

# 直角坐标系下梯度材料弹性力学平面问题的解析解

陈娟<sup>1</sup>, 肖洪天<sup>1,2</sup>

(1. 山东科技大学 土木建筑学院, 山东 青岛 266590;

2. 山东科技大学 山东省土木工程防灾重点实验室, 山东 青岛 266590)

**摘要:**给出了直角坐标系下梯度材料弹性力学问题的几个解析解答,并对不同弹性模量下应力、位移场进行研究。有限域平面应力问题是通过从经典的弹性力学应力函数法出发、选取特殊的应力函数和弹性模量两种手段简化相容方程得到解答;半无限空间体受均布荷载的问题用平面应变问题来刻画并采用位移法得到解答。研究表明,在半空间体受均布荷载的问题上,弹性模量随深度的变化并未对其应力场产生影响;而其他情况下,弹性模量的变化对应力位移场均产生影响。

**关键词:**梯度材料;弹性力学;解析解;直角坐标;平面问题

中图分类号:U416.01

文献标志码:A

文章编号:1672-3767(2013)02-0053-08

## Analytical Solutions to 2D Elastic Problems of Graded Materials in Cartesian Coordinates

Chen Juan<sup>1</sup>, Xiao Hongtian<sup>1,2</sup>

(1. College of Architecture and Civil Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China;

2. Shandong Provincial Key Laboratory of Civil Engineering Disaster Prevention and Mitigation, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

**Abstract:** The paper presented analytical solutions to 2D elastic graded materials in Cartesian coordinates and studied the elastic field under varied elastic modulus. Solutions to general 2D problems of finite extent were generated in terms of the Airy stress function by solving the deduced compatibility equations, which were simplified by selecting two inverse schemes of special stress function and modulus variations, and the elastic fields in half-space under uniform loading were formulated by using the displacement method as a special 3D problem depicted by 2D plane strain problem. Research shows that modulus variation with depth has no effect on the stress field in the latter case, while it has effect on both the stress and displacement fields in the former.

**Key words:** graded materials; elasticity; analytic solutions; Cartesian coordinates; plane problems

梯度材料是一种常见的非均匀材料,对该类材料力学特性的研究可以采用解析方法和数值方法。简单问题可以通过直接求解微分方程的方法得到,复杂的则需要用积分变换或数值方法;解析解虽然只限于在特殊情况下得到,但作为检验数值方法可靠性的手段也引起了不少研究者的兴趣。

对于有限域梯度材料平面问题,国内外学者进行了一系列研究。周志刚等<sup>[1]</sup>用傅里叶变换的方法得到平面问题的一些解答。Sankar<sup>[2]</sup>给出了功能梯度简支梁,材料弹性模量沿梁厚度方向呈指数变化形式的解析解。于涛等<sup>[3-4]</sup>在此基础上得到了悬臂梁在端部受集中力偶和集中力作用与受均布荷载作用下,弹性模量

收稿日期:2012-10-19

基金项目:国家自然科学基金项目(51079081);山东科技大学研究生科技创新基金项目(YCA120208)

作者简介:陈娟(1989—),女,山东济宁人,硕士研究生,主要从事岩土工程数值模拟方面研究。

E-mail:chenjuanj@126.com

肖洪天(1964—),男,河北孟村人,教授,博士生导师,主要从事梯度材料断裂力学的新型边界元法研究。

E-mail:xiaohongtian@tsinghua.com

为坐标的任意函数时的解答。Sadd<sup>[5]</sup>从简化相容方程的角度出发,通过求解微分方程得到一些简单问题的解答。对于半空间梯度材料弹性力学问题,Gibson<sup>[6]</sup>得到了弹性模量沿深度呈线性分布的半无限空间体受条形荷载时的解析解,Booker 等<sup>[7]</sup>进一步研究了弹性模量随深度呈幂函数形式分布的半无限空间体受点荷载、条形荷载和其他形式荷载的解答。Yue<sup>[8]</sup>用积分变换的方法导出了层状材料半无限空间体在集中力作用下的解析解,肖洪天等<sup>[9]</sup>建立并发展了基于 Yue 基本解的边界元法,该方法在求解半无限域问题时具有很高的精度和效率。Wang 等<sup>[10]</sup>得到半无限空间体弹性模量随深度呈指数型变化时受点荷载作用的解析解,并在文中对非均匀材料半空间问题进行总结。

直角坐标系下弹性力学问题从研究区域的范畴上可分为有限域和无限域;已有的研究成果也充分表明只有少数问题可以求得解析解。因此,本文选择性地研究了有限域的薄板拉压问题和半无限空间受均布荷载问题。前者用应力函数法在 Sadd<sup>[5]</sup>的基础上进行了进一步的研究;后者采用位移法,模型简化后得到解答。这些解答对了解梯度材料的状态具有重要意义。

## 1 分析方法

假设梯度材料的弹性模量为坐标的函数,即弹性模量  $E(x, y)$ ,泊松比  $\mu$  为常量。弹性力学基本方程的形式不变,只是物理方程中  $E$  为坐标的函数。

### 1.1 应力函数法

对于如图 1 所示的薄板问题,可以采用应力函数法求解。在板的两端( $x=0, a$ ),作用着分布荷载  $p(x)$ 。应力函数法求解的关键在于先求出应力函数表示的相容方程。应用弹性力学经典方法,将弹模是坐标函数的物理方程代入应变相容方程得:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{E(x, y)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\mu}{E(x, y)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{E(x, y)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\mu}{E(x, y)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{1+\mu}{E(x, y)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) = 0. \quad (1)$$

其中,  $\Phi$  是艾里应力函数。

将式(1)按对弹模导数的阶数可整理为:

$$\frac{1}{E(x, y)} (\nabla^4 \Phi) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2}{E(x, y)} \right) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \Phi) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{2}{E(x, y)} \right) \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \Phi) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{E(x, y)} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{E(x, y)} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) + 2(1+\mu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \left( \frac{1}{E(x, y)} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0. \quad (2)$$

其中,算子  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,  $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$ 。

式(2)即为梯度材料弹性力学问题的相容方程。

### 1.2 位移法

对于如图 2 所示的半无限空间问题,可以采用位移法求解。位移法归结为求解位移表示的平衡微分方程的边值问题;由于该方程本身的复杂性,一般问题的通解难以求得。这里仅研究半空间体受均布荷载的问题。

假设在半空间体边界上作用有均布荷载  $q$ ,弹性模量仅沿垂直方向变化,即  $E(x, y) = E(y)$ 。由于对称性,仅存在垂直方向的位移,即水平位移  $u=0$ ,竖向位移  $v=v(y)$ 。此时,该问题可以退化为平面应变问题。这样就大大简化了控制微分方程,使之成为仅包含沉降对深度  $y$  的导数的常微分方程。可见几何方程的第一和第三式自然满足,将第二式代入平面应变问题的物理方程,可得:

$$\sigma_x = \frac{\mu E(y)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \frac{dv}{dy} = \sigma_z, \quad \sigma_y = \frac{(1-\mu)E(y)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \frac{dv}{dy}, \quad \tau_{xy} = \frac{E(y)}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} = 0. \quad (3)$$

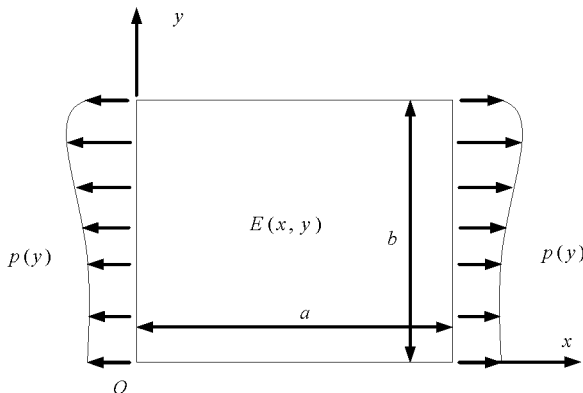


图 1 两端作用有应力  $p(x)$  的梯度材料薄板问题示意图

Fig. 1 A thin plate consisting of graded materials subjected to stresses  $p(x)$  at two ends

将上式代入平衡微分方程,得到:

$$\frac{dE(y)}{dy} \frac{dv}{dy} + E(y) \frac{d^2v}{dy^2} = 0. \quad (4)$$

这样,就得到位移法求梯度材料半空间体受均布荷载问题的控制微分方程(4)。

## 2 有限域梯度材料弹性力学平面问题的解析解

式(2)为一个二元高次的偏微分方程,既含有应力函数对坐标的导数又有弹模对坐标的导数;若想求得解析解,须化成一元低阶的常微分方程才行。因此,从两方面着手进行简化。一种是取特殊的应力函数,把该式化成关于弹性模量  $E$  的常微分方程;另一种是取呈特殊变化的弹性模量  $E$ ,把它化成关于应力函数  $\Phi$  的常微分方程。同时,若要从偏微分方程转化成常微分方程,还需要假设物理量仅仅是关于某一个坐标的函数。

### 2.1 采用双调和的应力函数

当采用双调和的应力函数时,即  $\nabla^4 \Phi = 0$ ,式(2)可以进一步化简为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2}{E(x,y)} \right) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \Phi) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{2}{E(x,y)} \right) \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \Phi) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{E(x,y)} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{E(x,y)} \right) \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) + 2(1+\mu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \left( \frac{1}{E(x,y)} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

最简单的双调和的函数就是次数不高于三次的多项式。为了得到常微分方程,并且使切应力为零,所取的双调和函数是仅关于一个坐标的不高于三次的多项式。又由于应力函数中的一次和常数项对应力分布是没有影响的,所以可取的双调和函数就仅有二次和三次两种形式:  $\Phi = Ty^2/2$  和  $\Phi = Ay^3/6$ ,或者两者的叠加;再组合不同的弹性模量  $E(x)$ ,  $E(y)$  共能得到四类问题的解。其中三类问题, Sadd<sup>[5]</sup> 给出了其解答。因此,这里选取  $E = E(x)$ ,  $\Phi = Ay^3/6$ 。

此种应力函数对应的应力场为:  $\sigma_x = Ay$ ,  $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ ,这对应于一个薄板线性荷载下轴向拉伸的问题如图 1 所示。

图中  $p(y) = Ay$ ,  $x \in [0, a]$ ,  $y \in [0, b]$ 。式(5)变为

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{E} \right) = 0.$$

该常微分方程的解为:

$$\frac{1}{E} = C_1 x + C_2, \text{ 即 } E = \frac{1}{C_1 x + C_2}. \quad (6)$$

其中,  $C_1, C_2$  为任意常数。

为了使这些参数具有明确的物理意义,式(6)还可以写成

$$E = \frac{E_0}{1 + Kx}. \quad (7)$$

显然,  $E_0 = 1/C_2$ ,  $K = E_0 C_1$ 。

当  $K = 0$  时,  $E = E_0$  代表均匀材料的情况。  $K = -0.5$  与  $K = 5$  时,  $E$  的变化如图 3 所示。

用常规方法通过物理方程和几何方程求位移解:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y) = \frac{1}{E} Ay = \frac{1 + Kx}{E_0} Ay; \quad (8a)$$

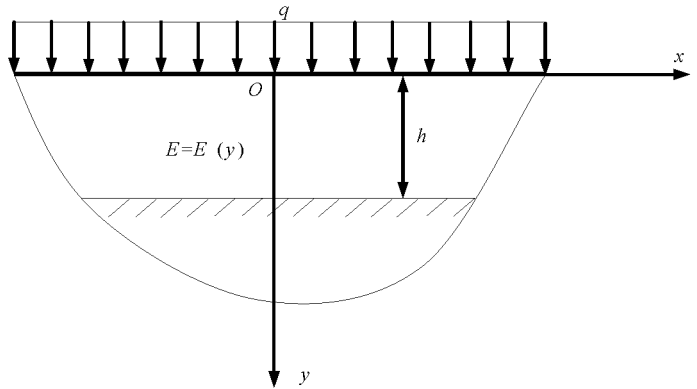


图 2 梯度材料半无限空间边界上作用均布荷载  $q$  示意图

Fig. 2 A half-space consisting of graded materials subjected to uniform loading on the boundary

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) = -\frac{1}{E}\mu Ay = -\frac{1+Kx}{E_0}\mu Ay; \quad (8b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} = 0. \quad (8c)$$

求解式(8), 不考虑刚体位移, 得到位移表达式

$$u = \frac{Ay}{E_0}\left(x + \frac{1}{2}Kx^2\right) + \frac{\mu AK}{6E_0}y^3; \quad (9a)$$

$$v = \frac{-\mu A(1+Kx)}{2E_0}y^2 - \frac{A}{E_0}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}Kx^3\right). \quad (9b)$$

根据式(9)画出位移等值线, 如图 4 所示。

在  $\mu=0.3$  时分别给出了  $K=-0.5$  和  $K=0$  时位移的等值线; 当  $K=0$  时, 即均匀材料时, 位移等值线为等间距的直线。可见, 弹性模量的变化影响了该问题位移场, 使位移等值线发生弯曲。

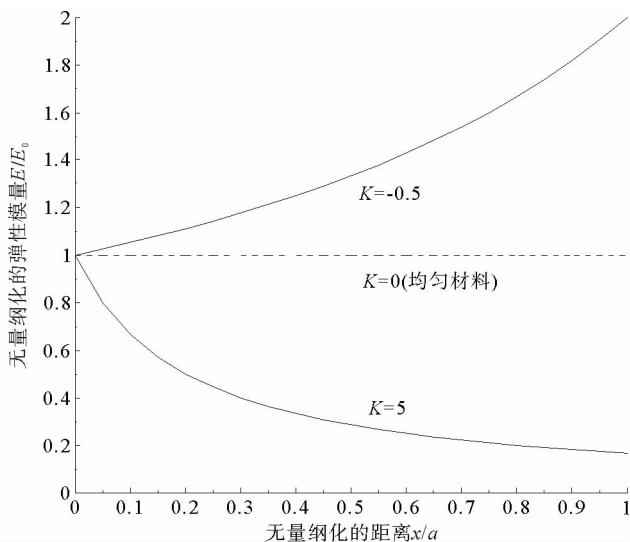
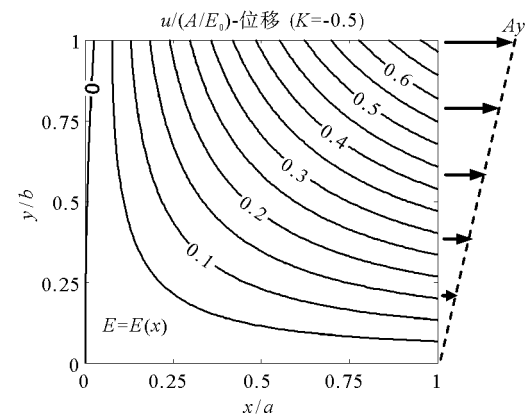
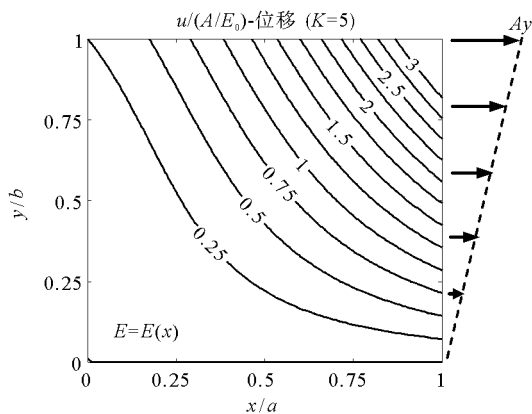


图 3 线性荷载下薄板拉压问题的弹性模量变化图

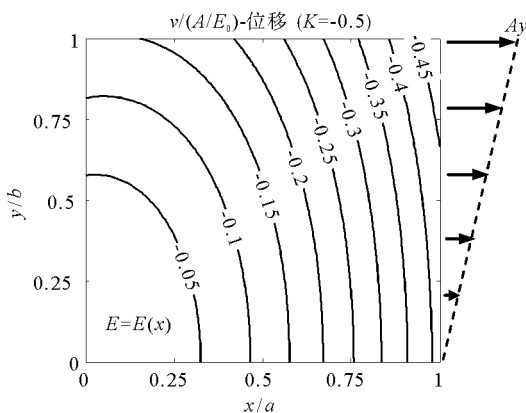
Fig. 3 Modulus gradations of the thin plate under linear pressure



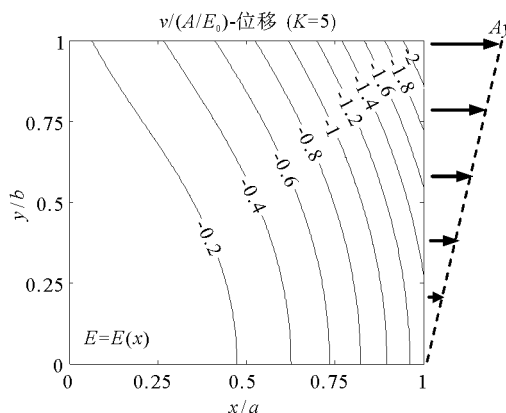
(a) 水平位移等值线 ( $K=-0.5$ )  
(a) Horizontal displacement contour ( $K=-0.5$ )



(b) 水平位移等值线 ( $K=5$ )  
(b) Horizontal displacement contour ( $K=5$ )



(c) 竖向位移等值线 ( $K=-0.5$ )  
(c) Vertical displacement contour ( $K=-0.5$ )



(d) 竖向位移等值线 ( $K=5$ )  
(d) Vertical displacement contour ( $K=5$ )

图 4 线性荷载下薄板拉压问题的位移等值线图 ( $\mu=0.3$ )

Fig. 4 Displacement contours of the thin plate under linear pressure ( $\mu=0.3$ )

## 2.2 采用指数型变化的弹性模量

下面,从另一个角度通过选取呈特殊变化的弹性模量化简相容方程式(2),Sadd<sup>[5]</sup>给出了  $E = E(y) = 1/(Ay + B)$ ,  $\Phi = \Phi(y)$  时的解答;非均匀材料弹性模量往往呈指数型变化,因此这里取  $E = E(y) = E_0 e^{\alpha y}$ ,  $\Phi = \Phi(y)$ 。

当  $E = E_0 e^{\alpha y}$  时,代表  $E$  沿  $y$  方向呈指数型变化;当  $\alpha = 0$  时,  $E = E_0$  是均匀材料的情况。 $\alpha = -5$  和  $\alpha = 0.7$  时,  $E$  的变化情况如图 5 所示。

将  $E = E(y) = E_0 e^{\alpha y}$  和  $\Phi(y)$  代入式(2)得:

$$\frac{d^4 \Phi}{dy^4} - 2\alpha \frac{d^3 \Phi}{dy^3} + \alpha^2 \frac{d^2 \Phi}{dy^2} = 0. \quad (10)$$

解这个常微分方程得:

$$\frac{d^2 \Phi}{dy^2} = C_1 e^{\alpha y} + C_2 e^{\alpha y} y.$$

所以,

$$\sigma_x = C_1 e^{\alpha y} + C_2 e^{\alpha y} y, \sigma_y = \tau_{xy} = 0. \quad (11)$$

其中,  $C_1, C_2$  为任意常数。

同样,对应图 1 所示问题,图中  $p(y) = C_1 e^{\alpha y} + C_2 e^{\alpha y} y$ 。当  $C_1 = C_2 = 1$  和  $C_1 = 1, C_2 = -1$  时,该应力场对应的实际情况如图 6 所示。图中 3 根虚线从左到右依次代表  $\alpha = -5, \alpha = 0, \alpha = 0.7$  时荷载的不同几何形状。

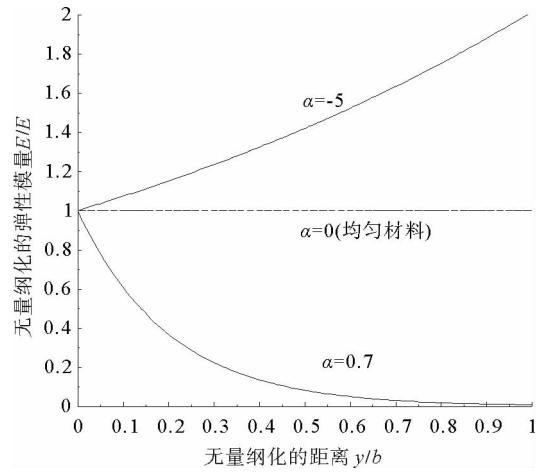


图 5 非线性荷载下薄板拉压问题的弹性模量变化图

Fig. 5 Modulus gradations of the thin plate under non-linear pressure

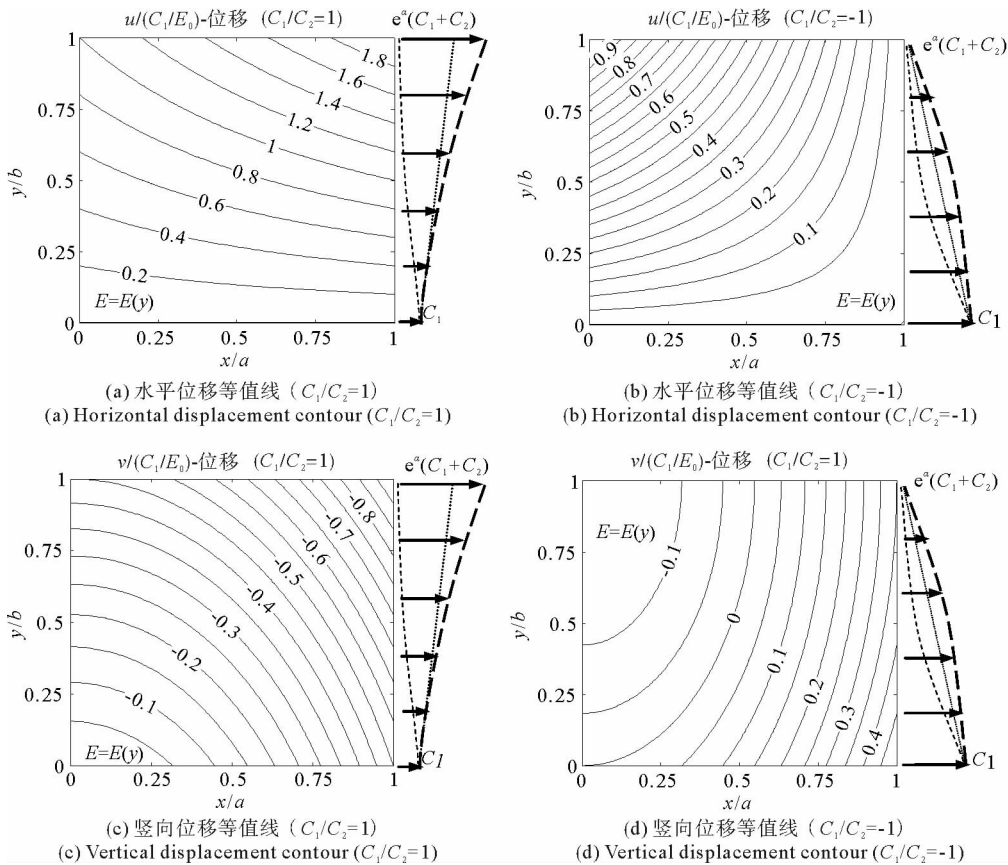


图 6 非线性荷载下薄板拉压问题的位移等值线图 ( $\mu = 0.3$ )

Fig. 6 Displacement contours of the thin plate under non-linear pressure ( $\mu = 0.3$ )

按照前述方法可以求得位移解:

$$u = \frac{1}{E_0}(C_1 y + C_2 x y), \quad v = -\frac{1}{E_0} \left[ \frac{C_2}{2}(x^2 + \mu y^2) + \mu C_1 y \right]. \quad (12)$$

取  $\mu = 0.3$ , 当  $C_1/C_2 = 1$  和  $C_1/C_2 = -1$  时, 分别做出该位移场的等值线如图 6 所示。

上述两问题的应力场都是应力边界精确满足情况下的解答, 二者还可以进一步推广用于解决梁的纯弯曲问题。设某梁深度为  $2c$ , 在两端所受弯矩为  $M$  (梁下受拉为正) 轴力为  $P$  (拉力为正), 那么根据圣维南任意常数  $A$  或者  $C_1, C_2$  只需满足:  $\int_{-c}^c \sigma_x dy = P$  和  $\int_{-c}^c \sigma_x y dy = -M$ , 即可用于解决梁的纯弯曲问题。

### 3 半无限空间体受均布荷载问题—位移法

半空间体受均布荷载的问题, 荷载情况如图 2 所示。在第 1 部分中已经求得梯度材料位移法求解的控制微分方程。要得到该问题的解答, 还要考虑边界条件。半空间体受均布荷载的问题, 其边界条件包括在地表处的应力边界条件和  $y = h$  处的位移边界条件。如下:

$$(\sigma_y)_{y=0} = -q, \quad (v)_{y=h} = 0 \quad (13)$$

对于均匀材料, 已经求得经典的解析解<sup>[11]</sup>。当不考虑体力时, 位移和应力解为:

$$v = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} [q(h-y)], \quad v_{\max} = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} qh; \quad (14a)$$

$$\sigma_x = \sigma_z = -\frac{\mu}{1-\mu} q, \quad \sigma_y = -q, \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \quad (14b)$$

下面, 分别对  $E = E_0 / (1 + ky)$  和  $E = E_0 e^{\alpha y}$  两种情况进行分析讨论。

#### 3.1 弹性模量呈幂函数形式变化

图 7 为半无限空间体受均布荷载问题的弹模变化示意图。 $E = E_0 / (1 + ky)$  代表弹性模量沿深度方向呈反比例函数形式变化, 其具体变化如图 7(a) 所示。当  $k < 0$  时, 弹性模量随深度逐渐增大(上软下硬);  $k > 0$  时, 弹性模量随深度逐渐减小(上硬下软);  $k = 0$  时代表均匀材料的情况。

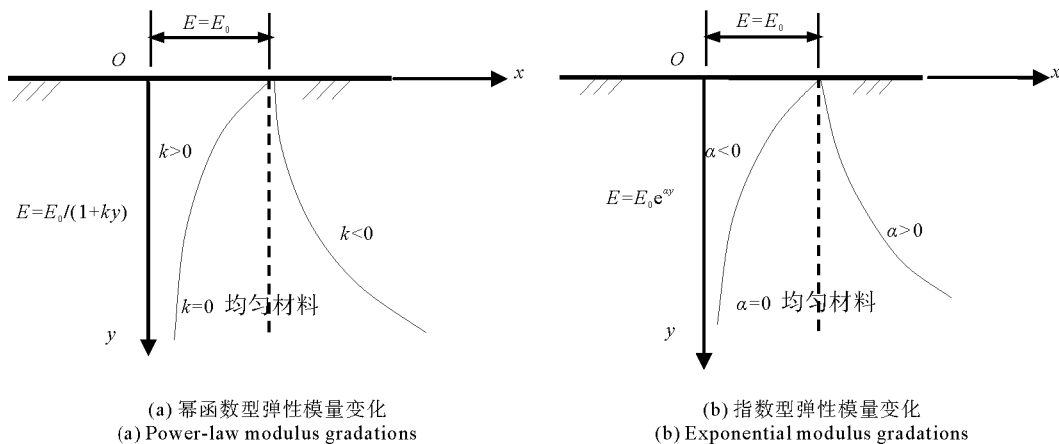


图 7 半无限空间体受均布荷载问题的弹模变化示意图

Fig. 7 Modulus gradations of a half-space under uniform loading

将  $E = E_0 / (1 + ky)$  代入式(4)得:

$$(1 + ky) \frac{d^2 v}{dy^2} - k \frac{dv}{dy} = 0. \quad (15)$$

解该常微分方程得位移解:

$$v = C_1 + C_2 \left( y + \frac{1}{k} \right)^2。$$

代入式(3),应力解为:

$$\sigma_x = \frac{2\mu E_0}{(1+\mu)(1-2\mu)} \cdot \frac{C_2}{k} = \sigma_z, \quad \sigma_y = \frac{2(1-\mu)E_0}{(1+\mu)(1-2\mu)} \cdot \frac{C_2}{k}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0。$$

上两式利用边界条件式(13),求得  $C_1, C_2$ , 得位移解和应力解分别为:

$$v = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)q}{(1-\mu)E_0} \left[ \frac{k}{2}(h^2 - y^2) + (h-y) \right], \quad v_{\max} = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)q}{(1-\mu)E_0} \left( \frac{k}{2}h^2 + h \right); \quad (16a)$$

$$\sigma_x = \sigma_z = -\frac{\mu}{1-\mu}q, \quad \sigma_y = -q, \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0。 \quad (16b)$$

式(16a)所得应力解与均匀材料的应力解完全一致,说明弹性模量沿深度的变化并未引起应力场的改变。而式(16b)所示位移解当  $k=0$  时,可退化到均匀材料的位移解。 $k$  取不同值时,沉降  $v$  随深度  $y$  的变化如图 8 所示。从图中可以看出, $k=0$  时变形随深度呈直线变化; $k>0$  时,变形比  $k=0$  时大,随深度变化速度越来越快; $k<0$  时,变形比  $k=0$  时小,随深度变化速度越来越慢。位移的这些变化都与弹模随深度变化相反。

### 3.2 弹性模量呈指数函数形式变化

$E = E_0 e^{\alpha y}$  代表弹性模量随深度呈指数型变化,其具体变化如图 7(b)所示。 $\alpha < 0$  时,弹性模量随深度递减; $\alpha > 0$ ,弹性模量随深度递增; $\alpha = 0$  时, $E = E_0$  为均匀材料时的情形。将  $E = E_0 e^{\alpha y}$  代入式(4)得:

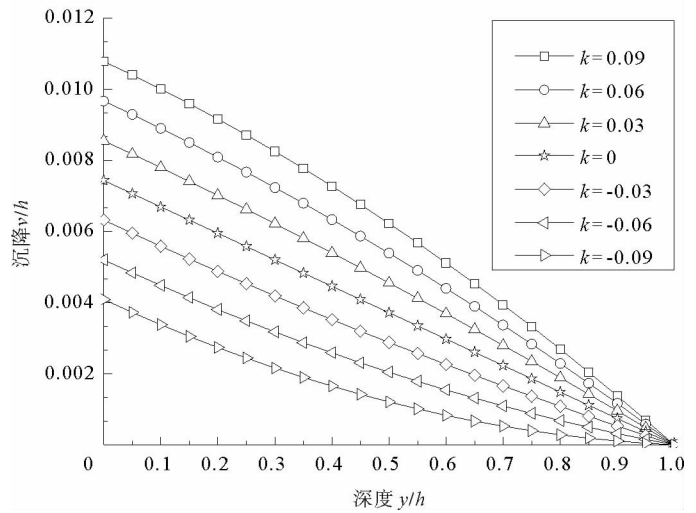


图 8 不同  $k$  值下半无限空间体沉降随深度的变化

Fig. 8 Settlements variation with depth of different  $k$  in the half-space

$$\frac{d^2 v}{dy^2} + \alpha \frac{dv}{dy} = 0。 \quad (17)$$

解该常微分方程得:

$$v = C_2 - \frac{C_1}{\alpha} e^{-\alpha y}。$$

借助边界条件求出  $C_1, C_2$ , 得应力解与位移解为:

$$v = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)q e^{-\alpha y} - e^{-\alpha h}}{(1-\mu)E_0 \alpha}, \quad v_{\max} = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)q (1 - e^{-\alpha h})}{(1-\mu)E_0 \alpha}; \quad (18a)$$

$$\sigma_x = \sigma_z = -\frac{\mu}{1-\mu}q, \quad \sigma_y = -q, \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0。 \quad (18b)$$

式(18a)所得应力解与幂函数变化的算例中应力解及均匀材料的应力解式完全一致,这再次说明对于该问题,弹性模量沿深度的变化并不引起应力场的改变。而式(18b)所示位移解,当  $\alpha \rightarrow 0$  时,其极限与均匀材料的位移相等,证明了推导过程的正确性。画出  $\alpha$  取不同值时,沉降  $v$  随深度  $y$  的变化,如图 9 所示。在  $\alpha = 0$  时,沉降随深度呈线性变化; $\alpha > 0$  时,变化速度越来越慢; $\alpha < 0$  时,沉降随深度变化速度越来越快。弹性模量随深度的变化对位移场分布产生了影响。因此,在实际工程中,可通过地基处理调整弹性模量的变化,从而得到理想的位移分布。

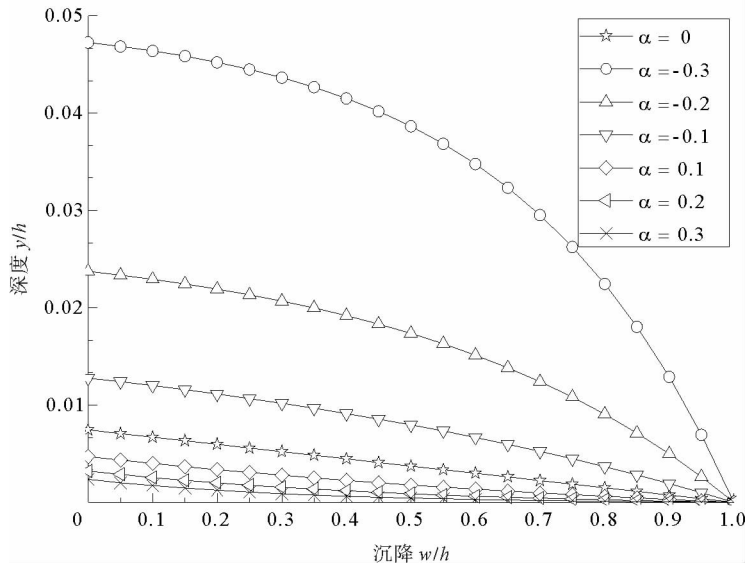


图 9 不同  $\alpha$  值下半无限空间体沉降随深度的变化

Fig. 9 Settlements variation with depth of different  $\alpha$  in the half-space

#### 4 结论

分别采用应力函数法和位移法推导了直角坐标系下梯度材料薄板在不同分布外荷载下拉压问题和半空间体受均布荷载问题的几个简单解答,并对其应力场、位移场进行分析。分析表明,在半空间体受均布荷载的问题上,弹性模量随深度的变化不影响其应力分布;其他情况下,弹性模量的变化对应力场和位移场都有影响。

#### 参考文献:

- [1]周志刚,郑健龙.非均匀弹性材料在平面状态下的一般解[J].长沙交通学院学报,1994,10(1):46-53.  
Zhou Zhigang,Zheng Jianlong. A general solution of problems about non-homogenous elastic materials in plane state[J]. Journal of Changsha Communications Institute,1994,10(1):46-53.
- [2]Sanker B V. An elasticity solution for functionally graded beams[J]. Composites Science and Technology,2001,61(5):689-696.
- [3]于涛,仲政.均布荷载作用下功能梯度悬臂梁弯曲问题的解析解[J].固体力学学报,2006,27(1):15-20.  
Yu Tao,Zhong Zheng. A general solution of a clamped functionally graded cantilever-beam under uniform loading[J]. Acta Mechanica Sinica,2006,27(1):15-20.
- [4]仲政,于涛.功能梯度悬臂梁弯曲问题的解析解[J].同济大学学报,2006,34(4):443-337.  
Zhong Zheng,Yu Tao. Analytical bending solution of functionally graded cantilever-beam[J]. Journal of Tongji University, 2006,34(4):443-337.
- [5]Sadd M H. Some simple Cartesian solutions to plane non-homogenous elasticity problems[J]. Mechanics Research Communications,2010,37(1):22-27.
- [6]Gibson R E. Some results concerning displacements and stresses in a non-homogeneous elastic half-space[J]. Géotechnique, 1967,17(1):58-67.
- [7]Booker J R,Blame N P,Davis E H. The behavior of an elastic non-homogenous half-space;Part 1-line and point loads[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics,1985,9(4):353-367.
- [8]Yue Z Q. On generalized Kelvin solutions in a multilayered elastic medium[J]. Journal of Elasticity,1995,40(1):1-43.
- [9]肖洪天,岳中琦.梯度材料断裂力学的新型边界元法分析[M].北京:高等教育出版社,2011:11-30.
- [10]Wang C D,Tzeng C S,Pan E,et al. Displacements and stresses due to a vertical point load in an inhomogeneous transversely isotropic half-space[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences,2003,40(5):667-685.
- [11]徐芝纶.弹性力学简明教程[M].3版.北京:高等教育出版社,2002:158-160.