第 32 卷 第 1 期
2013 年 2 月

Vol.32 No.1
Feb.2013

Journal of Shandong University of Science and Technology
Natural Science

扩展原理下区间二型模糊 Mealy 自动机的语言动力系统

周　敏,伍瞻林,何　青,雷　辉

(长沙理工大学 电气与信息工程学院,湖南 长沙 410004)

摘　要:运用区间二型模糊集合的扩展原理,将 Mealy 自动机转化为区间二型模糊 Mealy 自动机(interval type-2 fuzzy Mealy automata,IT2FMA),提出了应用 IT2FMA 作为词计算的形式模型来研究语言动力系统,分析了 IT2FMA 输入分别为数值符号串和词串时间复杂度的关系,研究了 IT2MFA 下的语言动力学轨迹。通过供水控制系统验证了模型的可行性和有效性,结果表明:通过选择合适的状态转移函数和输出函数,当输入变化时,IT2FMA 能做出正确的决策。

关键词:扩展原理;区间二型模糊集合;词计算;Mealy 自动机;语言动力系统

中图分类号:TP301.1　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-3767(2013)01-0095-08

Linguistic Dynamic Systems of Interval Type-2 Fuzzy Mealy Automata Based on Extension Principle

Zhou Min,Wu Zhanlin,He Qing,Lei Hui

(School of Electric and Information Engineering,Changsha University of Science and Technology, Changsha,Hunan 410004,China)

Abstract:The extension principle of interval type-2 fuzzy sets was used to convert Mealy automata to the corresponding interval type-2 fuzzy Mealy automata (IT2FMA),and IT2FMA was proposed as the formal model of computing with words to study the linguistic dynamic system(LDS). In addition,the relation of time complexity for a IT2FMA computing string of words in comparison to a computing string of symbols was analyzed,and then the linguistic dynamic orbits based on IT2MFA were studied. Through the water supply control system,the feasibility and the validity of the model were verified. The results demonstrate that IT2FMA can make the right decision by choosing appropriate state transfer function and output function when input changes.

Key words:extension principle;interval type-2 fuzzy sets;computing with words;Mealy automata;linguistic dynamic systems

模糊集合[1](一型模糊集合)作为一种描述模糊性、不确定性的有效方法,在理论研究与实践中发挥了重要作用[2-3]。实质上,模糊集合是一个精确值函数,用于描述和处理不精确的信息是不合适的。相对于一型模糊集合而言,二型模糊集合(Type-2 fuzzy sets,T2 FSs)为人们确定隶属函数提供了更大的自由度,可以较好地解决非结构化动态环境下的语言歧义和数据噪声等问题。

收稿日期:2012-09-27

基金项目:国家自然科学基金项目(61074093);湖南省科技计划项目(GK3064);湖南省教育厅优秀青年项目(10B003);中国科学院自动化研究所复杂系统管理与控制国家重点实验室开放课题;长沙理工大学人才引进计划项目;长沙理工大学“青年英才支持计划”项目

作者简介:周　敏(1988—),男,湖南益阳人,硕士研究生,主要从事语言动力系统、词计算方面的研究.

E-mail:zhoumin8995507@126.com

二型模糊集合广泛应用于机器人[4]、飞行器控制[5]和卡尔曼滤波[6]等领域。但是,由于二型模糊集合具有三维属性,难以用图形表示,人们不易写出其数学表达式,从而导致运算过程非常复杂。Mendel 等[7]提出了区间二型模糊集合(interval type-2 fuzzy sets, IT2 FSs);Wu 等[8]运用区间二型模糊集合方法研究了语言摘要的数据挖掘方法; Mo 等[9-10]研究了基于区间二型模糊集合的语言动力学轨迹及其稳定性,并提出了广义区间二型模糊集合学表达式与扩展原理公式,将其应用于词计算的研究之中;Mortaza 等[11]以传统的 PI(proportional integral)控制器为基础,设计了区间二型模糊逻辑控制器。

自动机是研究抽象计算装置或"机器"的数学模型。自动机理论在计算机科学、电子工程、语言学和逻辑学等学科中有着广泛应用[12-14],随着自动机理论的发展,出现了各种自动机的变形,包括双向有穷状态自动机和带输出的有穷状态自动机。其中,自动机的先驱 Mealy 自动机(Mealy automata, MA)[15]就是一种带输出的有穷状态自动机的重要模型。1971 年,Asai 等提出了 Mealy 型模糊有限自动机和 Moore 型模糊有限自动机,并证明了它们的等价性[16];文献[17]研究了 Mealy 模糊有限自动机的最小化算法;汪洋等[18]讨论了基于模糊字符串的 Mealy 格值有限自动机,利用行为矩阵研究了扩张的完备 Mealy 格值有限自动机的最小化。

为了在语言的层次上解决复杂系统的建模、分析、控制和评估问题,Wang[19-20]以词计算(computing with words, CW)为基础,提出了语言动力系统(linguistic dynamic systems, LDS)理论,莫红等[9,21]运用扩张原理将常规的数值动力系统转化成对应的语言动力系统,并分析了相应的动力学性质。在语言动力系统研究中,采用词计算取代常规的数值符号计算。词计算是一种借助自然语言的不精确性和模糊性来对人类的模糊思维进行模拟的计算范式,通过模拟人的大脑在不精确、不确定、部分真实数据环境下做出基于感知的理性决策过程来解决现实世界中的问题[2,22]。区间二型模糊 Mealy 自动机作为词计算的形式模型,为语言动力系统的研究提供了形式化的新工具。

本研究运用区间二型模糊集合的扩展原理,将 Mealy 自动机转化为区间二型模糊 Mealy 自动机,以此作为词计算的形式模型,并应用于供水系统的语言动力学轨迹分析。

1 预备知识

在论域 U 上给定一个映射 $A:U\to[0,1]$, $u\mapsto A(u)$,称 A 为 U 上的模糊集合,对任意 $u\in U$,存在 $a\in[0,1]$,使得 $A(u)=a$,其中 $A(u)$ 为元素 u 对 A 的隶属度。

论域 U 上的二型模糊集合 $\widetilde{A}=\{((u,x),\mu_{\widetilde{A}}(u,x))\mid \forall_u\in U,\forall_x\in J_u\subseteq[0,1]\}$,其中,$\mu_{\widetilde{A}}(u,x)$ 为二型模糊集合的主隶属函数,且 $0\leqslant\mu_{\widetilde{A}}(u,x)\leqslant 1, u\in U, x\in J_u\subseteq[0,1]$,$J_u$ 为 u 的主隶属度。

若 U 连续,则 $\widetilde{A}=\int_{u\in U}\int_{x\in J_u}\frac{\mu_{\widetilde{A}}(u,x)}{(u,x)}, J_u\subseteq[0,1]$。其中,$\int$ 表示该运算要遍历所有的 u 和 x,若 U 离散,则 $\int$ 用 $\sum$ 取代。

若 $\mu_{\widetilde{A}}(u,x)=1$,则称 $\widetilde{A}$ 为区间二型模糊集合,$\widetilde{A}=\int_{u\in U}\int_{x\in J_u}\frac{1/x}{u}, J_u\subseteq[0,1]$。其中,$\int$ 定义同上,若 U 离散,则 $\int$ 用 $\sum$ 取代,论域 U 上区间二型模糊集合的全体记为 $\Gamma(U)$。

下面回顾 Mealy 自动机的定义[23-24]。

定义 1 Mealy 自动机是一个六元组 $M=(Q,\Sigma,\Delta,\delta,\lambda,q_0)$。其中:

Q— 状态的非空有限集合,$\forall q\in Q$,q 称为 M 的一个状态;Σ— 输入字母表,输入字符串都是 Σ 上的字符串;q_0—M 的初始状态,$q_0\in Q$;δ— 状态转移函数,$\delta:Q\times\Sigma\to Q$,对 $\forall(q,a)\in Q\times\Sigma$,$\delta(q,a)=p$ 表示 M 在状态 q 读入字符 a,将状态变成 p,并将读头向右移动一个带方格而指向输入字符串的下一个字符;Δ— 输出字母表;λ— 输出函数,$\lambda:Q\times\Sigma\to\Delta$,对 $\forall(q,a)\in Q\times\Sigma$,$\lambda(q,a)=d$ 表示 M 在状态 q 读入字符 a 时输出 d。

2 区间二型模糊 Mealy 自动机

由于 Mealy 自动机是带有输出的自动机，同其他自动机相比，不仅能判定一个输入字符串是否为要求的结论，还能给出字符串处理过程中必要的中间结果。从抽象的角度考虑，已经没有必要设计终端状态集，而可以将 Mealy 自动机看成是输入数值符号串和状态之间计算和推理的模型。

众所周知，Mealy 自动机同其他自动机一样，输入字母表由有限的符号组成，然而它只能处理精确的数字和符号，也就是测度信息。在现实中，模糊、不确定、不精确的信息到处可见，这些信息对于人类认识和改造客观世界是必不可少的，为了能有效地利用这些感性信息，运用扩展原理[2]将 Mealy 自动机转化为区间二型模糊 Mealy 自动机。本文中所涉及的"词"(语言术语) 均为离散区间二型模糊集合，对于半离散和连续区间二型模糊集合描述的词，则进行离散化处理。

定义 2 区间二型模糊 Mealy 自动机是一个六元组 $\hat{M}=(\Gamma(Q),\Gamma(\Sigma),\Gamma(\Delta),\hat{\delta},\hat{\lambda},Q_0)$。其中：

$\Gamma(Q)$— 状态集 Q 上的区间二型模糊子集的全体。

$\Gamma(\Sigma)$— 输入字母表 Σ 上的区间二型模糊子集的全体。

$\Gamma(\Delta)$— 输出字母表 Δ 上的区间二型模糊子集的全体。

$\hat{\delta}$— 状态转移区间二型模糊函数 $\hat{\delta}:\Gamma(Q)\times\Gamma(\Sigma)\rightarrow\Gamma(Q)$。对 $\forall(Q_k,A)\in\Gamma(Q)\times\Gamma(\Sigma)$，当 Q_k 为清晰词 q 时，$\hat{\delta}(q,A)=\bigcup_{u\in\Sigma}[A(u)\cdot\delta(q,u)]$ 表示 $\hat{M}$ 在状态 q 读入词 A，将进入的下一个状态；当 Q_k 为模糊词时，$\hat{\delta}(Q_k,A)=\bigcup_{q\in Q}[Q_k(q)\cdot\hat{\delta}(q,A)]$ 表示 $\hat{M}$ 在状态 Q_k 读入词 A，将进入的下一个状态。其中 Q_k 和 A 分别为状态集 Q 和输入字母表 Σ 上的区间二型模糊集合。

$\hat{\lambda}$— 输出区间二型模糊函数，$\hat{\lambda}:\Gamma(Q)\times\Gamma(\Sigma)\rightarrow\Gamma(\Delta)$。对 $\forall(Q_k,A)\in\Gamma(Q)\times\Gamma(\Sigma)$，当 Q_k 为清晰词 q 时，$\hat{\lambda}(q,A)=\bigcup_{u\in\Sigma}[A(u)\cdot\lambda(q,u)]$ 表示 $\hat{M}$ 在状态 q 读入词 A 将输出的下一个状态；当 Q_k 为模糊词时，$\hat{\lambda}(Q_k,A)=\bigcup_{q\in Q}[Q_k(q)\cdot\hat{\lambda}(q,A)]$ 表示 $\hat{M}$ 在状态 Q_k 读入词 A 将输出的下一个状态。其中，Q_k 和 A 分别为状态集 Q 和输入字母表 Σ 上的区间二型模糊集合。

Q_0—$\hat{M}$ 的初始状态，为区间二型模糊集合。

为了处理模糊状态以及输入字母表上的词(区间二型模糊集合) 串，可以进一步扩展 $\hat{\delta},\hat{\lambda}$ 为

$$\hat{\delta}:\Gamma(Q)\times\Gamma(\Sigma)^{*}\rightarrow\Gamma(Q);\quad \hat{\lambda}:\Gamma(Q)\times\Gamma(\Sigma)^{*}\rightarrow\Gamma(\Delta)。$$

这里，$\Gamma(\Sigma)^{*}$ 为 $\Gamma(\Sigma)$ 的克林闭包，得状态转移函数 $\hat{\delta}(Q_k,\varepsilon)=Q_k$，$\hat{\delta}(Q_k,WA)=\hat{\delta}(\hat{\delta}(Q_k,W),A)$；输出函数 $\hat{\lambda}(Q_k,\varepsilon)=\phi$，$\hat{\lambda}(Q_k,WA)=\hat{\lambda}(\hat{\lambda}(Q_k,W),A)$。

对于任意的 $Q_k\in F(Q)$，$W\in\Gamma(\Sigma)^{*}$ 和 $A\in\Gamma(\Sigma)$ 都成立，其中 W 表示输入字母表 Σ 上的区间二型模糊集合串。

根据定义 2，可以把 $\hat{M}=(\Gamma(Q),\Gamma(\Sigma)^{*},\Gamma(\Delta),\hat{\delta},\hat{\lambda},Q_0)$ 定义为词计算的形式模型。同以往词计算的形式模型相比[12-14]，区间二型模糊 Mealy 自动机(interval type-2 fuzzy Mealy automata，IT2FMA) 没有定义终端状态的概念，因为在很多系统中，很难明确指出哪些状态是终端状态。同样，IT2FMA 中的所有状态均可能是终端状态，故 IT2FMA 处理输入词的过程可以定义为 CW 过程。

下面通过一个算例来验证该模型的有效性和可行性。

例 1 假设一个由水槽、进水口和出水口组成的供水系统，进水口输入流量为随机值，出水口输出流量由水阀控制，要求通过控制水阀的开度来维持水槽的水位为适中。

通过上述的区间二型模糊 Mealy 自动机来解决这个问题，Q 用来描述供水系统的水位状态的集合，其中零水位、中水位和满水位分别表示为水槽中水的容量为 0，50% 和 100%，Σ 和 Δ 分别表示输入流量和输出流量值的集合，其值为 1，2，3，4，5，首先给出如下定义：

$Q=\{q_0,q_1,q_2\}=\{$零水位，中水位，满水位$\}$；$\Sigma=\{1,2,3,4,5\}$；$\Delta=\{1,2,3,4,5\}$。

状态转移函数：

$$\delta(q_0,1)=\frac{\frac{1}{0.85}+\frac{1}{0.9}}{q_0}+\frac{\frac{1}{0.1}+\frac{1}{0.15}}{q_1},\quad \delta(q_0,2)=\frac{\frac{1}{0.4}+\frac{1}{0.45}}{q_0}+\frac{\frac{1}{0.6}+\frac{1}{0.65}}{q_1},$$

$$\delta(q_0,3)=\frac{\frac{1}{0.15}+\frac{1}{0.2}}{q_0}+\frac{\frac{1}{0.85}+\frac{1}{0.9}}{q_1}+\frac{\frac{1}{0.15}+\frac{1}{0.2}}{q_2},$$

$$\delta(q_0,4)=\frac{\frac{1}{0.4}+\frac{1}{0.45}}{q_1}+\frac{\frac{1}{0.6}+\frac{1}{0.65}}{q_2},\quad \delta(q_0,5)=\frac{\frac{1}{0.15}+\frac{1}{0.2}}{q_1}+\frac{\frac{1}{0.85}+\frac{1}{0.9}}{q_2};$$

$$\delta(q_1,1)=\frac{\frac{1}{0.85}+\frac{1}{0.9}}{q_1}+\frac{\frac{1}{0.15}+\frac{1}{0.2}}{q_2},\quad \delta(q_1,2)=\frac{\frac{1}{0.4}+\frac{1}{0.45}}{q_1}+\frac{\frac{1}{0.6}+\frac{1}{0.65}}{q_2},$$

$$\delta(q_1,3)=\frac{\frac{1}{0.15}+\frac{1}{0.2}}{q_1}+\frac{\frac{1}{0.85}+\frac{1}{0.9}}{q_2},\quad \delta(q_1,4)=\delta(q_1,5)=\frac{\frac{1}{1}}{q_2};$$

$$\delta(q_2,1)=\delta(q_2,2)=\delta(q_2,3)=\delta(q_2,4)=\delta(q_2,5)=\frac{\frac{1}{1}}{q_2}。$$

输出函数：$\lambda(q_0,1)=\lambda(q_0,2)=\lambda(q_0,3)=\lambda(q_0,4)=\lambda(q_0,5)=\phi$;

$$\lambda(q_1,1)=\frac{\frac{1}{0.85}+\frac{1}{0.9}}{1}+\frac{\frac{1}{0.15}+\frac{1}{0.2}}{2},\quad \lambda(q_1,2)=\frac{\frac{1}{0.15}+\frac{1}{0.2}}{1}+\frac{\frac{1}{0.85}+\frac{1}{0.9}}{2}+\frac{\frac{1}{0.15}+\frac{1}{0.2}}{3},$$

$$\lambda(q_1,3)=\frac{\frac{1}{0.15}+\frac{1}{0.2}}{2}+\frac{\frac{1}{0.85}+\frac{1}{0.9}}{3}+\frac{\frac{1}{0.15}+\frac{1}{0.2}}{4},$$

$$\lambda(q_1,4)=\frac{\frac{1}{0.15}+\frac{1}{0.2}}{3}+\frac{\frac{1}{0.85}+\frac{1}{0.9}}{4}+\frac{\frac{1}{0.15}+\frac{1}{0.2}}{5},\quad \lambda(q_1,5)=\frac{\frac{1}{0.15}+\frac{1}{0.2}}{4}+\frac{\frac{1}{0.85}+\frac{1}{0.9}}{5};$$

$$\lambda(q_2,1)=\lambda(q_2,2)=\lambda(q_2,3)=\lambda(q_2,4)=\lambda(q_2,5)=\frac{\frac{1}{1}}{5}。$$

定义3个语言变量 $A_1,A_2,A_3\in F(\Sigma)$ 作为系统的输入流量：

$$A_1=\text{“小”}=\frac{\frac{1}{0.095}+\frac{1}{1}}{1}+\frac{\frac{1}{0.45}+\frac{1}{0.5}}{2},$$

$$A_2=\text{“中”}=\frac{\frac{1}{0.25}+\frac{1}{0.3}}{2}+\frac{\frac{1}{0.95}+\frac{1}{1}}{3}+\frac{\frac{1}{0.25}+\frac{1}{0.3}}{4},\quad A_3=\text{“大”}=\frac{\frac{1}{0.45}+\frac{1}{0.5}}{4}+\frac{\frac{1}{0.95}+\frac{1}{1}}{5}。$$

① 设当前状态为 q_1(水槽水位“中水位”),输入为 A_3(进水口输入流量为“大”),经过时间 T 可以得到：

$$\hat{\delta}(q_1,A_3)=(\frac{1}{0.45}+\frac{1}{0.5})\delta(q_1,4)\cup(\frac{1}{0.95}+\frac{1}{1})\delta(q_1,5)=\frac{\frac{1}{0.95}+\frac{1}{1}}{q_2};$$

$$\hat{\lambda}(q_1,A_3)=(\frac{1}{0.45}+\frac{1}{0.5})\lambda(q_1,4)\cup(\frac{1}{0.95}+\frac{1}{1})\lambda(q_1,5)=\frac{\frac{1}{0.15}+\frac{1}{0.2}}{3}+\frac{\frac{1}{0.45}+\frac{1}{0.5}}{4}+\frac{\frac{1}{0.85}+\frac{1}{0.9}}{5}。$$

② 设当前状态为 q_1(水槽水位“中水位”),输入为 $A'_3=\frac{\frac{1}{0.2}+\frac{1}{0.25}}{4}+\frac{\frac{1}{0.975}+\frac{1}{1}}{5}$(进水口输入流量为“有点大”),经过时间 T 可以得到：

$$\hat{\delta}(q_1,A'_3)=(\frac{1}{0.2}+\frac{1}{0.25})\delta(q_1,4)\cup(\frac{1}{0.975}+\frac{1}{1})\delta(q_1,5)=\frac{\frac{1}{0.975}+\frac{1}{1}}{q_2};$$

$$\hat{\lambda}(q_1,A'_3)=(\frac{1}{0.2}+\frac{1}{0.25})\lambda(q_1,4)\cup(\frac{1}{0.975}+\frac{1}{1})\lambda(q_1,5)=\frac{\frac{1}{0.15}+\frac{1}{0.2}}{3}+\frac{\frac{1}{0.2}+\frac{1}{0.25}}{4}+\frac{\frac{1}{0.85}+\frac{1}{0.9}}{5}。$$

③ 设当前状态为$Q_k=\dfrac{\frac{1}{0.15}+\frac{1}{0.2}}{q_0}+\dfrac{\frac{1}{0.9}+\frac{1}{0.95}}{q_1}$（水槽水位“近似为中水位”），输入为$A_3$（进水口输入流量为“大”），经过时间$T$可以得到：

$$\hat{\delta}(Q_k,A_3)=(\frac{1}{0.15}+\frac{1}{0.2})\hat{\delta}(q_0,A_3)\cup(\frac{1}{0.9}+\frac{1}{0.95})\hat{\delta}(q_1,A_3)=\frac{\frac{1}{0.15}+\frac{1}{0.2}}{q_1}+\frac{\frac{1}{0.9}+\frac{1}{0.95}}{q_2};$$

$$\hat{\lambda}(Q_k,A_3)=(\frac{1}{0.15}+\frac{1}{0.2})\hat{\lambda}(q_0,A_3)\cup(\frac{1}{0.9}+\frac{1}{0.95})\hat{\lambda}(q_1,A_3)=\frac{\frac{1}{0.15}+\frac{1}{0.2}}{3}+\frac{\frac{1}{0.45}+\frac{1}{0.5}}{4}+\frac{\frac{1}{0.9}+\frac{1}{0.95}}{5}。$$

根据以上定义的区间二型模糊Mealy自动机进行计算推理，并将计算结果降型和解模糊，状态和输出的变化符合实际要求，能实现维持水槽的水位为适中。采用离散区间二型模糊集合来描述系统水位变化，为解决一型模糊集合不能直接描述不确定和不精确信息的问题提供了可能的途径与方法，为确定水位、输入和输出流量的隶属函数提供了更大的自由度，提高了系统的抗干扰能力。

当区间二型模糊Mealy自动机状态转移函数的输入为$w=w_1w_2\cdots w_n\in\Sigma^*$表示的数值符号串时，时间复杂度$T_{\hat{M}}(n)=|Q|^{n-1}$，输入$W=W_1W_2\cdots W_n\in\Gamma(\Sigma)^*$表示词串，时间复杂度$\overline{T}_{\hat{M}}(n)=|Q|^{n-1}|\Sigma|^n$（$|\Sigma|$和$|Q|$分别表示$\Sigma$和$Q$中包含的元素个数）。可以证明，IT2FMA处理输入词串与输入数值符号串相比，时间复杂度至少呈指数形式增长，输出函数的时间复杂度有着同样的关系。

证明：若区间二型模糊Mealy自动机为$\hat{M}=(\Gamma(Q),\Gamma(\Sigma)^*,\Gamma(\Delta),\hat{\delta},\hat{\lambda},Q_0)$，输入$w=w_1w_2\cdots w_n\in\Sigma^*$表示数值符号串，$w_1,w_2,\cdots,w_n\in\Sigma$，$q_0\in Q$，则：

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(q_0,w_1w_2\cdots w_n)&=\bigcup\nolimits_{q_{n-1}\in Q}[\hat{\delta}(q_0,w_1w_2\cdots w_{n-1})(q_{n-1})\cdot\hat{\delta}(q_{n-1},w_n)]=\\&\bigcup\nolimits_{q_{n-2},q_{n-1}\in Q}[\hat{\delta}(q_0,w_1w_2\cdots w_{n-2})(q_{n-2})\cdot\hat{\delta}(q_{n-2},w_{n-1})(q_{n-1})\cdot\hat{\delta}(q_{n-1},w_n)]=\\&\bigcup\nolimits_{q_1,q_2\cdots q_{n-1}\in Q}[\hat{\delta}(q_0,w_1)(q_1)\cdot\hat{\delta}(q_1,w_2)(q_2)\cdot\cdots\cdot\hat{\delta}(q_{n-2},w_{n-1})(q_{n-1})\cdot\hat{\delta}(q_{n-1},w_n)]。\end{aligned}\tag{1}$$

由式(1)可知，输入$w=w_1w_2\cdots w_n\in\Sigma^*$表示数值符号串，其时间复杂度为$T_{\hat{M}}(n)=|Q|^{n-1}$。

输入$W=W_1W_2\cdots W_n\in\Gamma(\Sigma)^*$表示词串，$W_1,W_2,\cdots,W_n\in\Gamma(\Sigma)$，由定义2可知：

$$\hat{\delta}(q_0,W_1W_2\cdots W_n)=\hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0,W_1W_2\cdots W_{n-1}),W_n)=\hat{\delta}(\cdots\hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0,W_1),W_2),\cdots,W_n);\tag{2}$$

$$\hat{\delta}(q_0,W_1)=A(u_1)\cdot\hat{\delta}(q_0,u_1)+A(u_2)\cdot\hat{\delta}(q_0,u_2)+\cdots+A(u_n)\cdot\hat{\delta}(q_0,u_n),u_1,u_2,\cdots,u_n\in\Sigma;\tag{3}$$

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0,W_1),W_2)&=\hat{\delta}(A(u_1)\cdot\hat{\delta}(q_0,u_1)+A(u_2)\cdot\hat{\delta}(q_0,u_2)+\cdots+A(u_n)\cdot\hat{\delta}(q_0,u_n),W_2)=\\&\bigcup\nolimits_{q_1,q_2\cdots q_n\in Q}[A(u_1)\hat{\delta}(q_1,W_2)+A(u_2)\hat{\delta}(q_1,W_2)+\cdots+A(u_n)\hat{\delta}(q_n,W_2)]。\end{aligned}\tag{4}$$

式(4)的时间复杂度是式(3)的$|\Sigma|\cdot|Q|$倍，依此递推可知式(2)的时间复杂度是式(3)的$|Q|^{n-1}\cdot|\Sigma|^{n-1}$。输入词串$W=W_1W_2\cdots W_n\in\Gamma(\Sigma)^*$时，时间复杂度$\overline{T}_{\hat{M}}(n)=|Q|^{n-1}\cdot|\Sigma|^n=|\Sigma|^nT_M(n)$。这说明模糊Mealy自动机处理输入词串与输入数值符号串相比，时间复杂度呈指数形式增长（$|\Sigma|>1$）。

同理可以证明，输出函数的时间复杂度有着同样的关系。

3　基于区间二型模糊Mealy自动机的语言动力系统

设$\hat{M}=(\Gamma(Q),\Gamma(\Sigma)^*,\Gamma(\Delta),\hat{\delta},\hat{\lambda},Q_0)$为区间二型模糊Mealy自动机，由定义2可知，可以把$\hat{M}$定义为词计算的形式模型。其中，$\hat{\delta}$，$\hat{\lambda}$是$\hat{\delta}:\Gamma(Q)\times\Gamma(\Sigma)^*\rightarrow\Gamma(Q)$，$\hat{\lambda}:\Gamma(Q)\times\Gamma(\Sigma)^*\rightarrow\Gamma(\Delta)$的映射，$\Gamma(\Sigma)^*$是输入字母表$\Sigma$上所有区间二型模糊子集的集合$\Gamma(\Sigma)$的克林闭包（词串的集合）。根据区间二型模糊集合的定义，可以把输入字母表Σ定义为输入模糊集合的论域，同样，Δ也可以定义为输出模糊集合的论域。设定义在论域Σ和Q上的时不变语言动力系统$Q_{n+1}=\hat{\delta}(Q_n,A_n)$；$\Delta_{n+1}=\hat{\lambda}(Q_n,A_n)$。其中，$n=1,2,\cdots,k,\cdots$，$\hat{\delta}$和$\hat{\lambda}$是区间二型模糊映射。

设Q_1，A_1为初始时刻状态，在$\hat{\delta}$，$\hat{\lambda}$映射下分别生成状态的语言动力学轨迹$\{Q_1,Q_2,\cdots,Q_k,\cdots\}$和输出的语言动力学轨迹$\{\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_k,\cdots\}$。这里，$Q_k$和$\Delta_k$分别为论域$Q$和$\Delta$上的区间二型模糊集合。

例2　考虑例1中的区间二型模糊Mealy自动机模型，如果随着时间的推移，$t_1,t_2,\cdots,t_n,\cdots$时刻输入流

量依次为“有点小、中、有点大、…、大、…”，初始时刻水位为“有点低”。

设 t_n 时刻流入流量为 A'_n，水位为 Q_n，其中 $n=1,2,\cdots,k,\cdots$。

t_2 时刻（t_1 时刻输入流量 A'_1 为“有点小”，“有点小” $=\frac{\frac{1}{0.95}+\frac{1}{1}}{1}+\frac{\frac{1}{0.2}+\frac{1}{0.25}}{2}$，水位 Q_1 为“水位有点低”，“水位有点低” $=\frac{\frac{1}{0.75}+\frac{1}{0.8}}{q_0}+\frac{\frac{1}{0.25}+\frac{1}{0.3}}{q_1}$）IT2FMA 的状态和输出为：

$$Q_2=\hat{\delta}(Q_1,A'_1)=(\frac{1}{0.75}+\frac{1}{0.8})\cdot\hat{\delta}(q_0,A'_1)\cup(\frac{1}{0.25}+\frac{1}{0.3})\cdot\hat{\delta}(q_1,A'_1)=$$

$$\frac{\frac{1}{0.75}+\frac{1}{0.8}}{q_0}+\frac{\frac{1}{0.25}+\frac{1}{0.3}}{q_1}+\frac{\frac{1}{0.2}+\frac{1}{0.25}}{q_2};$$

$$\Delta_2=\hat{\lambda}(Q_1,A'_1)=(\frac{1}{0.75}+\frac{1}{0.8})\cdot\hat{\lambda}(q_0,A'_1)\cup(\frac{1}{0.25}+\frac{1}{0.3})\cdot\hat{\lambda}(q_1,A'_1)=$$

$$\frac{\frac{1}{0.25}+\frac{1}{0.3}}{1}+\frac{\frac{1}{0.2}+\frac{1}{0.25}}{2}+\frac{\frac{1}{0.15}+\frac{1}{0.2}}{3}。$$

t_3 时刻（t_2 时刻输入流量为 A'_2 为“中”，“中” $=\frac{\frac{1}{0.25}+\frac{1}{0.3}}{2}+\frac{\frac{1}{0.95}+\frac{1}{1}}{3}+\frac{\frac{1}{0.25}+\frac{1}{0.3}}{4}$，水位为 Q_2 为“水位比较低”，“水位比较低” $=\frac{\frac{1}{0.75}+\frac{1}{0.8}}{q_0}+\frac{\frac{1}{0.25}+\frac{1}{0.3}}{q_1}+\frac{\frac{1}{0.2}+\frac{1}{0.25}}{q_2}$）IT2FMA 的状态和输出为：

$$Q_3=\hat{\delta}(Q_2,A'_2)=(\frac{1}{0.75}+\frac{1}{0.8})\cdot\hat{\delta}(q_0,A'_2)\cup(\frac{1}{0.25}+\frac{1}{0.3})\cdot\hat{\delta}(q_1,A'_2)\cup(\frac{1}{0.2}+\frac{1}{0.25})\cdot\hat{\delta}(q_2,A'_2)=$$

$$\frac{\frac{1}{0.25}+\frac{1}{0.3}}{q_0}+\frac{\frac{1}{0.75}+\frac{1}{0.8}}{q_1}+\frac{\frac{1}{0.25}+\frac{1}{0.3}}{q_2};$$

$$\Delta_3=\hat{\lambda}(Q_2,A'_2)=(\frac{1}{0.75}+\frac{1}{0.8})\hat{\lambda}(q_0,A'_2)\cup(\frac{1}{0.25}+\frac{1}{0.3})\hat{\lambda}(q_1,A'_2)\cup(\frac{1}{0.2}+\frac{1}{0.25})\hat{\lambda}(q_2,A'_2)=$$

$$\frac{\frac{1}{0.15}+\frac{1}{0.2}}{1}+\frac{\frac{1}{0.25}+\frac{1}{0.3}}{2}+\frac{\frac{1}{0.25}+\frac{1}{0.3}}{3}+\frac{\frac{1}{0.25}+\frac{1}{0.3}}{4}+\frac{\frac{1}{0.2}+\frac{1}{0.25}}{5}。$$

t_n 时刻（t_{n-1} 时刻输入流量 A'_{n-1} 为“大”，“大” $=\frac{\frac{1}{0.45}+\frac{1}{0.5}}{4}+\frac{\frac{1}{0.95}+\frac{1}{1}}{5}$，水位 Q_{n-1} 为“中水位”，“中水位” $=\frac{\frac{1}{0.05}+\frac{1}{0.1}}{q_0}+\frac{\frac{1}{0.9}+\frac{1}{0.95}}{q_1}+\frac{\frac{1}{0.05}+\frac{1}{0.1}}{q_2}$）IT2FMA 的状态和输出为：

$$Q_n=\hat{\delta}(Q_{n-1},A'_{n-1})=(\frac{1}{0.05}+\frac{1}{0.1})\cdot\hat{\delta}(q_0,A'_{n-1})\cup(\frac{1}{0.9}+\frac{1}{0.95})\cdot\hat{\delta}(q_1,A'_{n-1})\cup$$

$$(\frac{1}{0.05}+\frac{1}{0.1})\cdot\hat{\delta}(q_2,A'_{n-1})=\frac{\frac{1}{0.05}+\frac{1}{0.1}}{q_0}+\frac{\frac{1}{0.9}+\frac{1}{0.95}}{q_1}+\frac{\frac{1}{0.05}+\frac{1}{0.1}}{q_2};$$

$$\Delta_n=\hat{\lambda}(Q_{n-1},A'_{n-1})=(\frac{1}{0.05}+\frac{1}{0.1})\cdot\hat{\lambda}(q_0,A'_{n-1})\cup(\frac{1}{0.9}+\frac{1}{0.95})\cdot\hat{\lambda}(q_1,A'_{n-1})\cup$$

$$(\frac{1}{0.05}+\frac{1}{0.1})\cdot\hat{\lambda}(q_2,A'_{n-1})=\frac{\frac{1}{0.15}+\frac{1}{0.2}}{3}+\frac{\frac{1}{0.45}+\frac{1}{0.5}}{4}+\frac{\frac{1}{0.85}+\frac{1}{0.9}}{5}。$$

将上述区间二型模糊 Mealy 自动机在 $t_1,t_2,\cdots,t_n,\cdots$ 的状态区间二型模糊集合 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_n,\cdots$ 和输出

区间二型模糊集合 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n,\cdots$ 降型后解模糊化，得到系统状态的语言动力学轨迹为{有点低，比较低，近似中，中，…，中，…}，输出的语言动力学轨迹为{无，非常小，有点小，小，…，大，…}。从该轨迹可以看出，从时刻 t_1 至时刻 t_3，系统状态逐渐趋近于“中水位”，时刻 t_4 以后，无论输入如何变化，系统状态始终维持在“中水位”，由此可知，该模型能较好地实现系统的要求，可以维持水槽水位“适中”。系统的输出则由输入和当前状态共同决定，当前状态为“高水位”，输出流量应大于输入流量；当前状态为“中水位”，输出流量应跟随输入流量而变化；当前状态为“低水位”，随着输入流量的减小，输出流量应减小或无输出。

相对传统控制方法[25]，区间二型模糊 Mealy 自动机模型具有响应速度较快，稳定性较高，抗干扰能力较强等优点，能够处理不精确、不确定和部分真实的数据类型，且输出结果通俗易懂，易于被普通人所接受。

4　结束语

以区间二型模糊集合为基础，运用扩展原理将 Mealy 自动机转化为区间二型模糊 Mealy 自动机，将 IT2FMA 作为词计算的形式模型来研究语言动力学系统，比较了 IT2FMA 处理输入为数字符号串和字符串时间复杂度的关系，并分析了 IT2FMA 下供水系统的语言动力学轨迹。

IT2FMA 在处理与人类经验和语言知识相关的问题上，能简化系统的状态描述，使系统的输出更加人性化，为有人类参与的复杂系统的建模和分析提供理论基础。近几年来，语言动力学系统的动力学性质以及时变论域下的语言动力系统的研究受到人们的关注[26-27]，下一步的主要工作是基于区间二型模糊集合的时变论域下语言动力学轨迹及其动力学性质的研究。

参考文献：

[1]Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control,1965,8(3):338-353.

[2]Zadeh L A. Fuzzy logic = Computing with words[J]. IEEE Transaction on Fuzzy System,1996,4(2):103-111.

[3]Pan X D,Meng D. Triangular norm based graded convex fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems,2012,209(1):1-13.

[4]Hagras H. A hierarchical type-2 fuzzy logic control architecture for autonomous mobile robots[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems,2004,12(4):524-539.

[5]Tao C W,Taur J S,Chang C W,et al. Simplified type-2 fuzzy sliding controller for wing rock system[J]. Fuzzy Sets and Systems,2012,207(1):111-129

[6]Mojtaba A K,Erdal K,Mohammad T. Extended Kalman filter based learning algorithm for type-2 fuzzy logic systems and its experimental evaluation[J]. IEEE Translations on Industrial Electronics,2012,59(11):4443-4455.

[7]Liang Q L,Mendel J M. Interval type-2 fuzzy logic systems:Theory and design[J]. IEEE Transaction on Fuzzy System,2000,8(5):535-550.

[8]Wu D R,Mendel J M. Linguistic summarization using if-then rules and interval type-2 fuzzy sets[J]. IEEE Transaction on Fuzzy System,2011,19(1):136-151.

[9]莫红，王飞跃，肖志权，等.基于区间二型模糊集合的语言动力系统稳定性[J].自动化学报,2011,37(8):1018-1024.
Mo Hong,Wang Feiyue,Xiao Zhiquan,et al. Stabilities of linguistic dynamic systems based on interval type-2 fuzzy sets[J]. Acta Automatica Sinica,2011,37(8):1018-1024.

[10]莫红，王涛.广义区间二型模糊集合的词计算[J].自动化学报,2012,38(5):707-715.
Mo Hong,Wang Tao. Computing with words in generalized interval type-2 fuzzy sets[J]. Acta Automatica Sinica,2012,38(5):707-715.

[11]Mortaza A,Ibrahim E,Mujde G,et al. Design of an interval type-2 fuzzy logic controller based on conventional PI controller[C]//20th Mediterranean Conference on Control & Automation. Barcelona,Spain,July 3-6,2012:1160-1164.

[12]Ying M S. A formal model of computing with words[J]. IEEE Transaction on Fuzzy System,2002,10(5):640-652.

[13]Cao Y Z,Ying M S,Chen G Q. Retraction and generalized extension of computing with words[J]. IEEE Transaction on Fuzzy Systems,2007,15(6):1238-1250.

[14]Wang H Q,Qiu D W. Computing with words via turing machines:A formal approach[J]. IEEE Transaction on Fuzzy Systems,2003,11(6):742-753.

[15]Mealy G H. A method for synthesizing sequential circuits[J]. Bell System Technical Journal,1955,34:1045-1079.

[16]Asai K, Kitajima S. A method for optimizing control of multimodal systems using fuzzy automata[J]. Information Sciences, 1971, 39: 343-353.

[17]Malik D S, Mordeson J N, Sen M K. Minimization of fuzzy finite automata[J]. Information Sciences, 1999, 113: 323-330.

[18]汪洋，莫智文.基于模糊字符串的Mealy格值有限自动机及其最小化[J].模糊系统与数学，2009，23(3)：50-55.
Wang Yang, Mo Zhiwen. Minimization of Mealy lattice finite automata based on fuzzy strings[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2009, 23(3): 50-55.

[19]Wang F Y. Modeling, analysis and synthesis of linguistic dynamic systems: A computational theory[C]//IEEE International Workshop on Architecture for Semantic Modeling and Situation Control in Large Complex Systems. Monterey, CA, 1995: 173-178.

[20]Wang F Y. Fundamental issues in research of computing with words and linguistic dynamic systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2005, 31(6): 844-852.

[21]Mo H, Wang F Y. Linguistic dynamic systems based on computing with words and their stabilities[J]. Science in China, 2009, 52(5): 780-796.

[22]Alvydas B, Tomas B, Willem K M B. Personnel selection based on computing with words and fuzzy MULTIMOORA[J]. Expert Systems with Applications, 2012, 39(9): 7961-7967.

[23]蒋宗礼，姜守旭.形式语言与自动机理论[M].北京：清华大学出版社，2007：123-125.

[24]Hopcroft J E, Motwani R, Ullman J D. 自动机理论、语言和计算导论[M]. 2版. 刘田，姜晖，译. 北京：机械工业出版社，2004：31-35.

[25]陈文涛，鲁凯生.单片机水位控制系统的设计与实现[J].微型机与应用，2001，20(9)：17-19.
Chen Wentao, Lu Kaisheng. Design and implementation of water level control system based on single chip microcomputer [J]. Microcomputer Application, 2001, 20(9): 17-19.

[26]Mo H, Wang F Y. Linguistic dynamic system based on computing with words and their stabilities[J]. Science in China, Series F: information Science, 2009, 52(5): 780-796.

[27]莫红.时变论域下的语言动力学轨迹[J].自动化学报，2012，38(10)：1585-1594.
Mo Hong. Linguistic dynamic orbits in the time varying universe of discourse[J]. Acta Automatica Sinica, 2012, 38(10): 1585-1594.

（责任编辑：吕文红）