第 35 卷 第 4 期
2016 年 8 月

Vol. 35 No. 4
Aug. 2016

Journal of Shandong University of Science and Technology
Natural Science

广义转移速率条件下连续时间奇异 Markov 跳变系统的随机容许性分析

孙明妹[1],张维海[2],李　刚[1]

(1. 山东科技大学 数学与系统科学学院,山东 青岛 266590;2. 山东科技大学 电气与自动化工程学院,山东 青岛 266590)

摘　要:针对一类连续时间奇异 Markov 跳变系统,研究了其随机容许性的问题。首先,引入广义转移速率的概念,同时给出了该类奇异 Markov 跳变系统正则、无脉冲、随机稳定的充分性判据;其次,对广义转移速率进行分类处理,利用严格线性矩阵不等式和 Schur 补理论得出系统随机容许性的充分条件;最后,设计状态反馈控制器,确保系统满足随机容许性,并给出系统状态反馈矩阵表示形式。

关键词:奇异 Markov 跳变系统;广义转移速率;随机容许性;线性矩阵不等式;Schur 补

中图分类号: TP13　　　**文献标志码**:A　　　**文章编号**:1672-3767(2016)04-0086-07

Stochastic Admissibility of Continuous-time Singular Markov Jump Systems with General Uncertain Transition Rates

SUN Mingmei[1], ZHANG Weihai[2], LI Gang[1]

(1. College of Mathematics and Systems Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China; 2. College of Electrical Engineering and Automation, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

Abstract: This paper is devoted to studying the stochastic admissibility for a class of continuous-time singular Markov jump systems. Firstly, the concept of general uncertain transition rates was introduced and the sufficient criteria for the regular, impulse-free and stochastic stability of the systems were presented. Secondly, the general uncertain transition rates were classified and the sufficient conditions for stochastic admissibility was obtained with the aid of Schur's complement and a set of strict linear matrix inequalities. Finally, a state feedback controller was designed to guarantee the stochastic admissibility of the systems and the system state feedback matrix representation was given.

Key words: singular Markov jump systems; general uncertain transition rates; stochastic admissibility; linear matrix inequalities; Schur's complement

Dai[1] 的奇异系统理论专著标志着奇异系统基础理论的初步形成,由于不少实际系统如经济领域中的动态投入-产出模型、电力系统的多时标问题只可以由奇异系统来更详尽的描述,所以奇异系统的研究得到了众多学者的广泛关注。奇异系统相较于状态空间系统是更一般的动力系统,因而被广泛的应用于众多的领

收稿日期:2016-01-13

基金项目:国家自然科学基金项目(61573227);山东省"泰山学者"项目;山东科技大学研究生创新基金项目(YC150338);青岛市博士后人员应用研究项目(2015188)

作者简介:孙明妹(1989—),女,山东聊城人,硕士研究生,主要从事奇异 Markov 系统稳定性的研究.
E-mail:m_msun@163. com
张维海(1965—),男,山东莱阳人,教授,博士生导师,主要研究范围涉及随机系统的谱分析,随机 H_∞ 控制和滤波器设计,机器人控制和量子系统的跟踪控制等,本文通信作者. E-mail:w_hzhang@163. com

域和实际系统中，例如机器人技术、经济管理系统、电力系统、电气网络系统、网络分析等。容许性分析是奇异系统研究的基础，近年来国内外学者对于奇异系统容许性进行了广泛的研究，并取得了优异的成果[2-5]。

随着应用奇异系统理论在实际工程问题研究中的不断深入，发现有大量的动力学系统因为随机突变的现象而引发系统的跳变，例如系统元件出现故障、参数发生改变、环境条件产生突变等，经研究发现系统的跳变规则遵从 Markov 过程的规律，故而，学者对于奇异 Markov 跳变系统进行了深入的研究[6-8]。一般地，我们认为系统的转移速率是完全已知的或者是部分已知的亦或有界的，例如，在已知系统转换率上界的情况下，文献[6]考虑了连续时间和离散时间马尔可夫跳变线性系统的随机鲁棒稳定性。

然而，对一般的系统，我们很难得到精确的转移速率值，从而需要我们在转移速率未知的情况下来估测系统的稳定性性能。为了解决这一问题，我们对奇异 Markov 跳变系统引入广义转移速率来确定系统的随机容许性性能。本文主要研究了一类奇异 Markov 跳变系统的随机容许性问题，重点在于广义转移速率的引入，广义转移速率与奇异 Markov 跳变系统的巧妙结合为本文主要的突破点，使得系统具有更广泛的研究价值。

1 系统描述

为符号表述简单，首先给出本文中所用符号的说明：$\mathbf{Z}$ 表示整数集合；$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维欧式空间；$\mathbf{R}^{m\times n}$ 表示 mm 行 n 列的实数矩阵集合；$\mathbf{N}^+$ 为正整数集合；$\boldsymbol{A}>0(\boldsymbol{A}\geqslant 0,\boldsymbol{A}<0,\boldsymbol{A}\leqslant 0)$ 分别表示正定(半正定，负定，半负定)矩阵；$\boldsymbol{I}$ 表示单位阵；$\boldsymbol{A}'$ 定义为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置；$\boldsymbol{A}^{-1}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆；$E\|\cdot\|$ 表示期望算子，$\boldsymbol{A}\leqslant\boldsymbol{B}$ 表示 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\leqslant 0$；矩阵中“$*$”表示矩阵下三角元素同于上三角。

我们考虑如下连续时间奇异 Markov 跳变系统：

$$\boldsymbol{F}(r_t)\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}(r_t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}(r_t)\boldsymbol{u}(t)\ ,\tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 为系统状态向量，$\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^m$ 为系统输入，初始状态为 $\boldsymbol{x}(0)=x_0,\boldsymbol{r}(0)=r_0$。模态跳跃过程 $\{r_t,t\geqslant 0\}$ 为 Markov 过程，该过程为右连续的且取值于有限状态空间 $S=\{1,2,\cdots,v\}$。模态之间的变化速率定义如下：

$$\Pr(r_{t+h}=j\,|\,r_t=i)=\begin{cases}p_{ij}h+o(h),i\neq j,\\1+p_{ij}h+o(h),i=j,\end{cases}$$

其中：$h>0,\lim\limits_{h\to 0}(o(h)/h)=0$。$p_{ij}$ 表示由时间 t 时刻的模态 i 转移到 $t+h$ 时刻的模态 j 的转移速率，且 p_{ij} 满足如下关系式：

$$\begin{cases}p_{ij}\geqslant 0,i\neq j,\\p_{ii}=-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{v}p_{ij}\leqslant 0,i=j。\end{cases}$$

为简化计算，给出以下定义：对 $\forall r_t=i,i\in S$，矩阵 $\boldsymbol{A}(r_t),\boldsymbol{B}(r_t),\boldsymbol{F}(r_t)$ 分别定义为 $\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{B}_i,\boldsymbol{F}(i)$，其中 $\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{B}_i,\boldsymbol{C}_i,\boldsymbol{F}(i)$ 都为已知的常实数矩阵。对于任意的 $i\in S$，$\boldsymbol{F}(r_t)\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 可以为奇异矩阵并假设 $rank(\boldsymbol{F}(i))=r\leqslant n$。

定义 1[9]：

1) 若 $\forall i\in S$，都有 $\det(s\boldsymbol{F}(i)-\boldsymbol{A}_i)$ 不恒为 0，则称开环奇异 Markov 跳变系统(1)为正则的。

2) 若对 $\forall i\in S$ 都有 $\deg(\det(s\boldsymbol{F}(i)-\boldsymbol{A}_i))=rank(\boldsymbol{F}(i))$，那么开环奇异 Markov 跳变系统(1)是无脉冲的。

3) 若对于 $\forall\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{r}_0\in S$，存在标量 $M(x_0,r_0)>0$ 满足

$$\lim_{t\to\infty}E\{\int_0^t\boldsymbol{x}^T(s,x_0,r_0)\boldsymbol{x}(s,x_0,r_0)ds\,|\,\boldsymbol{x}_0,r_0\}\leqslant M(\boldsymbol{x}_0,r_0)\ ,$$

则称开环奇异 Markov 跳变系统(1)为随机稳定的。

4)开环奇异 Markov 跳变系统(1)称为是随机容许的，若该系统同时满足正则、无脉冲和随机稳定。

引入列满秩矩阵 $\boldsymbol{R}_i\in\mathbf{R}^{(n-r)\times n}$，$\boldsymbol{S}_i\in\mathbf{R}^{n\times(n-r)}$，其中 $\boldsymbol{R}_i\in\mathbf{R}^{(n-r)\times n}$ 满足 $\boldsymbol{F}'(i)\boldsymbol{R}'_i=0$ 或 $\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{F}(i)=0$，其中

矩阵 $\boldsymbol{R}_i$ 和 $\boldsymbol{S}_i$ 将在下文中重复使用。

引理 1[10] 称开环系统(1)为随机容许的,当且仅当存在矩阵 $\boldsymbol{P}_i \in \mathbf{R}^{n\times n} > 0$ 和矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_i \in \mathbf{R}^{(n-r)\times(n-r)}$,$i \in S$ 使得如下矩阵不等式对 $\forall i \in S$ 成立

$$\boldsymbol{A}'_i(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{F}(i)+\boldsymbol{R}'_i\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}'_i)+(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{F}(i)+\boldsymbol{R}'_i\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}'_i)'\boldsymbol{A}_i+\sum_{j=1}^{v}p_{ij}\boldsymbol{F}'(i)\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{F}(i)<0\ 。\tag{2}$$

引理 2[11] $\boldsymbol{F}_L,\boldsymbol{F}_R$ 为列满秩矩阵满足 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_L\boldsymbol{F}'_R$,$\boldsymbol{P}$ 为对称矩阵且使得 $\boldsymbol{F}'_R\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}_R>0$,则存在对称矩阵 $\bar{\boldsymbol{P}}$ 使得 $\boldsymbol{F}'_L\bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{F}_L=(\boldsymbol{F}'_R\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}_R)^{-1}$ 。

引理 3[12] 对任意给定的实数 ξ 以及任意的实数矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{T}>0$,有

$$\xi(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}')\leqslant\xi^2\boldsymbol{T}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Q}'\ 。$$

2 广义转移速率

系统(1)的模态转移速率矩阵 $\boldsymbol{\Pi}=(p_{ij})_{v\times v}$ 为广义不确定的,其定义为

$$\begin{pmatrix} \hat{p}_{11}+\Delta_{11} & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \hat{p}_{23}+\Delta_{23} & \cdots & \hat{p}_{2v}+\Delta_{2v} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \hat{p}_{v2}+\Delta_{v2} & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix},\tag{3}$$

其中:$\hat{p}_{ij}$ 和 $\Delta_{ij}\in[-\delta_{ij},\delta_{ij}]$ 分别表示不确定转移速率的估计值和估计误差($\delta_{ij}>0$ 可任意调节),$\hat{p}_{ij}$ 和 δ_{ij} 均是已知常数,“?”表示转移速率 p_{ij} 的值未知。

为了使得系统更具有一般性,我们将模态跳跃过程的取值空间 S 进行划分:$S=U_k^i\cup U_{uk}^i$,其中 $U_k^i=\{j$:对任意的 $j\in S$,p_{ij} 的估计值已知$\}$;$U_{uk}^i=\{j$:对任意的 $j\in S$,p_{ij} 的估计值未知$\}$。另外,若 $U_{uk}^i\neq\phi$,定义 $U_k^i=\{k_1^i,\cdots,k_m^i\}$,$U_{uk}^i=\{l_1^i,\cdots,l_s^i\}$,其中 $k_m^i\in\mathbf{N}^+$ 表示矩阵 $\boldsymbol{\Pi}$ 中第 i 行中序号为 k_m^i 的第 m 个已知元素且 $l_s^i\in\mathbf{N}^+$ 表示矩阵 Π 第 i 行中序号为 l_s^i 的第 s 个未知元素,并且 $k_m^i+l_s^i=v$ 。

注 1:若 $\forall i\in S$,$U_{uk}^i=\phi$,$\delta_{ij}\neq0$,矩阵(3)退化为有界不确定转移矩阵;若 $\delta_{ij}=0$,$\forall i\in S$,$\forall j\in U_k^i$,那么矩阵(3)退化为部分不确定转移速率矩阵。有界不确定转移速率模型和部分不确定转移速率模型都为广义不确定转移速率模型的特例。

注 2:对于不同情况的转移速率我们做如下假设:

① 若 $U_{uk}^i=\phi$,则对 $\forall j\in S,j\neq i$,有 $\hat{p}_{ij}-\delta_{ij}\geqslant0$,$\hat{p}_{ii}=-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{v}\hat{p}_{ij}$,且 $\delta_{ii}=-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{v}\delta_{ij}$;

② 若 $U_{uk}^i\neq\phi$ 且 $i\in U_k^i$,则 $\forall j\in U_k^i,j\neq i$,有 $\hat{p}_{ij}-\delta_{ij}\geqslant0$,$p_{ii}+\delta_{ii}\leqslant0$,$\sum\limits_{j\in U_k^i}p_{ij}\leqslant0$;

③ 若 $U_{uk}^i\neq\phi$ 且 $i\notin U_k^i$,则 $\forall j\in U_k^i,j\neq i$,有 $\hat{p}_{ij}-\delta_{ij}\geqslant0$ 。

3 奇异 Markov 跳变系统随机容许性

本节中我们主要分析系统(1)的随机容许性问题,借助线性矩阵不等式及 Schur 补理论,设计状态反馈控制器,分析系统在广义转移速率的条件下系统(1)随机容许的条件。

3.1 奇异 Markov 跳变开环系统随机容许性

首先,我们针对广义转移速率的情况下连续时间奇异 Markov 跳变系统,研究系统(1)的开环系统($u(t)=0$)稳定性的条件。

定理 1 对带有广义转移速率矩阵(3)的开环系统(1)随机容许性判据的描述,有下列结论成立:

1) 当 $U_{uk}^i\neq\phi,i\in U_k^i,U_k^i=\{k_1^i,k_2^i,\cdots,k_m^i\}$ 时,存在两组矩阵 $\boldsymbol{P}_i,\bar{\boldsymbol{P}}_i\in\mathbf{R}^{n\times n}>0,i\in S$ 及列满秩矩阵 $\boldsymbol{F}_L(i)$,$\boldsymbol{F}_R(i)$ 满足 $\boldsymbol{F}(i)=\boldsymbol{F}_L(i)\boldsymbol{F}'_R(i)$,$\boldsymbol{F}'_L(i)\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{F}_L(i)=(\boldsymbol{F}'_R(i)\bar{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{F}_R(i))^{-1}$,

使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_i - \sum_{j\in U_k^i}(\hat{p}_{ij}+\delta_{ij})\boldsymbol{F}'(i)\boldsymbol{P}_l\boldsymbol{F}(i) & \boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{F}_R(i)) \\ \boldsymbol{\varepsilon}'_i(\boldsymbol{F}_R(i)) & -\boldsymbol{\chi}_i(\bar{\boldsymbol{P}}_j) \end{bmatrix} < 0, \tag{4}$$

则无约束系统(1)是随机容许的。

其中：$\boldsymbol{\varepsilon}_i(\boldsymbol{F}_R(i)) = (\sqrt{\hat{p}_{ik_1^i}+\delta_{ik_1^i}}\boldsymbol{F}_R(i), \sqrt{\hat{p}_{ik_2^i}+\delta_{ik_2^i}}\boldsymbol{F}_R(i), \cdots, \sqrt{\hat{p}_{ik_m^i}+\delta_{ik_m^i}}\boldsymbol{F}_R(i))$,

$\boldsymbol{\chi}_i(\bar{\boldsymbol{P}}_j) = diag\{\boldsymbol{F}'_R(i)\bar{\boldsymbol{P}}_{k_1^i}\boldsymbol{F}_R(i), \cdots, \boldsymbol{F}'_R(i)\bar{\boldsymbol{P}}_{k_m^i}\boldsymbol{F}_R(i)\}$,

$\boldsymbol{\Psi}_i = \boldsymbol{A}'_i(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{F}(i) + \boldsymbol{R}'_i\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}'_i) + (\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{F}(i) + \boldsymbol{R}'_i\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}'_i)'\boldsymbol{A}_i$ 。

2) 若 $U_{uk}^i \neq \phi, i \notin U_k^i, U_k^i = \{k_1^i, k_2^i, \cdots, k_m^i\}$，存在一组矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{P}}_i \in \mathbf{R}^{n\times n} > 0, i \in S$，及矩阵 $\boldsymbol{T}_{ij} > 0$，$j \in U_k^i$，使得下列对称矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_i & \boldsymbol{F}'(i)(\widetilde{\boldsymbol{P}}_{k_1^i}-\widetilde{\boldsymbol{P}}_i)\boldsymbol{F}(i) & \cdots & \boldsymbol{F}'(i)(\widetilde{\boldsymbol{P}}_{k_m^i}-\widetilde{\boldsymbol{P}}_i)\boldsymbol{F}(i) \\ * & -\boldsymbol{T}_{ik_1^i} & \cdots & 0 \\ * & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & -\boldsymbol{T}_{ik_m^i} \end{bmatrix} < 0, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{F}'(i)(\boldsymbol{P}_j - \boldsymbol{P}_i)\boldsymbol{F}(i) \leqslant 0, \tag{6}$$

那么开环系统(1)是随机容许的。

$$\boldsymbol{\Xi}_i = \boldsymbol{A}'_i(\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{F}(i) + \boldsymbol{R}'_i\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}'_i) + (\widetilde{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{F}(i) + \boldsymbol{R}'_i\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}'_i)'\boldsymbol{A}_i,$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_i = \boldsymbol{\Xi}_i + \sum_{j\in U_k^i}\hat{p}_{ij}\boldsymbol{F}'(i)(\widetilde{\boldsymbol{P}}_j - \widetilde{\boldsymbol{P}}_i)\boldsymbol{F}(i) + \sum_{j\in U_k^i}\frac{1}{4}\delta_{ij}^2\boldsymbol{T}_{ij}\text{。}$$

3) 当 $U_{uk}^i = \phi$ 时，存在矩阵组 $\hat{\boldsymbol{P}}_i, \bar{\hat{\boldsymbol{P}}}_i \in \mathbf{R}^{n\times n} > 0, i \in S$ 和列满秩矩阵 $\hat{\boldsymbol{F}}_L(i)$，$\hat{\boldsymbol{F}}_R(i)$ 满足 $\boldsymbol{F}(i) = \hat{\boldsymbol{F}}_L(i)\hat{\boldsymbol{F}}'_R(i)$，$\hat{\boldsymbol{F}}'_L(i)\hat{\boldsymbol{P}}_i\hat{\boldsymbol{F}}_L(i) = (\hat{\boldsymbol{F}}'_R(i)\bar{\hat{\boldsymbol{P}}}_i\hat{\boldsymbol{F}}_R(i))^{-1}$，对 $\forall i \in S$ 使得如下线性矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_i & \sqrt{\hat{p}_{i1}+\delta_{i1}}\hat{\boldsymbol{F}}_R(1) & \cdots & \sqrt{\hat{p}_{iv}+\delta_{iv}}\hat{\boldsymbol{F}}_R(v) \\ * & -\hat{\boldsymbol{F}}'_R(1)\bar{\hat{\boldsymbol{P}}}_1\hat{\boldsymbol{F}}_R(1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & \cdots & -\hat{\boldsymbol{F}}'_R(v)\bar{\hat{\boldsymbol{P}}}_v\hat{\boldsymbol{F}}_R(v) \end{bmatrix} < 0, \tag{7}$$

则有开环系统(1)是随机容许的。

$$\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_i = \boldsymbol{A}'_i(\hat{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{F}(i) + \boldsymbol{R}'_i\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}'_i) + (\hat{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{F}(i) + \boldsymbol{R}'_i\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}'_i)'\boldsymbol{A}_i\text{。}$$

证明　根据引理 1 和引理 2，我们得到：

1) 当 $U_{uk}^i \neq \phi, i \in U_k^i, U_k^i = \{k_1^i, k_2^i, \cdots, k_m^i\}$ 时，对 $\forall j \in U_{uk}^i$，总能找到 $l \in U_{uk}^i$，使得 $\boldsymbol{F}'(i)\boldsymbol{P}_l\boldsymbol{F}(i) \geqslant \boldsymbol{F}'(i)\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{F}(i)$，所以有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Psi}_i + \sum_{j=1}^{v}p_{ij}\boldsymbol{F}'(i)\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{F}(i) = \\
&\boldsymbol{\Psi}_i + \sum_{j\in U_k^i}p_{ij}\boldsymbol{F}'(i)\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{F}(i) + \sum_{j\in U_{uk}^i}p_{ij}\boldsymbol{F}'(i)\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{F}(i) \leqslant \\
&\boldsymbol{\Psi}_i + \sum_{j\in U_k^i}p_{ij}\boldsymbol{F}'(i)\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{F}(i) + \sum_{j\in U_{uk}^i}p_{ij}\boldsymbol{F}'(i)\boldsymbol{P}_l\boldsymbol{F}(i) = \\
&\boldsymbol{\Psi}_i + \sum_{j\in U_k^i}p_{ij}\boldsymbol{F}'(i)\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{F}(i) - \sum_{j\in U_k^i}p_{ij}\boldsymbol{F}'(i)\boldsymbol{P}_l\boldsymbol{F}(i) \leqslant \\
&\boldsymbol{\Psi}_i + \sum_{j\in U_k^i}(\hat{p}_{ij}+\delta_{ij})\boldsymbol{F}'(i)\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{F}(i) - \sum_{j\in U_k^i}(\hat{p}_{ij}+\delta_{ij})\boldsymbol{F}'(i)\boldsymbol{P}_l\boldsymbol{F}(i) = \\
&\boldsymbol{\Psi}_i - \sum_{j\in U_k^i}(\hat{p}_{ij}+\delta_{ij})\boldsymbol{F}'(i)\boldsymbol{P}_l\boldsymbol{F}(i) + \sum_{j\in U_k^i}(\hat{p}_{ij}+\delta_{ij})\boldsymbol{F}_R(i)\boldsymbol{F}'_L(i)\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{F}_L(i)\boldsymbol{F}'_R(i) = \\
&\boldsymbol{\Psi}_i - \sum_{j\in U_k^i}(\hat{p}_{ij}+\delta_{ij})\boldsymbol{F}'(i)\boldsymbol{P}_l\boldsymbol{F}(i) + \sum_{j\in U_k^i}(\hat{p}_{ij}+\delta_{ij})\boldsymbol{F}_R(i)(\boldsymbol{F}'_R(i)\bar{\boldsymbol{P}}_j\boldsymbol{F}_R(i))^{-1}\boldsymbol{F}'_R(i) < 0,
\end{aligned}$$

由上式及 Schur 补理论可推知定理 1 中 1)结论成立。

2) 当 $U_{uk}^{i}\neq\phi, i\notin U_{k}^{i}, U_{k}^{i}=\{k_{1}^{i},k_{2}^{i},\cdots,k_{m}^{i}\}$ 时,有(6)式成立,可以得到

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\Xi}_{i}+\sum_{j=1}^{v}p_{ij}\boldsymbol{F}'(i)\widetilde{\boldsymbol{P}}_{j}\boldsymbol{F}(i)= \\
\boldsymbol{\Xi}_{i}+\sum_{j\in U_{k}^{i}}p_{ij}\boldsymbol{F}'(i)\widetilde{\boldsymbol{P}}_{j}\boldsymbol{F}(i)+\sum_{j\in U_{uk}^{i},j\neq i}p_{ij}\boldsymbol{F}'(i)\widetilde{\boldsymbol{P}}_{j}\boldsymbol{F}(i)+p_{ii}\boldsymbol{F}'(i)\widetilde{\boldsymbol{P}}_{i}\boldsymbol{F}(i)\leqslant \\
\boldsymbol{\Xi}_{i}+\sum_{j\in U_{k}^{i}}p_{ij}\boldsymbol{F}'(i)\widetilde{\boldsymbol{P}}_{j}\boldsymbol{F}(i)+\sum_{j\in U_{uk}^{i},j\neq i}p_{ij}\boldsymbol{F}'(i)\widetilde{\boldsymbol{P}}_{i}\boldsymbol{F}(i)+p_{ii}\boldsymbol{F}'(i)\widetilde{\boldsymbol{P}}_{i}\boldsymbol{F}(i)= \\
\boldsymbol{\Xi}_{i}+\sum_{j\in U_{k}^{i}}p_{ij}\boldsymbol{F}'(i)\widetilde{\boldsymbol{P}}_{j}\boldsymbol{F}(i)+(-p_{ii}-\sum_{j\in U_{k}^{i}}p_{ij})\boldsymbol{F}'(i)\widetilde{\boldsymbol{P}}_{i}\boldsymbol{F}(i)+p_{ii}\boldsymbol{F}'(i)\widetilde{\boldsymbol{P}}_{i}\boldsymbol{F}(i)= \\
\boldsymbol{\Xi}_{i}+\sum_{j\in U_{k}^{i}}p_{ij}\boldsymbol{F}'(i)\widetilde{\boldsymbol{P}}_{j}\boldsymbol{F}(i)-\sum_{j\in U_{k}^{i}}p_{ij}\boldsymbol{F}'(i)\widetilde{\boldsymbol{P}}_{i}\boldsymbol{F}(i)= \\
\boldsymbol{\Xi}_{i}+\sum_{j\in U_{k}^{i}}p_{ij}\boldsymbol{F}'(i)(\widetilde{\boldsymbol{P}}_{j}-\widetilde{\boldsymbol{P}}_{i})\boldsymbol{F}(i)\leqslant \\
\boldsymbol{\Xi}_{i}+\sum_{j\in U_{k}^{i}}(\hat{p}_{ij}+\delta_{ij})\boldsymbol{F}'(i)(\widetilde{\boldsymbol{P}}_{j}-\widetilde{\boldsymbol{P}}_{i})\boldsymbol{F}(i)<0,
\end{gathered}$$

根据引理 3,可得知

$$\begin{gathered}
\sum_{j\in U_{k}^{i}}\delta_{ij}\boldsymbol{F}'(i)(\widetilde{\boldsymbol{P}}_{j}-\widetilde{\boldsymbol{P}}_{i})\boldsymbol{F}(i)= \\
2\cdot\sum_{j\in U_{k}^{i}}\frac{1}{2}\delta_{ij}\boldsymbol{F}'(i)(\widetilde{\boldsymbol{P}}_{j}-\widetilde{\boldsymbol{P}}_{i})\boldsymbol{F}(i)\leqslant \\
\sum_{j\in U_{k}^{i}}\frac{1}{4}\delta_{ij}^{2}\boldsymbol{T}_{ij}+\sum_{j\in U_{k}^{i}}(\boldsymbol{F}'(i)(\widetilde{\boldsymbol{P}}_{j}-\widetilde{\boldsymbol{P}}_{i})\boldsymbol{F}(i))\boldsymbol{T}_{ij}^{-1}(\boldsymbol{F}'(i)(\widetilde{\boldsymbol{P}}_{j}-\widetilde{\boldsymbol{P}}_{i})\cdot\boldsymbol{F}'(i)(\widetilde{\boldsymbol{P}}_{j}-\widetilde{\boldsymbol{P}}_{i})\boldsymbol{F}(i)
\end{gathered}$$

结合以上两式,以及 Schur 补理论可知定理 1 中结论 2)成立。

3) 当 $U_{uk}^{i}=\phi$ 时,类似于 1)的证明,有:

$$\begin{gathered}
\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{i}+\sum_{j=1}^{v}p_{ij}\boldsymbol{F}'(i)\hat{\boldsymbol{P}}_{j}\boldsymbol{F}(i)= \\
\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{i}+\sum_{j=1}^{v}(\hat{p}_{ij}+\delta_{ij})\boldsymbol{F}'(i)\hat{\boldsymbol{P}}_{j}\boldsymbol{F}(i)= \\
\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{i}+\sum_{j=1}^{v}(\hat{p}_{ij}+\delta_{ij})\hat{\boldsymbol{F}}_{R}(i)\hat{\boldsymbol{F}}_{L}(i)\hat{\boldsymbol{P}}_{j}\hat{\boldsymbol{F}}_{L}(i)\hat{\boldsymbol{F}}_{R}(i)= \\
\widetilde{\boldsymbol{\Xi}}_{i}+\sum_{j=1}^{v}(\hat{p}_{ij}+\delta_{ij})\hat{\boldsymbol{F}}_{R}(i)(\hat{\boldsymbol{F}}_{R}(i)\,\overline{\boldsymbol{P}}_{j}\hat{\boldsymbol{F}}_{R}(i))^{-1}\hat{\boldsymbol{F}}_{R}(i)<0,
\end{gathered}$$

由上式,我们可推知定理 1 中结论 3)成立。证毕。

3.2 奇异 Markov 跳变闭环系统随机容许性

在定理 1 的基础上,我们设计状态反馈控制器,使得(1)的闭环系统满足正则、无脉冲、随机稳定的条件。

对于(2)式我们总能找到一组对称可逆矩阵 $\boldsymbol{G}_{i}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 使得(2)可描述为:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{A}_{i}'(\boldsymbol{P}_{i}\boldsymbol{F}(i)+\boldsymbol{R}_{i}'\boldsymbol{\Phi}_{i}\boldsymbol{S}_{i}')+(\boldsymbol{P}_{i}\boldsymbol{F}(i)+\boldsymbol{R}_{i}'\boldsymbol{\Phi}_{i}\boldsymbol{S}_{i}')'\boldsymbol{A}_{i}+\sum_{j=1}^{v}p_{ij}\boldsymbol{F}'(i)\boldsymbol{P}_{j}\boldsymbol{F}(i)= \\
\boldsymbol{\Psi}_{i}+\sum_{j=1}^{v}p_{ij}\boldsymbol{F}'(i)\boldsymbol{P}_{j}\boldsymbol{F}(i)= \\
(\boldsymbol{I}\quad\boldsymbol{A}_{i})\begin{pmatrix}\boldsymbol{G}_{i}\boldsymbol{A}_{i}+\boldsymbol{A}_{i}\boldsymbol{G}_{i}'-\boldsymbol{A}_{i}'\boldsymbol{G}_{i}\boldsymbol{A}_{i}+\boldsymbol{\Psi}_{i}+\sum_{j=1}^{v}p_{ij}\boldsymbol{F}'(i)\boldsymbol{P}_{j}\boldsymbol{F}(i) & \boldsymbol{A}_{i}'\boldsymbol{G}_{i}-\boldsymbol{G}_{i} \\ \boldsymbol{G}_{i}'\boldsymbol{A}_{i}-\boldsymbol{G}_{i}' & -\boldsymbol{G}_{i}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{A}_{i}\end{pmatrix}<0,
\end{gathered}$$

由上式可知(2)式等价于

$$\begin{pmatrix} G_iA_i+A_iG_i'-A_i'G_iA_i+\Psi_i+\sum_{j=1}^{v}p_{ij}F'(i)P_jF(i) & A_i'G_i-G_i \\ G_i'A_i-G_i' & -G_i' \end{pmatrix}<0。\tag{8}$$

取 $L_i=G_i^{-1}$，对式(8)分别左乘右乘矩阵 $\begin{pmatrix} L_i & 0 \\ 0 & L_i' \end{pmatrix}$，得到如下矩阵不等式：

$$\begin{pmatrix} A_iL_i+L_iA_iG_i'L_i-L_iA_i'G_iA_iL_i+L_i\Psi_iL_i+\sum_{j=1}^{v}p_{ij}L_iF'(i)P_jF(i)L_i & L_iA_i'-L_i \\ A_iL_i'-L_i' & -L_i' \end{pmatrix}<0。\tag{9}$$

设计如下形式的状态反馈控制器：

$$u(t)=K(r_t)x(t)\ ,\tag{10}$$

将上式代入式(1)，得到如下形式的闭环系统：

$$F(r_t)\dot{x}(t)=(A(r_t)+B(r_t)K(r_t))x(t)\ 。\tag{11}$$

定理 2 带有广义转移速率矩阵(3)的系统(11)是随机容许的，且存在矩阵 H_i，使得反馈增益矩阵 $K_i=H_iG_i$，则有如下条件成立。

1）当 $U_{uk}^i\neq\phi, i\in U_k^i, U_k^i=\{k_1^i,k_2^i,\cdots,k_m^i\}$ 时，存在两矩阵组 $M_i,\bar{M}_i\in\mathbf{R}^{n\times n}>0, i\in S$，$H_i\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 和列满秩矩阵 $F_L(i)$，$F_R(i)$ 满足 $F(i)=F_L(i)F_R'(i)$，$F_L'(i)M_iF_L(i)=(F_R'(i)\bar{M}_iF_R(i))^{-1}$，满足如下线性矩阵不等式：

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\Psi}_i-\sum_{j\in U_k^i}(\hat{p}_{ij}+\delta_{ij})F'(i)M_lF(i) & \tilde{\varepsilon}(F(i)) & 0 \\ \tilde{\varepsilon}(F(i)) & -\chi_i(\bar{M}_j) & L_iA_i'+H_i'B_i'-L_i \\ 0 & A_iL_i'+B_iH_i-L_i' & -L_i' \end{pmatrix}<0\ ,\tag{12}$$

其中 $\tilde{\varepsilon}_i(F(i))=(\sqrt{\hat{p}_{ik_1^i}+\delta_{ik_1^i}}L_iF_R(i),\sqrt{\hat{p}_{ik_2^i}+\delta_{ik_2^i}}L_iF_R(i),\cdots,\sqrt{\hat{p}_{ik_m^i}+\delta_{ik_m^i}}L_iF_R(i))$，

$$\begin{aligned}\widetilde{\Psi}_i=&A_iL_i+B_iK_iL_i+L_iA_iG_i'L_i+L_iB_iH_iG_iG_i'L_i-L_iA_i'G_iA_iL_i-L_iA_i'G_iB_iH_i-H_i'B_i'G_iA_iL_i-\\&H_i'B_i'G_iB_iH_i+L_iA_i'(M_iF(i)+R_i'\Phi_iS_i')L_i+H_i'B_i'(M_iF(i)+R_i'\Phi_iS_i')L_i+\\&L_i(M_iF(i)+R_i'\Phi_iS_i')'A_iL_i+L_i(M_iF(i)+R_i'\Phi_iS_i')'B_iH_i,\end{aligned}$$

$$\chi_i(\bar{M}_j)=diag\{F_R'(i)\bar{M}_{k_1^i}F_R(i),\cdots,F_R'(i)\bar{M}_{k_m^i}F_R(i)\}。$$

2）若 $U_{uk}^i\neq\phi, i\notin U_k^i, U_k^i=\{k_1^i,k_2^i,\cdots,k_m^i\}$，存在一组矩阵 $\widetilde{M}_i\in\mathbf{R}^{n\times n}>0, i\in S$，及矩阵 $\widetilde{T}_{ij}>0$，$j\in U_k^i$，使得下列对称矩阵不等式成立：

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\Lambda}_i & L_iF'(i)(\widetilde{M}_{k_1^i}-\widetilde{M}_i)F(i)L_i & \cdots & L_iF'(i)(\widetilde{M}_{k_m^i}-\widetilde{M}_i)F(i)L_i & 0 \\ * & -\widetilde{T}_{ik_1^i} & \cdots & 0 & 0 \\ * & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ * & * & * & -\widetilde{T}_{ik_m^i} & L_iA_i'+H_i'B_i'-L_i \\ 0 & 0 & 0 & A_iL_i'+B_iH_i-L_i' & -L_i' \end{pmatrix}<0\ ,\tag{13}$$

$$L_iF'(i)(M_j-M_i)F(i)L_i\leqslant 0\ ,\tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_i=&A_iL_i+B_iK_iL_i+L_iA_iG_i'L_i+L_iB_iH_iG_iG_i'L_i-L_iA_i'G_iA_iL_i-L_iA_i'G_iB_iH_i-H_i'B_i'G_iA_iL_i-\\&H_i'B_i'G_iB_iH_i+L_iA_i'(\widetilde{M}_iF(i)+R_i'\Phi_iS_i')L_i+H_i'B_i'(\widetilde{M}_iF(i)+R_i'\Phi_iS_i')L_i+\\&L_i(\widetilde{M}_iF(i)+R_i'\Phi_iS_i')'A_iL_i+L_i(\widetilde{M}_iF(i)+R_i'\Phi_iS_i')'B_iH_i,\end{aligned}$$

$$\widetilde{\Lambda}_i=\hat{\Psi}_i+\sum_{j\in U_k^i}\hat{p}_{ij}L_iF'(i)(\widetilde{M}_j-\widetilde{M}_i)F(i)L_i+\sum_{j\in U_k^i}\frac{1}{4}\delta_{ij}^2\widetilde{T}_{ij}\ 。$$

3）当 $U_{uk}^i=\phi$ 时，存在矩阵组 $N_i,\bar{N}_i\in\mathbf{R}^{n\times n}>0, i\in S$ 和列满秩矩阵 $\hat{F}_L(i)$，$\hat{F}_R(i)$ 满足 $F(i)=$

$\hat{\boldsymbol{F}}_L(i)\hat{\boldsymbol{F}}'_R(i)$，$\hat{\boldsymbol{F}}'_L(i)\boldsymbol{N}_i\hat{\boldsymbol{F}}_L(i)=(\hat{\boldsymbol{F}}'_R(i)\overline{\boldsymbol{N}}_i\hat{\boldsymbol{F}}_R(i))^{-1}$，对 $\forall i\in S$ 使得如下线性矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\Psi}}_i & \sqrt{\hat{p}_{i1}+\delta_{i1}}\boldsymbol{L}_i\hat{\boldsymbol{F}}_R(1) & \cdots & \sqrt{\hat{p}_{iv}+\delta_{iv}}\boldsymbol{L}_i\hat{\boldsymbol{F}}_R(v) & 0 \\ * & -\hat{\boldsymbol{F}}'_R(1)\overline{\boldsymbol{N}}_1\hat{\boldsymbol{F}}_R(1) & \cdots & 0 & 0 \\ * & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ * & * & * & -\hat{\boldsymbol{F}}'_R(v)\overline{\boldsymbol{N}}_v\hat{\boldsymbol{F}}_R(v) & \boldsymbol{L}_i\boldsymbol{A}'_i+\boldsymbol{H}'_i\boldsymbol{B}'_i-\boldsymbol{L}_i \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{L}'_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{H}_i-\boldsymbol{L}'_i & -\boldsymbol{L}'_i \end{bmatrix}<0, \tag{15}$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\Psi}}_i=&\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{L}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{L}_i+\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{G}'_i\boldsymbol{L}_i+\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{H}_i\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{G}'_i\boldsymbol{L}_i-\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{A}'_i\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{L}_i-\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{A}'_i\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{H}_i-\boldsymbol{H}'_i\boldsymbol{B}'_i\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{L}_i-\\ &\boldsymbol{H}'_i\boldsymbol{B}'_i\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{H}_i+\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{A}'_i(\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{F}(i)+\boldsymbol{R}'_i\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}'_i)\boldsymbol{L}_i+\boldsymbol{H}'_i\boldsymbol{B}'_i(\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{F}(i)+\boldsymbol{R}'_i\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}'_i)\boldsymbol{L}_i+\\ &\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{F}(i)+\boldsymbol{R}'_i\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}'_i)'\boldsymbol{A}_iL_i+\boldsymbol{L}_i(\boldsymbol{N}_i\boldsymbol{F}(i)+\boldsymbol{R}'_i\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{S}'_i)'\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{H}_i。\end{aligned}$$

证明 设 $\hat{\boldsymbol{A}}_i=\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i$，将矩阵(9)中的 $\boldsymbol{A}_i$ 用 $\hat{\boldsymbol{A}}_i$ 来代替，依照定理1的证明方式对(9)式中的元素 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{L}_i+\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{G}'_i\boldsymbol{L}_i-\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{A}'_i\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{L}_i+\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{\Psi}_i\boldsymbol{L}_i+\sum_{j=1}^{v}p_{ij}\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{F}'(i)\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{F}(i)\boldsymbol{L}_i$ 进行矩阵变换，同样对转移速率进行分类处理，变换相应的选定矩阵即得定理2。证毕。

4 结论

本文研究了一类连续时间 Markov 跳变系统具有广义转移速率矩阵的随机容许性问题。同研究部分已知转移速率以及转移速率有界的文献所得结论相比，本文所得结论具有更好的广泛性。并且，运用线性矩阵不等式得出不同转移速率分类下系统的随机容许性的充分性条件更容易进行验证。

参考文献：

[1]DAI L. Singular Control Systems[M]. Berlin: Spring-Verlag, 1989: 1-22.

[2]MA S P, CHENG Z L. Indefinite LQ problem for singular systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2006, 32(2): 271-279.

[3]ZHANG W H, ZHAO Y, SHENG L. Some remarks on stability of stochastic singular systems with state-dependent noise [J]. Automatica, 2015, 51: 273-277.

[4]XU S Y, LAM J. Robust stability and stabilization of discrete singular systems: An equivalent characterization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(4): 568-574.

[5]XU S Y, YANG C W. Stabilization of discrete-time singular systems: A Matrix inequalities approach[J]. Automatic, 1999, 35 (9): 1613-1617.

[6]张维海，刘鹤鸣. 随机马尔科夫跳跃系统有限时间控制[J]. 控制理论与应用，2015，32(3)：334-340.
ZHANG Weihai, LIU Heming. Finite-time control of stochastic Markovian jump systems[J]. Control Theory & Applications, 2015, 32(3): 334-340.

[7]KAO Y G, XIE J, WANG C H. Stabilization of singular Markovian jump systems with generally uncertain transition rates [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(9): 2604-2610.

[8]XIONG J L, LAM J. Robust H_2 control of Markovian jump systems with uncertain switching probabilities[J]. International Journal of Systems Science, 2009, 40(3): 255-265.

[9]KARAN M, SHI P, KAYA C. Transition probability bounds for the stochastic stability robustness of continuous-time and discrete-time Markovian jump linear systems[J]. Automatica, 2006, 42(12): 2159-2168.

[10]DU B, LAM J, ZOU Y, et al. Stability and stabilization for Markovian jump time-delay systems with partially unknown transition rates[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 2013, 60(2): 341-351.

[11]XIA X Q, BOUKAS E K, SHI P, et al. Stability and stabilization of continuous-time singular hybrid systems[J]. Automatica, 2009, 45(6): 2635-2641.

[12]UEZATO E, IKEDA M. Strict LMI conditions for stability, robust stabilization, and H_∞ control of descriptor systems[C] //Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control. Phoenix, AZ, Dec. 7-10, 1999, 4092-4097.

（责任编辑：傅　游）