第 31 卷 第 4 期
2012 年 8 月
Vol. 31 No. 4
Aug. 2012

Journal of Shandong University of Science and Technology
Natural Science

岩石抗压强度的 Bayes 推断

闫春岭

（安阳工学院 土木与建筑工程学院，河南 安阳 455000）

摘　要：由于获得岩石抗压强度大样本的困难性，对于一个具体工程而言，如何在有限的小样本条件下，推断岩石的抗压强度参数一直是研究的热点。从 Bayes 计算原理出发，结合岩石抗压强度分布的已有信息，随机抽取小样本数据，得到了岩石抗压强度后验分布统计量的计算公式。针对小样本计算出的均值、方差表达式，进行了工程检验。检验结果显示，后验分布的均值和标准差均得到了很好的修正，这表明 Bayes 统计对岩石抗压强度的推断是可行的，从而验证了方法的有效性。

关键词：抗压强度；Bayes 原理；先验分布

中图分类号：TU458.3　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1672-3767(2012)04-0076-04

Concluding for Compressive Strength of Rock Based on Bayesian Theorem

YAN Chunling

（School of Civil and Architectural Engineering，Anyang Insititute of Technology，Anyang，Henan 455000，China ）

Abstract：It is difficult to obtain a big enough sample for statistical study of compressive strength of the rock by site and laboratory experiments because of high cost and technical difficulties. More importance has been attached to inferring compressive strength of the rock for a small sample in the case of insufficient data in engineering design. Based on Bayesian theorem，post distributed formula has been gained for compressive strength of the rock by random small samples according to prior distributed message. According to the expressions of the mean and the variance by calculating through small samples，the results show the posterior distributions of the mean and standard deviation have been a very good amendment. This also shows it is feasible to infer the compressive strength of the rock by Bayesian theorem. Therefore，the results illustrated the validity of this method.

Key words：compressive strength；Bayesian theorem；prior distributing

岩体是一种变异性很大的各向异性体。工程设计中所需的岩体的抗压强度，通常是通过对试验数据进行统计，并考虑变异性折减得到的，不可避免地使数据带有很大的离散性[1-2]。产生这种离散性的原因大致可分为如下两类：岩体本身的问题和技术方面的问题[3-4]。前者主要来自岩石体本身所具有的不均匀性，通常是不可避免的；后者则是岩石在取样、运输、保管和试验过程中产生的，要将其完全消除也是不可能的。因此，有必要对岩石抗压强度进行概率统计分析，提高岩石抗压强度数据的准确性。

随着岩石力学的发展和工程实践的积累，我国大多数地区已具备获得大样本（$n \geqslant 50$）岩石抗压强度的条件，特别对某些地区有代表性的岩层，数据更多。在此条件下，利用已有资料获得岩石抗压强度的概率分布，对具体工程的小样本数据进行 Bayes 方法优化，具有重要意义。近年来，Bayes 方法在岩体工程中得到了广泛的应用。光耀华[5]、蒋树屏[6]应用 Bayes 理论，验证了该方法在岩石抗剪强度指标统计分析方面的有效性。徐军等[7-8]将模糊理论等引入岩体力学参数的推断中，为 Bayes 方法的应用进行了新的探讨。邓建等[9]

收稿日期：2012-05-03

基金项目：国家自然科学基金项目（41002093）

作者简介：闫春岭（1975—），男，河北滦南人，讲师，博士，主要从事土木工程方面的教学与研究.

E-mail：yanchunling2003@163.com

将信息论中的最大熵原理引入岩石力学参数的推导过程中，为 Bayes 方法提供了一种新的途径。上述学者的研究虽然取得了一定的成果，但仅局限于如何利用验前信息推导验后参数的概率分析，而没有将这种理论应用于岩石力学参数分布的推断。本研究基于 Bayes 原理，将已有数据和随机抽取小样本数据信息结合起来，得到一种后验分布的强度估计，提高了估计的精度。具体将从 Bayes 计算原理出发，对岩石抗压强度的概率分析方法进行探讨。

1 Bayes 计算原理

Bayes 方法[10]用于估计某随机变量的参数，可基本解决样本容量有限的问题。

1.1 后验分布概率密度的计算

设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 出自总体 X，并设 $F(x_i;\theta)$ 是 X 的分布函数，用式(1) 记样本的分布函数：

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n \mid \theta)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i;\theta)。\tag{1}$$

在 Bayes 估计中，既然 θ 是取值于参数空间 Θ 的随机变量，上述分布函数实际上就是在随机变量 θ 取定的条件下样本的分布，即式(1) 可相应改写为

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n \mid \theta)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i \mid \theta)。\tag{2}$$

设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的估计量，定义一个非负的二次损失函数：

$$L(\theta,\hat{\theta})=(\theta-\hat{\theta})^2。\tag{3}$$

显然，$L(\theta,\hat{\theta})$ 越小，表明估计的 $\hat{\theta}$ 越好，这里 θ 和 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots X_n)$ 都是随机变量，必须考虑样本和参数的联合分布，由概率论知，联合密度为

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)=g(x_1,x_2,\cdots,x_n \mid \theta)h(\theta)。\tag{4}$$

对于 θ 的一个估计 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，记

$$R(\hat{\theta})=\iint_{\Theta\,\lambda}L(\theta,\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n))g(x_1,x_2,\cdots,x_n \mid \theta)h(\theta)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\mathrm{d}\theta。\tag{5}$$

称 $\mathrm{R}(\hat{\theta})$ 是估计量 $\hat{\theta}$ 的 Bayes 风险，并称使用 Bayes 达到最小的估计 $\hat{\theta}_0$，即

$$R(\hat{\theta}_0)=\min R(\hat{\theta})。\tag{6}$$

为 θ 的 Bayes 估计。

Bayes 估计从定义上保证了它是在 Bayes 风险最小的意义下的最优估计，但对一般的损失函数，不容易直接求解。然而，若损失函数为二次损失函数式(3)，则容易求出来。事实上，此时简记

$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$，对式(5) 两边关于 $\hat{\theta}$ 求导，则有

$$\frac{\partial R(\hat{\theta})}{\partial(\hat{\theta})}=2\iint_{\Theta\,\lambda}(\theta-\hat{\theta}(\boldsymbol{x}))g(\boldsymbol{x} \mid \theta)h(\theta)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\theta。$$

令上式右边为 0，交换积分次序，并利用式(4)，得

$$\iint_{\Theta\,\lambda}\theta g(\boldsymbol{x} \mid \theta)h(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\iint_{\Theta\,\lambda}\hat{\theta}(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x} \mid \theta)h(\theta)\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{\lambda}\hat{\theta}(\boldsymbol{x})(\int_{\Theta}g(\boldsymbol{x},\theta)\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}\boldsymbol{x}。\tag{7}$$

显然，若令

$$\hat{\theta}_0(\boldsymbol{x})=\int_{\Theta}\theta h(\theta \mid \boldsymbol{x})\mathrm{d}\theta,\tag{8}$$

其中

$$h(\theta \mid \boldsymbol{x})=h(\theta \mid x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{g(\boldsymbol{x} \mid \theta)h(\theta)}{\int_{\Theta}g(\boldsymbol{x},\theta)\mathrm{d}\theta}。\tag{9}$$

将式(8)、(9) 代入式(7)，即知($\hat{\theta}_0(\boldsymbol{x})$) 是方程(7) 的解，亦即 $\hat{\theta}_0(\boldsymbol{x})$ 满足式(6)，从而是 θ 的 Bayes 估计。$h(\theta \mid \boldsymbol{x})$ 为 θ 的后验分布。并且在二次损失函数下，θ 的 Bayes 估计 $\hat{\theta}_0$ 即为 θ 的后验期望值。

1.2 Bayes方法的优越性

同古典统计方法相比较，Bayes方法具有如下优点[11-13]：

1) Bayes方法将参数视为随机变量，而古典方法则是当作未知的常数；

2) Bayes方法将对问题的判断和观测数据结合起来考虑，将概率看成置信程度的表示，而古典方法视概率为可验证的相对频率的尺度；

3) Bayes方法将估测中的误差和问题本身的不确定性，系统地联系起来。

2 岩石抗压强度的Bayes推断

2.1 Bayes样本分析

Bayes方法不同于经典概率法的一个突出特点，就是充分利用了验前信息（包括现场试验数据、历史数据及专家信息等）对问题进行合理的统计推断，得出后验信息。

假设在一个随机试验中，有 n 个相互排斥的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$。如果以 $P(A_i)$ 表示事件 A_i 发生的概率，那么 $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$，记 B 为任一事件，则有：

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i) P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i) P(A_i)}。\tag{10}$$

其中，$i = 1, 2, \cdots, n$。式(10)即式(9)离散情况下的Bayes公式。式中 $\{P(A_1), P(A_2), \cdots, P(A_n)\}$ 称为前验分布；B 为试验发生的事件；$P(A_i \mid B), i = 1, 2, \cdots, n$ 为后验分布，它综合了验前信息和试验所提供的新信息。这个由验前到验后信息的转化，是Bayes样本统计的基础[10]。

2.2 Bayes方法在岩石抗压强度中的应用

由于岩土工程试验成本昂贵，人们希望试验的次数越少越好。因此，进行验前信息的Bayes推断显得尤为重要。以岩石抗压强度为例，设岩石抗压强度为一随机变量，以 X 表示，$X_1, X_2, \cdots, X_n$，为 X 的样本，大量的统计资料表明，以正态分布描述 X 比较合适[14-16]，即 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$。由小样本计算出的均值和方差分别为 v 和 τ^2。可求得在二次损失函数下 μ 和 σ^2 的Bayes估计：

$$\hat{\mu} = (\frac{n\overline{X}}{\sigma^2} + \frac{v}{\tau^2}) / (\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2})；\tag{11}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n\sigma^2\tau^2}{n\tau^2 + \sigma^2}。\tag{12}$$

3 工程实例

3.1 实例一

试样取自康家湾铅锌金矿Ⅲ-1号矿体上盘围岩，在进行单轴压缩试验前，首先采用型号为2S-100立式钻石机钻取直径为50 mm的试样50个，利用型号为D0-1的自动岩石切割机切成50 mm×100 mm标准试样，然后采用型号为SHM-200的双端面磨石机磨平标准岩样的上下底面。采用RMT-150B伺服控制试验系统对其进行单轴压缩试验。共制作了50个试样，获得了50个试验数据（表1）。

样本服从正态分布，样本均值 $\mu = 88.87$，$\sigma^2 = 11.99^2$，即先验分布服从 $N(88.87, 11.99^2)$。

现随机抽取两组数据，每组均为5个，Ⅰ组：98.720，102.964，93.163，72.375，94.783；Ⅱ组：67.642，97.033，108.283，95.627，91.978。由此计算出Ⅰ组中 $v = 92.401$，$\tau^2 = 11.819^2$；Ⅱ组中 $v = 92.113$，$\tau^2 = 14.974^2$。

根据式(11)和式(12)可以算出 X 后验分布的均值和标准差。Ⅰ组为：$\hat{\mu} = 88.99$，$\hat{\sigma}^2 = 11.88^2$；Ⅱ组为：$\hat{\mu} = 88.285$，$\hat{\sigma} = 11.914^2$。

由Ⅰ、Ⅱ两组计算结果可以看出，后验分布的均值和标准差均与总体样本的均值和标准差较为接近，得出该方法是可行的。

表 1 围岩单轴抗压强度的测试结果(实例一)

Tab.1 The test results of rock uniaxial compressive strength MPa

序号	试验值	序号	试验值	序号	试验值	序号	试验值	序号	试验值
1	67.642	11	88.417	21	91.548	31	88.859	41	95.767
2	72.375	12	57.673	22	96.758	32	89.720	42	78.189
3	73.982	13	83.799	23	87.071	33	91.866	43	92.808
4	97.033	14	80.110	24	97.322	34	97.131	44	105.685
5	119.539	15	97.754	25	84.566	35	78.986	45	91.978
6	88.859	16	110.826	26	87.285	36	93.939	46	75.319
7	84.708	17	99.579	27	91.127	37	75.601	47	92.796
8	63.425	18	108.283	28	88.013	38	88.154	48	85.446
9	70.749	19	82.159	29	81.933	39	83.955	49	95.627
10	106.596	20	94.783	30	91.790	40	102.964	50	93.163

3.2 实例二

某露天矿边坡工程中,通过室内岩石力学试验得到的某种岩石的 50 个抗压强度数据(单位:MPa)[9]:

29.0,30.4,31.7,26.0,28.2,27.9,26.5,27.4,29.9,28.8,29.1,30.2,25.2,26.8,29.3,27.3,28.0,29.8,28.0,30.1,27.1,28.3,32.4,29.6,30.9,30.6,30.7,28.3,31.5,26.4,31.1,27.8,29.6,27.3,28.2,29.5,31.3,30.6,29.4,27.6,28.2,25.7,28.5,28.7,31.3,29.4,28.9,28.4,29.2,31.0。

样本服从正态分布,样本均值 $\mu=28.942$,$\sigma^2=2.806$ 即先验分布服从 $N(28.942,1.675^2)$。

现随机抽取 3 个数据,分别为 29.6,27.1,31.1,由此计算出 $v=29.267$,$\tau^2=2.021^2$。根据式(11)和式(12),可以算出 X 后验分布的均值和标准差为:$\hat{\mu}=29.252$,$\hat{\sigma}^2=1.651^2$。

由实例可知,后验分布的均值及方差均得到了修正。因此,对于某一确定的场地,采用 Bayes 方法进行概率分析,既考虑了工程经验,又大大减少了样本数量,且修正结果更为合理。

4 结语

从 Bayes 的基本原理出发,结合岩石抗压强度分布的已有信息,随机抽取小样本数据,得到岩石抗压强度后验分布统计量的计算公式,探讨了 Bayes 原理在该领域的应用。将对利用可靠性原理,特别是针对具体工程的小样本数据,利用 Bayes 方法进行概率分布参数的优化起到极为重要的作用,并具有较高的实用价值。值得注意的是,该方法必须建立在数据搜集形成的大样本基础上,否则结果没有实际意义。

参考文献:

[1]KIM K,GAO H. Probabilistic approaches to estimating variation in mechanical properties of rock mass[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts,1995,32(2):111-120.

[2]严春风,陈洪凯,张建辉.岩石力学参数的概率分布的 Bayes 推断[J].重庆建筑大学学报,1997,19(2):65-71.

YAN Chunfeng,CHEN Hongkai,ZHANG Jianhui. The use of Bayesian method to infer distribution of mechanical parameters[J]. Journal of Chongqing Jianzhu University,1997,19(2):65-71.

[3]松尾・稔(日).地基工程学:可靠性设计的理论与实际[M].北京:人民交通出版,1990.

[4]王俊杰,陈爱玖,姬凤玲.岩土参数的概率分布拟合及 Bayes 方法优化[J].华北水利水电学院学报,2004,25(2):51-54.

WANG Junjie,CHEN Aijiu,JI Fengling. Probability distribution fitting and Bayes method optimization on geotechnical parameter[J]. Journal of North China Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power,2004,25(2):51-54.

[5]光耀华.岩石抗剪强度指标的概率分析[J].岩石力学与工程学报,1994,13(4):349-356.

GUANG Yaohua. The analysis on reliability of index of shear strength of rock[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering,1994,13(4):349-356.

(下转第 89 页)