第 30 卷 第 2 期
2011 年 4 月
Vol. 30 No. 2
Apr. 2011

Journal of Shandong University of Science and Technology
Natural Science

一类 θ-图的邻点可区别关联着色

纪世粉，刘西奎，孔　元
（山东科技大学 信息科学与工程学院，山东 青岛 266510）

摘　要： 用反证法和枚举法研究了一种 θ-图的邻点可区别关联着色，并确定 θ-图的邻点可区别关联色数。对于 θ-图，若 $uv\in E(\theta)$，或 $N_1=N_2=N_3=1$，或 $N_1=N_2=N_3=2$，或 $uv\notin E(\theta)$ 且 N_1，N_2 和 N_3 三者中有一个等于 1，一个等于 2 时，则 $\chi_{AI}(\theta)=5$；否则，$\chi_{AI}(\theta)=4$。

关键词： θ-图；邻点可区别关联着色；邻点可区别关联色数；反证法；枚举法

中图分类号： O157.5　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1672-3767(2011)02-0098-05

The Adjacent Vertex Distinguishable Incidence Coloring of A Kind of θ-Graphs

JI Shifen, LIU Xikui, KONG Yuan
(College of Information Science and Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266510, China)

Abstract: The reduction to absurdity and enumerative algorithm were used to study the adjacent vertex distinguishable incidence coloring of a kind of θ- graphs and determine the adjacent vertex distinguishable incidence chromatic number in this paper. For θ-graphs, if $uv\in E(\theta)$, or $N_1=N_2=N_3=1$, or $N_1=N_2=N_3=2$, or $uv\notin E(\theta)$ and if one equals 1 and another equals 2 among N_1, N_2 and N_3, then $\chi_{AI}(\theta)=5$; otherwise $\chi_{AI}(\theta)=4$.

Key words: θ-graphs; the adjacent vertex distinguishable incidence coloring; the adjacent vertex distinguishable incidencechromatic number; reduction to absurdity; enumeration algorithm

图着色问题是当前研究的热点图论问题之一，国内外众多学者对该问题作了大量工作，提出了很多种类的着色，确定了很多具有某种结构或属性的图类的色数。由于 θ-图具有特殊的结构和很大的实际应用价值，因而成为许多学者争相研究的对象，如：1992 年，张和平和欧阳克智[1]研究了 θ-图及其线图的连接数；1994 年，刘林忠等[2]确定了 θ-图的点面全色数、边面全色数和点边面完备色数；2004 年，王文杰和张忠辅[3]研究了θ-图的邻强边染色，王治文和王莲花等[4]研究了 θ-图的邻点可区别全染色并确定其邻点可区别全色数；2009 年，亢琳和杨爱民[5]研究了 θ-图的对策着色并确定了其对策色数。

1993 年，Bruldi 和 Masse[6]首次提出了关联着色的概念和关联着色猜想。2007 年，刘西奎和王雅琴[7]首次提出了邻点可区别关联着色和邻点可区别关联色数的概念，并确定了一类 θ-图的邻点可区别关联色数，证明了 $uv\in E(\theta)$时 $\chi_{AI}(\theta)=5$。

图的邻点可区别关联着色的成立条件较之关联着色更为苛刻，因而它的确定也更加困难，目前可以应用的好的方法也不多。由于交通等问题的解决可以转化成邻点可区别关联着色问题，所以确定图的邻点可区别关联色数既有其理论价值也有实际意义。2008 年，王雅琴[8]确定了圈、完全二部图等图的邻点可区别关联色数。2009 年，王文丽[9]确定了风车图、$D_{m,4}$、$D_{m,n}$、齿轮图等图，以及几类图的广义 Mycielski 图和几类图的笛卡尔积图的邻点可区别关联色数，周薇[10]确定了特征集 $S=\left\{1,\frac{n}{2}\right\}$的任意偶数阶循环皇冠图、两类单圈

收稿日期： 2010-10-05

作者简介： 纪世粉(1984—)，女，山东菏泽人，硕士研究生，主要从事图论方面的研究. E-mail: jishifen@yahoo.com.cn.
刘西奎(1973—)，男，山东泰安人，副教授，博士，主要从事图论、神经网络和 DNA 计算等方面的研究.

图、两类平面网格、六角系统及其 r-冠图、运算图的关联色数与邻点可区别关联色数。

无论是完善 θ-图的着色理论还是今后应用 θ-图，θ-图的邻点可区别关联色数的确定都是不可或缺的工作。本文用反证法研究了 $uv\notin E(\theta)$ 时 θ-图的邻点可区别关联着色，确定了 θ-图其邻点可区别关联色数。

1 相关定义及预备引理

若无特殊说明，本文中的图均为有限、无向、简单图。令 $V(G)$、$E(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示图 G 的顶点集、边集和顶点的最大度，且在无歧义的情况下，分别简记为 V、E 和 Δ。顶点 u 的邻点集记为 $N_G(u)$，简记为 $N(u)$，则顶点 u 的度 $d(u)=|N(u)|$。

定义 1[1] 用 $I(G)=\{(v,e)\mid v\in V,e\in E|$，且 u 与 v 相关联$\}$ 表示 G 中所有关联对 (v,e) 组成的集合。两相关联对 (v,e) 和 (w,f) 是相邻的，如果下列条件之一成立：① $v=w$；② $e=f$；③ $uv=e$ 或 $wv=f$。

定义 2[1] 定义 G 的一个关联着色 σ 为由 $I(G)$ 到颜色集 C 的一个映射，使得 $I(G)$ 中相邻的关联对着不同的颜色。$\sigma(v,e)=c_1$ 表示关联 (v,e) 着颜色 c_1。若 $\sigma: I(G)\to C$ 满足 $|C|=k$，则称 σ 是 G 的一个 k-关联着色，使得 G 存在 k-关联着色的最小值 k 称为 G 的关联色数，记作 $\chi_{\mathrm{I}}(G)$，简记为 χ_{I}。

对图 G 的一个关联着色 $\sigma: I(G)\to C$，称 $Q_{\mathrm{A}}(\mu)=\{(v,vu)\mid u,v\in G,v\in N(u)\}$ 为 u 的远关联集，$Q_{\mathrm{I}}(u)=\{(u,vu)\mid u,v\in G,v\in N(u)\}$ 为 u 的近关联集。分别用 $C_{\mathrm{A}}(u)$ 和 $C_{\mathrm{I}}(u)$ 表示着在 $Q_{\mathrm{A}}(u)$ 和 $Q_{\mathrm{I}}(u)$ 上的颜色集，与 u 相关的所有关联对上颜色组成的集合为 $C(u)=C_{\mathrm{A}}(u)\cup C_{\mathrm{I}}(u)$。将两种着色的有序对 $(\sigma(u,uv),\sigma(v,vu))$ 简记为 $\sigma(uv)$。

定义 3[7] 称 G 的一个 k-关联着色 σ 为 G 的一个 k-邻点可区别关联着色，如果 σ 使得 G 中任意相邻的两顶点 u 和 v 有 $C(u)\neq C(v)$。使得 G 存在 k-邻点可区别关联着色最小的 k 值称为 G 的邻点可区别关联色数，记作 $\chi_{\mathrm{AI}}(G)$，简记为 χ_{AI}。

定义 4[1] 若图 G 的一族路的内部顶点互相不同，该族路称为内部不相交的路。

定义 5[4] 若图 G 中任意两顶点 u,v 间存在 3 条内部不相交的路，且至多有 1 条长度为 1，则称 G 为 θ-图。

引理 1[7] 当且仅当图 G 中既没有孤立边也没有孤立点时，图 G 存在一个邻点可区别关联着色。

引理 2[1,7] 任意最大度为 Δ 的图 G，有 $\chi_{\mathrm{AI}}(G)\geqslant\chi_{\mathrm{I}}(G)\geqslant\Delta+1$。

引理 3[1,7] 若最大度为 Δ 的图 G 存在一个 $(\Delta+1)$-关联着色，则对任意顶点 $u\in V(G)$，$d(u)=\Delta$，有 $|C_{\mathrm{A}}(u)|=1$。

引理 4[7] 若图 G 中有 n 个连通分支 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 且没有孤立边或孤立点，则 $\chi_{\mathrm{AI}}(G)=\max\{\chi_{\mathrm{AI}}(G_i)\mid i=1,2,\cdots,n\}$。

引理 5[7] 对简单连通图 G，若 $|V(G)|\geqslant 3$，令 $V_0=\{u\mid d(u)=\Delta(G)\}$。若 $E(G[V_0])\neq\varnothing$，则 $\chi_{\mathrm{AI}}(G)\geqslant\Delta+2$。这里 V_0 是 G 的生成子图。

2 主要结果

令 θ-图中三条互不相交的路分别为 P^1，P^2 和 P^3，且 P^i 中的顶点分别为 $u,v_1^i,v_2^i,\cdots,v_{N_i}^i,v$，$i=1,2,3$，有以下结论。

定理 1 对 θ-图，若 $uv\notin E(\theta)$，则当① $N_1=N_2=N_3=1$，或② $N_1=N_2=N_3=2$，或③ N_1、N_2 和 N_3 三者中有一个等于 1，一个等于 2 时，$\chi_{\mathrm{AI}}(\theta)=5$；否则，$\chi_{\mathrm{AI}}(\theta)=4$。

证明： 假设 $uv\notin E(\theta)$。

显然 θ-图是连通的且 $\Delta(\theta)=d(u)=d(v)=3$，由引理 1 和引理 2，可先假设 θ 图存在一个 4-邻点可区别关联着色 σ，且颜色集为 $C=\{1,2,3,4\}$，则通过以下几种情形可以证明结论成立。

情形 1 $d(u)=d(v)=3$，所以 $|C(u)|=|C(v)|=4$，且 $|C(v_1^i)|=|C(v_{N_i}^i)|=3$。由引理 3 知，$|C_{\mathrm{A}}(u)|=|\{C(v_1^i,v_1^iu)\}|=1$，且 $|C_{\mathrm{A}}(u)|=|\{C(v_1^i,v_1^iv)\}|=1$，$i=1,2,3$。

不失一般性，令 $\sigma(v_1^i,v_1^iu)=\{4\}$，则 $\sigma(u,uv_1^i)=\{1\}$，$\{2\}$ 或 $\{3\}$，$i=1,2,3$。一般地，令 $\sigma(u,uv_1^i)=\{i\}$，$i=1,2,3$，则有以下 3 种情况。

情形 1.1 $N_1=N_2=N_3=1$。

$\sigma(v_1^1,v_1^1v)$可为$\{2\}$或$\{3\}$，$\sigma(v_1^2,v_1^2v)$可为$\{1\}$或$\{3\}$，$\sigma(v_1^3,v_1^3v)$可为$\{1\}$或$\{2\}$。显然$|C_A(v)|=|\{\sigma(v_1^i,v_1^iv)|i=1,2,3\}|$，不能等于1。

所以$\chi_{AI}(\theta)\neq4$，且$\chi_{AI}(\theta)\geqslant5$。

以下将用颜色集$C=\{1,2,3,4,5\}$构造θ-图的一个5-邻点可区别关联着色。令$\sigma(u,uv_1^i)=\sigma(v,vv_1^i)=\{i\}$，$\sigma(v_1^i,v_1^iu)=\{4\}$，$\sigma(v_1^i,v_1^iv)=\{5\}$，$i=1,2,3$。

情形 1.2 $N_1=N_2=N_3=2$。

因为$\sigma(v_2^i,v_2^iv_1^i)=\{i\}$，$i=1,2,3$，所以$\sigma(v_1^1,v_1^1v_2^1)$等于$\{2\}$或$\{3\}$。

若$\sigma(v_1^1,v_1^1v_2^1)=\{2\}$，则$C(v_1^1)=\{1,2,4\}$，$\sigma(v_2^1,v_2^1v)=C\backslash C(v_1^1)=\{3\}$。因为$|C(v)|=4$，$\sigma(v_2^3,v_2^3v)=\{3\}$，所以$\sigma(v_2^3,v_2^3v_1^3)=\sigma(v_2^3,v_2^3v)=\{3\}$。这是不可能的。

若$\sigma(v_1^1,v_1^1v_2^1)=\{3\}$，则$C(v_1^1)=\{1,3,4\}$，$\sigma(v_2^1,v_2^1v)=C\backslash C(v_1^1)=\{2\}$，且$\sigma(v_2^2,v_2^2v)=\{2\}$，因此有$\sigma(v_2^2,v_2^2v)=\sigma(v_2^2,v_2^2v_1^2)$。这也是不可能的。

所以$\chi_{AI}(\theta)\neq4$，且$\chi_{AI}(\theta)\geqslant5$。

以下将用颜色集$C=\{1,2,3,4,5\}$构造θ-图的一个5-邻点可区别关联着色。

令$\sigma(uv_1^i)=(i,4)$，$\sigma(v_{N_i}^iv)=(5,i)$，$i=1,2,3$，$\sigma(v_1^1v_2^1)=(2,1)$，$\sigma(v_1^2v_2^2)=(3,2)$，$\sigma(v_1^3v_2^3)=(1,3)$。

情形 1.3 N_1、N_2和N_3三者中有一个等于1，一个等于2。

一般地，令$N_1=1$，$N_2=2$。下面将先证明$\chi_{AI}(\theta)\geqslant5$。

由$|C(u)|=|C(v)|=4$，及$|C(v_1^1)|=|C(v_1^2)|=|C(v_1^3)|=3$，知$\sigma(v,vv_1^1)=\sigma(u,uv_1^2)=\{1\}$，$\sigma(v_2^2,v_2^2v_1^2)=\sigma(u,uv_1^2)=\{2\}$，$\sigma(v_1^2,v_1^2v_2^2)=\sigma(v,vv_1^2)$，且$\sigma(v_1^1,v_1^1v)$可等于$\{2\}$或$\{3\}$。

若$\sigma(v_1^1,v_1^1v)=\{2\}$，则$\sigma(v_1^2,v_1^2v)=\{2\}$，这与$\sigma(v_2^2,v_2^2v_1^2)=\{2\}$矛盾。

若$\sigma(v_1^1,v_1^1v)=\{3\}$，则$C_A(v)=3$，$\sigma(v_1^1,v_1^1v)=\sigma(v,vv_2^2)=C\backslash(\sigma(v_2^2,v_2^2v_1^2)\cup\sigma(v_1^1v))=\{1,2,3,4\}\backslash\{1,2,3\}=\{4\}$。这与$\sigma(v_1^2,v_1^2u)=\{4\}$矛盾。

所以$\chi_{AI}(\theta)\neq4$，且$\chi_{AI}(\theta)\geqslant5$。

现在将用颜色集$C=\{1,2,3,4,5\}$构造θ图的一个5-邻点可区别关联着色。

令$\sigma(uv_1^i)=(i,4)$，$i=1,2,3$，$\sigma(v_1^1v)=(5,1)$，$\sigma(v_2^2v)=5,3$，$\sigma(v_1^2v_2^2)=(3,2)$，$\sigma(v_{N_1}^3v)=(5,2)$。

对P^3中的剩余关联，$i=1,2,\cdots,N_3-1$，

1)若$N_3\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)$，令$\sigma(v_i^3v_{i+1}^3)=\begin{cases}(1,3),i\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)\\(4,1),i\equiv2(\mathrm{mod}\ 3);\\(2,4),i\equiv0(\mathrm{mod}\ 3)\end{cases}$

2)若$N_3\equiv2(\mathrm{mod}\ 3)$，令$\sigma(v_i^3v_{i+1}^3)=\begin{cases}(2,3),i\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)\\(1,2),i\equiv2(\mathrm{mod}\ 3);\\(3,4),i\equiv0(\mathrm{mod}\ 3)\end{cases}$

3)若$N_3\equiv0(\mathrm{mod}\ 3)$，令$\sigma(v_1^3v_{i+1}^3)=\begin{cases}(1,3),i\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)\\(2,1),i\equiv2(\mathrm{mod}\ 3)。\\(4,2),i\equiv0(\mathrm{mod}\ 3)\end{cases}$

情形 2 其他情形。

令$N_i\equiv3q_i+r_i$，$q_i\geqslant0$，$0\leqslant r_i\leqslant2$，$i=1,2,3$。下面将用颜色集$C=\{1,2,3,4\}$构造θ图的一个4-邻点可区别关联着色。令$\sigma(uv_1^i)=(i,4)$，$i=1,2,3$。

情形 2.1 $r_1=r_2=r_3=0$

显然$N_i\geqslant3$，$i=1,2,3$。令$\sigma(v_{N_1}^1v)=(1,4)$，$\sigma(v_{N_2}^2v)=(1,3)$，$\sigma(v_{N_3}^1v)=(1,2)$。

对P^1中的剩余关联，令$\sigma(v_i^1v_{i+1}^1)=\begin{cases}(2,1),i\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)\\(4,3),i\equiv2(\mathrm{mod}\ 3)，其中\ i=1,2,\cdots,N_1-1；\\(1,4),i\equiv0(\mathrm{mod}\ 3)\end{cases}$

对 P^2 中的剩余关联，令 $\sigma(v_i^2v_{i+1}^2)=\begin{cases}(1,2),i\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)\\(3,4),i\equiv2(\mathrm{mod}\ 3)\\(2,3),i\equiv0(\mathrm{mod}\ 3)\end{cases}$，其中 $i=1,2,\cdots,N_2-1$；

对 P^3 中的剩余关联，令 $\sigma(v_i^3v_{i+1}^3)=\begin{cases}(1,3),i\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)\\(2,4),i\equiv2(\mathrm{mod}\ 3)\\(3,2),i\equiv0(\mathrm{mod}\ 3)\end{cases}$，其中 $i=1,2,\cdots,N_3-1$。

情形 2.2 r_1,r_2 和 r_3 中两个等于 2，一个等于 0。

一般地，令 $r_1=0,r_2=r_3=2$，则 $N_1\geqslant3$。对 P^1 中的剩余关联用情形 2.1 中的方法进行着色；

对 P^2 中的剩余关联，令 $\sigma(v_{N_2}^2v)=(1,3)$，$\sigma(v_i^2v_{i+1}^2)=\begin{cases}(3,2),i\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)\\(1,3),i\equiv2(\mathrm{mod}\ 3)\\(2,4),i\equiv0(\mathrm{mod}\ 3)\end{cases}$，其中 $i=1,2,\cdots,N_2-1$；

对 P^3 中的剩余关联，令 $\sigma(v_i^3v_{i+1}^3)=\begin{cases}(2,3),i\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)\\(1,2),i\equiv2(\mathrm{mod}\ 3)\\(3,4),i\equiv0(\mathrm{mod}\ 3)\end{cases}$，其中 $i=1,2,\cdots,N_3-1$。

情形 2.3 r_1,r_2 和 r_3 中两个等于 0，一个等于 2。

一般地，令 $r_1=r_2=0,r_3=2$，则 $N_1\geqslant3,N_2\geqslant3$。对 P^1 和 P^2 中的剩余关联用情形 2.1 中的方法进行着色；对 P^3 中的剩余关联用情形 2.2 中的方法进行着色。

情形 2.4 $r_1=r_2=r_3=2$。

由情形 2.3 知，N_1,N_2 和 N_3 中至少有一个不小于 5。一般地令 $N_1\geqslant5$。

对 P^1，令 $\sigma(v_{N_1-1}^1v_{N_1}^1)=(4,2)$，$\sigma(v_{N_1}^1v)=(1,4)$，$\sigma(v_i^1v_{i+1}^1)=\begin{cases}(2,1),i\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)\\(3,4),i\equiv2(\mathrm{mod}\ 3)\\(1,3),i\equiv0(\mathrm{mod}\ 3)\end{cases}$，$i=1,2,\cdots,N_1-2$；

对 P^2 和 P^3 中的剩余关联用情形 2.2 中的方法进行着色。

情形 2.5 $r_1=r_2=r_3=1$。

由情形 1.1 知 $N_i\geqslant4,i=1,2,3$。令 $\sigma(v_{N_2}^2v)=(1,2)$，$\sigma(v_{N_3}^3v)=(1,3)$。

对 P^1 中的剩余关联用情形 2.4 中的方法进行着色。

对 P^2 中的剩余关联，令 $\sigma(v_i^2v_{i+1}^2)=\begin{cases}(1,2),i\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)\\(4,3),i\equiv2(\mathrm{mod}\ 3)\\(2,4),i\equiv0(\mathrm{mod}\ 3)\end{cases}$，其中 $i=1,2,\cdots,N_2-1$。

对 P^3 中的剩余关联，令 $\sigma(v_i^3v_{i+1}^3)=\begin{cases}(1,3),i\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)\\(4,2),i\equiv2(\mathrm{mod}\ 3)\\(3,4),i\equiv0(\mathrm{mod}\ 3)\end{cases}$，其中 $i=1,2,\cdots,N_3-1$。

情形 2.6 r_1,r_2 和 r_3 中两个等于 1，一个等于 0。

一般地，令 $r_1=0,r_2=r_3=1$ 则 $N_1\geqslant3$。令 $\sigma(v_{N_1}^1v)=(2,1)$，$\sigma(v_{N_2}^2v)=(2,4)$，$\sigma(v_{N_3}^2v)=(2,3)$。对 P^1 中的剩余关联用情形 2.1 中的方法进行着色；对 P^2 和 P^3 中的剩余关联用情形 2.5 中的方法进行着色。

情形 2.7 r_1,r_2 和 r_3 中两个等于 1，一个等于 2。

一般地，令 $r_1=2,r_2=r_3=1$ 则 $N_2\geqslant4$ 或 $N_3\geqslant4$。对 P^1 中的剩余关联用情形 2.4 中的方法进行着色；对 P^2 和 P^3 中的剩余关联用情形 2.5 中的方法进行着色。

情形 2.8 r_1,r_2 和 r_3 中两个等于 0，一个等于 1。

一般地，令 $r_1=1,r_2=r_3=0$，则 $N_2\geqslant3$ 且 $N_3\geqslant3$。令 $\sigma(v_{N_1}^1v)=(2,1)$，$\sigma(v_{N_2}^2v)=(2,4)$，$\sigma(v_{N_3}^3v)=(2,3)$。对 P^1 和 P^2 中的剩余关联用情形 2.1 中的方法进行着色；对 P^3 中的剩余关联，令

$$\sigma(v_i^3v_{i+1}^3)=\begin{cases}(2,3),i\equiv1(\mathrm{mod}\ 3)\\(4,1),i\equiv2(\mathrm{mod}\ 3)\\(3,4),i\equiv0(\mathrm{mod}\ 3)\end{cases}\text{，其中 } i=1,2,\cdots,N_3-1\text{。}$$

情形 2.9 r_1, r_2 和 r_3 中两个等于 2，一个等于 1。

一般地，令 $r_1=1, r_2=r_3=2$，则可得以下 2 种情形。

情形 2.9.1 $N_1 \geqslant 4$。

令 $\sigma(v_{N_1}^1 v)=(1,4), \sigma(v_{N_2}^2 v)=(1,3), \sigma(v_{N_3}^3 v)=(1,2)$。

对 P^1 中的剩余关联，令 $\sigma(v_i^1 v_{i+1}^1)=\begin{cases}(2,1), i\equiv 1(\bmod 3)\\(3,2), i\equiv 2(\bmod 3)\\(4,3), i\equiv 0(\bmod 3)\end{cases}$，其中，$i=1,2,\cdots,N_1-1$；

对 P^2 和 P^3 中的剩余关联用情形 2.2 中的方法进行着色。

情形 2.9.2 $N_1=1$。

令 $\sigma(v_{N_1}^1 v)=(2,1), \sigma(v_{N_2-1}^2 v_{N_2}^2)=(3,1), \sigma(v_{N_2}^2 v)=(2,3), \sigma(v_{N_3-1}^3 v_{N_3}^3)=(4,1), \sigma(v_{N_3}^3 v)=(2,4)$。

对 P^2 中的剩余关联用情形 2.5 中的方法进行着色；

对 P^3 中的剩余关联，令 $\sigma(v_i^3 v_{i+1}^3)=\begin{cases}(1,3), i\equiv 1(\bmod 3)\\(2,4), i\equiv 2(\bmod 3)\\(3,2), i\equiv 0(\bmod 3)\end{cases}$，其中 $i=1,2,\cdots,N_3-2$。

情形 2.10 r_1, r_2 和 r_3 中一个等于 0，一个等于 1，一个等于 2。

一般地，令 $r_1=1, r_2=2, r_3=0$，则 $N_3 \geqslant 3$ 且由情形 1.3 有 $N_1 \geqslant 4$ 或 $N_2 \geqslant 5$。

情形 2.10.1 $N_1 \geqslant 4$ 且 $N_2=2$。

令 $\sigma(v_{N_1}^1 v)=(1,4), \sigma(v_1^2 v_2^2)=(3,2), \sigma(v_{N_2}^2 v)=(1,3), \sigma(v_{N_3}^3 v)=(1,2)$。对 P^1 中的剩余关联用情形 2.9.1 中的方法进行着色；对 P^2 中的剩余关联用情形 2.1 中的方法进行着色。

情形 2.10.2 $N_1 \geqslant 1$ 且 $N_2 \geqslant 5$。

令 $\sigma(v_{N_1}^1 v)=(2,1), \sigma(v_{N_2-1}^2 v_{N_2}^2)=(3,1), \sigma(v_{N_2}^2 v)=(2,3), \sigma(v_{N_3}^3 v)=(2,4)$。对 P^2 中的剩余关联用情形 2.10.2 中的方法进行着色；对 P^3 中的剩余关联用情形 2.8 中的方法进行着色。

情形 2.10.3 $N_1 \geqslant 4$ 且 $N_3 \geqslant 3$。

令 $\sigma(v_{N_1}^1 v)=(2,1), \sigma(v_{N_2-1}^2 v_{N_2}^2)=(3,1), \sigma(v_{N_2}^2 v)=(2,3), \sigma(v_{N_3}^3 v)=(2,4)$。对 P^1 和 P^2 中的剩余关联用情形 2.8 中的方法进行着色；对 P^3 中的剩余关联用情形 2.9.2 中的方法进行着色。

至此，θ-图中的所有关联均被着色。

把定理 1 与文献[7]中的定理 4.3 整合起来，易得定理 2。

定理 2 对 θ-图，若①$uv\in E(\theta)$，或②$N_1=N_2=N_3=1$，或③$N_1=N_2=N_3=2$，或④若 $uv\notin E(\theta)$ 且 N_1、N_2 和 N_3 三者中有一个等于 1，一个等于 2 时，则 $\chi_{AI}(\theta)=5$；否则，$\chi_{AI}(\theta)=4$。

由文献[7]中的定理 4.3 和本文定理 1 的证明可知，讨论 θ-图的邻点可区别关联色数时，与 $uv\in E(\theta)$ 时的情形比起来，$uv\notin E(\theta)$ 时的情形更复杂，因而其邻点可区别关联色数的确定更困难一些。

参考文献：

[1]张和平，欧阳克智．θ-图及其线图的连接数[J]．兰州大学学报，1992，28(3)：6-11.

ZHANG Heping，OUYANG Kezhi. The connections of θ-graph and its line graph[J]. Journal of Lanzhou University，1992，28(3)：6-11.

[2]刘林忠，吕新忠，韩金仓．θ-图的若干色数[J]．兰州铁道学院学报，1994，13(4)：125-127.

LIU Linzhong，LV Xinzhong，HAN Jincang. Some chromatics of θ-graph[J]. Journal of Lanzhou Railway Institute，1992，28(3)：451-405.

[3]王文杰，张忠辅．θ-图的邻强边染色[J]．新疆大学学报，2004，21(3)：237-239.

WANG Wenjie，ZHANG Zhongfu. On the adjacent strong edge coloring of θ-graph[J]. Journal of Xinjiang University，2004，21(3)：237-239.

[4]王治文，王莲花，王继顺，等．关于 θ-图的邻点可区别全染色[J]．兰州交通大学学报，2004，23(3)：13-15.

WANG Zhiwen，WANG Lianhua，WANG Jishun，et al. On the vertex-distinguishing totol coloring of θ-graph[J]. Journal of Lanzhou Jiaotong University，2004，23(3)：13-15.

（下转第 106 页）