sqrt[q]{B}\|x^*\|$。

$E=U(x^*)$为l_q的闭子空间，且U是X^*到E的线性同胚。因此$T=U^{-1}$为E到X^*的线性同胚，从而，T^*是X^{**}到E^*的线性同胚，且$\|T^*\|=\|T\|=\|U^{-1}\|\leqslant\sqrt[q]{A^{-1}}$。

记$S=T^*J$，则$S:X\to E^*$为线性有界算子，且$\|S\|=\|T^*J\|\leqslant\|T^*\|\leqslant\sqrt[q]{A^{-1}}$。

对每个$x\in X$，$S(x)\in E^*$，由Hahn-Banach定理知，存在$a_x^*=\{a_n(x)\}_{n\in N}\in l_q^*=l_p$，使$a_x^*|_E=S(x)$，且$\|a_x^*\|=\|S(x)\|$。从而，

$$(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(x)|^p)^{\frac{1}{p}}=\|a_x^*\|\leqslant\|S\|\cdot\|x\|\leqslant\sqrt[q]{A^{-1}}\|x\|。\tag{5}$$

记 $Q=J^{-1}U^*$，由引理 1 知，$Q(e_n)=x_n(n=1,2,\cdots)$，对任何 $x^*\in X^*$，有 $JQ(a_x^*)(x^*)=U^*(a_x^*)(x^*)=a_x^*(U(x^*))=S(x)(U(x^*))=T^*J(x)(U(x^*))=J(x)(TU(x^*))=J(x)(x^*)$，从而 $JQ(a_x^*)=J(x)$，于是 $x=Q(a_x^*)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)Q(e_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)x_n$。对任何 $\{a_n\}_{n\in N}\in l_p$，$m=1,2,\cdots$，由式(2)得 $\|\sum\limits_{k=n+1}^{n+m}a_ky_k\|\leqslant(1+\lambda)\|\sum\limits_{k=n+1}^{n+m}a_kx_k\|$。

由引理 1 知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx_n$ 在 X 中收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_ny_n$ 在 X 中收敛。

记 $T_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)y_n$，由式(3)和式(5)得 $\|x-T_1(x)\|\leqslant(\lambda+\frac{1}{\sqrt[q]{A}})\|x\|$，对任何 $y^*\in X^*$，有 $|y^*(x)|\leqslant|y^*(x-T_1(x))|+|y^*(T_1(x))|\leqslant\|y^*\|\lambda\|x\|+(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(x)|^p)^{\frac{1}{p}}(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|y^*(y_n)|^q)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|x\|[\|y^*\|\lambda+\frac{1}{\sqrt[q]{A}}(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|y^*(y_n)|^q)^{\frac{1}{q}}]$，从而得到

$$A(1-\lambda)^q\|y^*\|^q\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|y^*(y_n)|^q。\tag{**}$$

由(*)及(**)式知，$\{y_n\}_{n\in N}$ 为 X 的 q-框架，且其框架界为 $A(1-\lambda)^q$，$B(1+\lambda)^q$。

在 $\|\sum\limits_{n=1}^{m}c_n(x_n-y_n)\|\leqslant\lambda\|\sum\limits_{n=1}^{m}c_nx_n\|$ 中，令 $m\to\infty$ 得 $\|\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(x_n-y_n)\|\leqslant\lambda\|\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nx_n\|$，整理得 $\|\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(x_n-y_n)\|\leqslant\frac{\lambda}{1-\lambda}\|\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_ny_n\|$。

又 $0\leqslant\lambda<1$，$\frac{\lambda}{1-\lambda}\geqslant0$，根据近关系的定义，可知框架 $\{x_n\}_{n\in N}$ 与 $\{y_n\}_{n\in N}$ 是近的。证毕。

参考文献：

[1] 定光桂. 巴拿赫空间引论[M]. 北京：科学出版社，1984.

[2] 朱玉灿. Banach 空间上的 q-框架和 p-Riesz 基的稳定性[J]. 数学年刊(A)，2001，22(3)：359-364.
ZHU Yucan. The stability of q-frame and p-Riesz basis in Banach spaces[J]. Chinese Annals of Mathematics(A)，2001，22(3)：359-364.

[3] 李登峰，薛明志. Banach 空间上的基和框架[M]. 北京：科学出版社，2007.

[4] 赵建伟，朱红鲜. Banach 空间中 q 阶框架的扰动[J]. 陕西师范大学学报：自然科学版，2003，31(3)：9-12.
ZHAO Jianwei，ZHU Hongxian. Perturbation of frame of order q on a Banach space[J]. Journal of Shaanxi Normal University：Natural Science Edition，2003，31(3)：9-12.

[5] 艾瑛，卢立才. Banach 空间中的 q-框架和 p-Riesz 基的性质[J]. 辽宁师范大学学报，2007，30(2)：144-147.
AI Ying，LU Licai. The properties of q-frame and p-Riesz basis in Banach spaces[J]. Journal of Liaoning Normal University，2007，30(2)：144-147.

[6] 周家云，郭燕妮，刘宇，等. Bessel 框架及其摄动[J]. 数学研究与评论，2003，23(3)：515-519.
ZHOU Jiayun，GUO Yanni，LIU Yu，et al. Bessel frame and its perturbation[J]. Mathematical Research and Exposition，2003，23(3)：515-519.

[7] 周家云，刘宇. Banach 空间的框架和原子分解的性质[J]. 数学学报，2004，47(5)：499-504.
ZHOU Jiayun，LIU Yu. The property of frame and atomic decomposition for Banach space[J]. Acta Mathematica Sinica，2004，47(5)：499-504.

[8] 李春艳，曹怀信. Banach 空间上的 X_d 框架与 Riesz 基[J]. 数学学报：中文版，2006，49(6)：1361-1366.
LI Chunyan，CAO Huaixin. X_d frames and Riesz basis for a Banach space[J]. Acta Mathematica Sinica：Chinese Series，2006，49(6)：1361-1366.