

大间距无相关边界 Fisher 鉴别分析

梁兴柱¹, 林玉娥¹, 李敬兆¹, 林玉荣²

(1. 安徽理工大学 计算机科学与工程学院, 安徽 淮南 232001;

2. 哈尔滨工业大学 航天学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要:针对边界 Fisher 鉴别分析方法存在的小样本问题以及所求出的鉴别矢量集缺少约束限制的缺陷, 提出了一种大间距无相关边界 Fisher 鉴别分析方法。该方法采用最大化描述样本数据可分性和紧致性的矩阵之差作为目标函数, 避免了边界 Fisher 鉴别分析的小样本问题; 对于无相关鉴别矢量集的求解, 给出了先构造无相关空间, 再进行特征值分解的求解策略。仿真结果表明, 该方法在识别性能上优于已有的边界 Fisher 鉴别分析及其改进方法, 且避免了使用繁琐的迭代方法求解不相关鉴别矢量集, 具有一定的实用价值。

关键词:大间距; 无相关; 边界 Fisher 鉴别分析; 目标函数; 小样本问题

中图分类号: TP391.4

文献标志码: A

文章编号: 1672-3767(2013)01-0084-04

Analysis of Maximum Marginal Uncorrelated Marginal Fisher

Liang Xingzhu¹, Lin Yu'e¹, Li Jingzhao¹, Lin Yurong²

(1. School of Computer Science & Engineering, Anhui University of Science and Technology, Huainan, Anhui 232001, China;

2. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150001, China)

Abstract: Aiming at the shortcomings of the marginal Fisher analysis, such as small sample size problems and obtained discriminant vectors lack of constraints, a maximum marginal uncorrelated marginal Fisher analysis was proposed. By adopting the maximum margin between matrices which characterize the divisibility and compactness of data as the object function, the proposed method avoids the small sample size problems in the marginal Fisher analysis. As to the computation of the uncorrelated discriminant vectors, the uncorrelated space is computed firstly and then the standard eigenvalue problem is solved. Simulation results show that the new method, which is superior to the existing marginal fisher analysis and its improved methods in the recognition performance, also avoids using the iterate method for the uncorrelated discriminant vectors and has some practical value.

Key words: maximum marginal; uncorrelated; marginal Fisher analysis; object function; small sample size problem

近年来, 基于图的特征提取算法^[1-2]受到学者们的广泛关注。边界 Fisher 鉴别分析(marginal Fisher analysis, MFA)^[3]是一种基于图的特征提取方法, 该方法综合了保局投影方法和线性鉴别分析方法^[4]的优点, 通过构造类内图来描述类内数据的紧致性, 通过构造类间图来描述类间数据的可分性, 然后通过二者的比值构造其准则函数即边界 Fisher 准则。文献[5]在边界 Fisher 鉴别分析基础上, 给出了正交 MFA 和无相关 MFA 来进一步提高 MFA 算法的识别性能(本文仅讨论无相关 MFA), 但是文献[5]采用迭代法求无相关鉴别矢量集, 计算时间长, 并且和原 MFA 方法一样, 在应用于人脸识别等模式识别问题时, 均受到小样本问题的制约, 目标函数中存在矩阵奇异的问题。

收稿日期: 2012-11-12

基金项目: 国家自然科学基金项目(60975009); 安徽省自然科学基金项目(1208085QF123); 安徽省高等学校自然科学基金项目(KJ2012Z084); 安徽理工大学青年教师科学研究基金项目(2012QNZ10)

作者简介: 梁兴柱(1979—), 男, 安徽长丰人, 讲师, 主要从事模式识别及网络安全方面的研究。E-mail: lxz9117@126.com

据此,本研究提出了一种大间距无相关边界 Fisher 鉴别分析(maximum margin uncorrelated marginal Fisher analysis,MMUMFA)方法。该方法为了避免 MFA 方法中矩阵的奇异性问题,采用大间距的鉴别准则^[6],避免了矩阵求逆,解决了小样本问题;同时,为了增强算法的识别性能,对鉴别矢量集进行无相关的限制,并给出一种非迭代计算方法。仿真实验表明,方法的识别性能明显优于 MFA,而且计算速度明显优于文献^[5]提出的方法,因此本文的算法具有更强的适应性和更高的实用价值。

1 MFA 算法

MFA 通过构造类内紧致矩阵 S 来描述类内数据的紧致性,即每个样本只与同类样本中的 k_1 近邻相连;通过构造紧致矩阵 B 来描述类间数据的可分性,只有不同类样本的 k_1 近邻相连。

$$S_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i \in N_{k_1}(j) \text{ or } j \in N_{k_1}(i) \\ 0, & \text{others} \end{cases}, \quad (1)$$

其中: $N_{k_1}(i)$ 表示同一类中第 i 个样本的 k_1 个最近邻样本。

$$B_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } (i,j) \in P_{k_2}(c_i) \text{ or } P_{k_2}(c_j) \\ 0, & \text{others} \end{cases}, \quad (2)$$

其中: $P_{k_2}(c)$ 表示不同类的 k_2 个最近邻样本。MFA 的准则函数定义为

$$W = \min_w \frac{\text{tr}(W^T X L_w X^T W)}{\text{tr}(W^T X L_B X^T W)}. \quad (3)$$

其中: $L_w = D_w - S, L_B = D_B - B, D_w$ 和 D_B 都是对角矩阵,其对角元素分别为 $(D_w)_{ii} = \sum_j S_{ij}$ 和 $(D_B)_{ii} = \sum_j B_{ij}$ 。式(3)的求解可转换为广义特征值求解问题,即

$$X L_w X^T w_i = \lambda_i X L_B X^T w_i, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (4)$$

具体求解及证明请参见文献^[3]。

2 大间距无相关边界 Fisher 鉴别分析

2.1 MMUMFA 的目标函数

首先,给出无相关鉴别矢量集的定义。

定义 1 假设 X 为训练样本, $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r]$ 为鉴别矢量集,则 X 在 Φ 上的投影为 $Y = [y_1, \dots, y_r]^T = [\varphi_1, \dots, \varphi_r]^T X$,对于投影变换后 Y 中的任意两个分量的无相关性若满足 $E\{[y_j - E y_j]^T [y_i - E y_i]\} = \varphi_j^T S_i \varphi_i, \varphi_j^T S_i \varphi_i = 0 (j \neq i)$,且 $\varphi_j^T S_i \varphi_i = 1$,则称矢量集 Φ 是无相关的。

S_i 为总体散布矩阵,其定义为

$$S_i = \sum_{i=1}^N (x_i - m)(x_i - m)^T. \quad (5)$$

其中, m 为样本的总体均值向量。

根据定义 1 可知,若要使所求得的鉴别矢量集 W 具有无相关性, W 应满足

$$W^T S_i W = I. \quad (6)$$

结合式(6),MMUMFA 的目标函数定义为

$$W = \max_{W^T S_i W = I} \text{tr}(W^T X L_B X^T W - W^T X L_w X^T W). \quad (7)$$

MMUMFA 目标函数的意义是在保证所求鉴别矢量集满足无相关性的同时,使得降维后的类间数据尽可能地远离,而类内数据尽可能地靠近。

2.2 MMUMFA 目标函数的求解

对于 MMUMFA 鉴别矢量集 W 的求解,本文提出一种非迭代求解方法。为了保证 W 具有无相关性,可先求出满足 $V^T S_i V = I$ 条件的 V, V 称之为无相关空间。先假设 W 能够表示为 $W = VT$,其中, $T \in \mathbf{R}^{m \times d}$ 且有 $T^T T = I_d, m = \text{rank}(S_i)$ 。假设 d 为要选取的鉴别矢量个数,则式(7)可转换为

$$W = \max_{W^T S_i W = I} \text{tr}((VT)^T Z_B (VT) - (VT)^T Z_w (VT)). \quad (8)$$

其中: $Z_B = XL_B X^T$, $Z_w = XL_w X^T$. 对式(8)进一步化简可得

$$T = \max_{T^T T = I} \text{tr}(T^T Z_B^V T - T^T Z_w^V T). \quad (9)$$

其中: $Z_B^V = V^T XL_B X^T V$, $Z_w^V = V^T XL_w X^T V$. 因此, 算法最终可转换为求解使得式(9)达到最大值的一组正交鉴别矢量集 T . 根据 Lagrange 乘子法, 式(9)的求解实际上就是求下面广义特征值问题

$$(Z_B^V - Z_w^V) t_i = \lambda_i t_i. \quad (10)$$

最后, 选择前 d (通常 $d < l$) 个最大特征值所对应的特征向量 t_1, t_2, \dots, t_d . 因此 MMUMFA 所求的无相关鉴别矢量集实际上为 $W = VT$.

根据上述分析, 对于 MMUMFA 目标函数的求解, 首先要求出满足 $V^T S_i V = I$ 的 V , 对此可通过矩阵的特征值分解得到, 由于 S_i 为对称的非负定阵, 因此可分解为

$$S_i = U \begin{bmatrix} \Sigma_m^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^T. \quad (11)$$

其中: U 为正交矩阵, $U = (U_1, U_2)$, $U_1 \in R^{D \times m}$, $U_2 \in R^{D \times (N-m)}$, U_1 为 S_i 非零特征值所对应的特征向量, Σ_m^2 是按降序排列的对角阵. 设 $P = U_1 \Sigma_m^{-1}$, 则 P 满足

$$P^T S_i P = \Sigma_m^{-1} U_1^T S_i U_1 \Sigma_m^{-1} = \Sigma_m^{-1} (U_1^T S_i U_1) \Sigma_m^{-1} = \Sigma_m^{-1} \Sigma_m^2 \Sigma_m^{-1} = I. \quad (12)$$

由此可知, P 即满足 $V^T S_i V = I$ 的无相关空间 V . 对于 MMUMFA 的具体实现步骤总结如下:

- ① 分别根据式(1)、式(2)和式(5) 求出 L_w, L_B 和 S_i ;
- ② 对 S_i 进行特征值分解, 求出无相关空间 $V = U_1 \Sigma_m^{-1}$;
- ③ 分别计算出 $Z_B^V = V^T XL_B X^T V$, $Z_w^V = V^T XL_w X^T V$;
- ④ 对式(10) 进行特征值分解, 求出 T ;
- ⑤ 选 T 前 d 个最大特征值所对应的特征矢量 t_i , $T = (t_1, t_2, \dots, t_d)$;
- ⑥ 令 $W = VT$, 则 W 即为所求的最优投影矩阵, 即无相关鉴别矢量集.

3 实验结果与讨论

为了验证 MMUMFA 的性能, 应用 AR^[7] 人脸库进行实验, 实验中采用最近邻方法进行分类.

AR 人脸库包含 120 人的 4000 多幅图像, 由于人脸数目较多, 实验中选择 100 人子集, 该子集每人 15 幅图像, 图像的尺寸为 80 像素 \times 100 像素. 分别选择 AR 人脸库前 5 幅图像作为训练样本, 剩余作为测试样本, 对 MMUMFA 与 MFA 在提取不同特征数目时的识别性能进行了比较, 实验结果如图 1 所示. 图 2 为选用前 3~10 幅图像作为训练样本数目, 后 12~15 幅作为测试样本时, 两种算法识别率的比较.

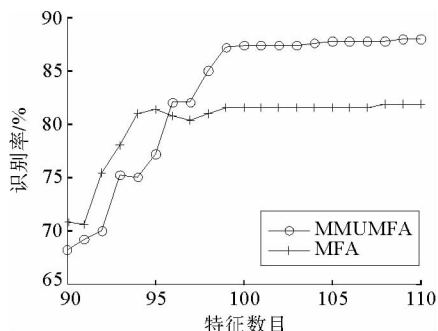


图 1 AR 人脸库识别率随维数的变化图
Fig. 1 Recognition rate with different dimensions on AR face database

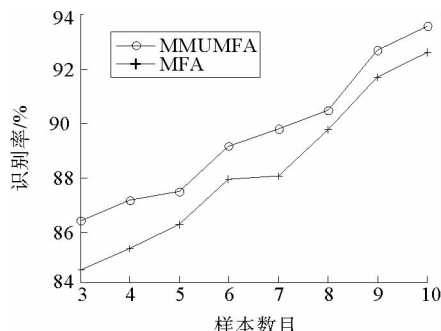


图 2 训练样本数目变化时两种方法的性能比较图
Fig. 2 Performance comparison of two methods with different training samples

图 1 对 MMUMFA 与 MFA 在提取不同特征数目时的识别率进行了比较,结果表明,MMUMFA 并不是一直优于 MFA 的识别结果,在特征数目超过 95 个时,MMUMFA 逐渐取得了较好的识别结果,在大约 100 个(与样本的类别数目 C 一致)时取得了最好的识别结果,明显优于 MFA 的识别结果,并且随着特征数目的增加,识别率也一直保持基本不变,因此实验中对于两个算法均提取 C 个特征矢量进行比较;图 2 则表明,无论训练样本如何变化,MMUMFA 都取得了好于 MFA 的识别结果,进一步说明本文算法能够提取出更为有效的鉴别特征。

由于本文提出的 MMUMFA 方法与文献[5]算法都属于具有不相关性的特征提取方法,因此从时间和识别率两方面对这两个方法进行了比较。分别选取子集的 50 人和 100 人进行两组实验,每人随机选取 5 幅图像作为训练样本,剩余的图像作为测试样本,每组实验重复进行 10 次,对识别率和求取时间的平均值进行比较,实验结果如表 1 所示。

从表 1 可以看出,MMUMFA 在时间上明显优于文献方法,当样本类别较少时,两种算法均能较快地求解出鉴别矢量集;当样本类别数目较多时,MMUMFA 仅用了 23.1 s,而文献[5]方法用了 220.5 s,大约是 MMUMFA 的 10 倍。这是因为 MMUMFA 是一种非迭代方法,具有较快的求解速度。在识别率上,本文方法也优于文献[5],说明本文的非迭代方法数值解更加稳定,适应性更强。

4 结束语

以 MFA 为理论基础,提出一种新的特征提取算法——MMUMFA 算法。该算法利用矩阵之差作为准则函数,避免了矩阵求逆;对于 MMUMFA 的具体求解,给出了一种非迭代方法,不仅求解速度较快,而且数值解稳定。最后,在 AR 人脸库的实验结果验证了算法的正确性和有效性。将该方法扩展成为非线性方法,从而增强其识别效率和适应性,是下一步的研究内容。

参考文献:

[1]He X F, Yan S C, Hu Y, et al. Face recognition using Laplacian faces[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2005, 27(3): 328-340.

[2]He X F, Niyogi P. Locality preserving projections[C]//Advances in Neural Information Processing Systems. Cambridge, MA: MIT Press, 2004: 153-160.

[3]Xu D, Yan S, Tao D, et al. Marginal Fisher analysis and its variants for human gait recognition and content-based image retrieval[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(11): 2811-2821.

[4]Belhumeur P N, Hespanha J P, Kriegam D J. Eigenfaces vs. Fisherfaces; Recognition using class specific linear projection [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1997, 19(7): 711-720.

[5]于耀亮,张立明. 正交 MFA 和不相关 MFA[J]. 模式识别与人工智能, 2008, 21(5): 604-608.
Yu Yaoliang, Zhang Liming. Orthogonal MFA and uncorrelated MFA[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2008, 21(5): 604-608.

[6]Li H F, Jiang T, Zhang K S. Efficient and robust feature extraction by maximum margin criterion[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2006, 17(1): 1157-1165.

[7]Martinez A M, Benavente R. The AR face database[EB/OL]. [2012-10-12]. http://cobweb.ecn.purdue.edu/~aleix/aleix_face_DB.html.

(责任编辑:吕文红)

表 1 两种方法性能比较表

Tab. 1 Performance comparison of two methods

算法	识别率/%		时间/s	
	50 人	100 人	50 人	100 人
MMUMFA	89.80	87.25	6.2	23.1
文献[5]算法	88.40	86.60	21.1	220.5