第 35 卷 第 6 期
2016 年 12 月

Vol. 35 No. 6
Dec. 2016

Journal of Shandong University of Science and Technology
Natural Science

非线性四阶两点边值问题的单调迭代方法

赵　聪，崔玉军

（山东科技大学 数学与系统科学学院，山东 青岛 266590）

摘　要：本文通过单调迭代方法和上下解方法研究了非线性四阶两点边值问题

$$\begin{cases} x^{(4)}(t)=f(t,x(t)),0<t<1 \\ x(0)=x(1)=x''(0)=x''(1)=0 \end{cases}$$

解的存在性，其中 $f:[0,1]\times R\to R$ 为连续函数。

关键词：单调迭代方法；上下解方法；极值解

中图分类号：O175.08　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1672-3767(2016)06-0108-06

Monotone Iterative Technique for Nonlinear Four-order Two Point Boundary Value Problem

ZHAO Cong, CUI Yujun

(College of Mathematics and System Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

Abstract: In this paper the existence of solution for fourth-order two point boundary value problem

$$\begin{cases} x^{(4)}(t)=f(t,x(t)),\ 0<t<1 \\ x(0)=x(1)=x''(0)=x''(1)=0 \end{cases}$$

was obtained by using the monotone iterative technique and the method of Lower and upper solutions, where $f:[0,1]\times R\to R$ is continuous function.

Key words: monotone iterative technique; lower and upper solutions; extremal solutions

两端简单支撑的变形弹性梁的平衡态可用四阶两点常微分边值问题

$$\begin{cases} x^{(4)}(t)-f(t,x(t),x''(t))=0,0<t<1 \\ x(0)=x(1)=x''(0)=x''(1)=0 \end{cases}$$

来描述，此微分方程边值问题解的存在性已经被许多作者研究，文献[1]中证明了 f 为有界函数的严格条件下上述边值问题解的存在性。文献[2]中证明了当 f 满足某种增长性条件时上述边值问题解的存在性。其他关于对上述四阶边值问题解的研究还可参阅文献[3-9]，这些结果大部分通过 Leray-Schauder 不动点定理以及拓扑度理论获得。

上下解的方法作为一个重要工具也被应用到四阶边值问题解的研究当中[10-16]。其中文献[10]中运用上下解方法对上述形式的四阶边值问题进行了研究。文献[11]中利用最大值原理以及上下解方法继续对上述问题进行研究，文献[12]利用同样的方法求解上述四阶边值问题，并找到非线性四阶边值问题的解与其方程的第一特征值之间的关系。

收稿日期：2016-05-14

基金项目：国家自然科学基金项目(11371221,11571207)；高等学校博士学科点专项科研基金项目(20123705110001)

作者简介：赵　聪(1990—)，男，山东潍坊人，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析方面的研究.

崔玉军(1972—)，男，山东潍坊人，教授，硕士生导师，主要从事非线性泛函分析方面的研究，本文通信作者.

E-mail：sdustcyj@163.com

但以上所有结果的研究过程中均未涉及到线性算子的性质，受到以上文献的启发，本文将应用单调迭代法以及上下解方法研究四阶两点边值问题

$$\begin{cases} x^{(4)}(t) = f(t, x(t)), 0 < t < 1, \\ x(0) = x(1) = x''(0) = x''(1) = 0。\end{cases} \tag{1}$$

解的存在性，其中 $f:[0,1]\times R \to R$ 为连续函数。文章的新颖之处在于，对边值问题(1) 利用线性算子的性质建立一个比较结果，从而研究其极值解的存在性。

1　预备工作

本文的基本空间为 Banach 空间 $E = C[0,1]$，其中范数为 $\| x \| = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} | x(t) |$。令 $G(t,s)$ 为线性问题 $-x''(t) = 0$ 在边值条件 $x(0) = x(1) = 0$ 下的格林函数，其可表示为

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1, \\ s(1-t), & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1。\end{cases} \tag{2}$$

为了得到本文的主要结果，给出以下相关定义和引理。

引理 1[17]　上述定义的函数 $G(t,s)$ 具有以下性质：

1) $G(t,s) \geqslant 0$，$\forall t, s \in [0,1]$。

2) $G(t,s) \leqslant G(t,t)$ 且 $G(t,s) \leqslant G(s,s)$，$\forall t, s \in [0,1]$。

3) $G(t,s) \geqslant G(t,t)G(s,s)$，$\forall t, s \in [0,1]$。

令 $K(t,s) = \int_0^1 G(t,\tau)G(\tau,s)\mathrm{d}\tau$，$\forall t, s \in [0,1]$。不难推出 $K(t,s)$ 具有以下性质：

4) $K(t,s) \geqslant 0$，$\forall t, s \in [0,1]$。

5) $K(t,s) \leqslant G(t,t)G(s,s)$ 且 $K(t,s) \leqslant \frac{1}{6}G(t,t)$，$\forall t, s \in [0,1]$。

6) $K(t,s) \geqslant \frac{1}{30}G(t,t)G(s,s)$，$\forall t, s \in [0,1]$。

注 1　容易验证齐次四阶边值问题

$$\begin{cases} x^{(4)}(t) = 0, 0 < t < 1, \\ x(0) = a, x(1) = b, x''(0) = c, x''(1) = d, \end{cases}$$

有唯一解

$$\psi(t) = aI_0(t) + bI_1(t) - cJ_0(t) - dJ_1(t),$$

其中

$$I_0(t) = 1 - t, I_1(t) = t, J_0(t) = \frac{t(1-t)(2-t)}{6}, J_1(t) = \frac{t(1-t)(1+t)}{6}。$$

容易验证当 $a \geqslant 0, b \geqslant 0, c \leqslant 0, d \leqslant 0$ 时，$\psi(t)$ 非负。

定义 1[11]　$u \in C^{(4)}[0,1]$ 是问题(1) 的一个上解是指 u 满足

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) \geqslant f(t, u(t)), 0 < t < 1, \\ u(0) \geqslant 0, u(1) \geqslant 0, \\ u''(0) \leqslant 0, u''(1) \leqslant 0。\end{cases}$$

类似地，称 u 是问题(1) 的一个下解是指上式中的不等号反向。

现在考虑线性问题

$$\begin{cases} x^{(4)}(t) = -Mx(t) + \sigma(t), 0 < t < 1, \\ x(0) = a, x(1) = b, x''(0) = c, x''(1) = d, \end{cases} \tag{3}$$

其中 M 是非负常数，$\sigma \in C[0,1]$。

引理 2　若 M 满足

$$\frac{1}{36}M<1,\tag{4}$$

那么线性边值问题(3)有唯一解 x,可表示为

$$x(t)=\psi(t)+\int_0^1 Q(t,s)\psi(s)\mathrm{d}s+\int_0^1 H(t,s)\sigma(s)\mathrm{d}s,\tag{5}$$

其中 $\psi(t)$ 由注 1.2 给出,

$$K_1(t,s)=-MK(t,s),\ Q(t,s)=\sum_{m=1}^{+\infty}K_m(t,s),\tag{6}$$

$$K_m(t,s)=(-M)^m\int_0^1\cdots\int_0^1 K(t,r_1)K(r_1,r_2)\cdots K(r_{m-1},s)\mathrm{d}r_1\cdots\mathrm{d}r_{m-1},$$

$$H(t,s)=K(t,s)+\int_0^1 Q(t,\tau)K(\tau,s)\mathrm{d}\tau。$$

其中 $K_m(t,s)$,$Q(t,s)$,$H(t,s)$ 在$[0,1]\times[0,1]$上为连续函数,(6)中右端序列在$[0,1]\times[0,1]$上一致收敛。

证明:容易验证若 $x\in C^{(4)}[0,1]$ 为式(3)的解,当且仅当 $x\in C[0,1]$ 为算子方程

$$x+Tx=\varphi\tag{7}$$

的解,其中算子 $T:C[0,1]\to C[0,1]$ 为

$$(Tx)(t)=M\int_0^1 K(t,s)x(s)\mathrm{d}s,$$

以及

$$\varphi(t)=\psi(t)+\int_0^1 K(t,s)\sigma(s)\mathrm{d}s。\tag{8}$$

下面需证明 $\|T\|<1$。

对 $x\in C[0,1]$,由引理 1.1,有

$$\begin{aligned}|Tx(t)|\leqslant M\int_0^1 K(t,s)|x(s)|\mathrm{d}s\leqslant\\ M\int_0^1\int_0^1 G(\tau,\tau)G(s,s)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\|x\|=\\ M\int_0^1\int_0^1\tau(1-\tau)s(1-s)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\|x\|=\\ \frac{1}{36}M\|x\|,\end{aligned}$$

从而

$$\|T\|\leqslant\frac{1}{36}M<1。$$

由此可得算子方程(7)的唯一解由

$$x=(I+T)^{-1}\varphi=(I-T+T^2+\cdots+(-1)^mT^m+\cdots)\varphi$$

给出,将式(8)代入上式得到式(5)。

引理 3 假设 $x\in C^{(4)}[0,1]$ 满足

$$\begin{cases}x^{(4)}(t)\geqslant -Mx(t),0<t<1,\\ x(0)\geqslant 0,x(1)\geqslant 0,\\ x''(0)\leqslant 0,x''(1)\leqslant 0。\end{cases}$$

其中非负常数 M 满足引理 1.4 中的(4),

$$\frac{1}{30}-\frac{1}{30}M-\frac{(\frac{M}{36})^3}{1-(\frac{M}{36})^2}-\frac{(\frac{M}{900})^2}{30[1-(\frac{M}{900})^2]}>0,\tag{9}$$

$$\frac{1}{6}-NM-\frac{M(\frac{M}{36})^2}{1-(\frac{M}{36})^2}N-\frac{30(\frac{M}{900})^2}{1-(\frac{M}{900})^2}L>0, \tag{10}$$

其中

$$N=\max\left\{\int_0^1 G(s,s)y(s)ds : y(t)\in\{I_0(t),I_1(t),J_0(t),J_1(t)\}\right\}=\frac{1}{12},$$
$$L=\min\left\{\int_0^1 G(s,s)y(s)ds : y(t)\in\{I_0(t),I_1(t),J_0(t),J_1(t)\}\right\}=\frac{1}{120},$$

那么 $x(t)\geqslant 0,\forall t\in[0,1]$。

证明：令

$$\sigma(t)=x^{(4)}(t)+Mx(t),$$
$$a=x(0),b=x(1),c=x''(0),d=x''(1)。$$

那么 $\sigma(t)\geqslant 0,a\geqslant 0,b\geqslant 0,c\leqslant 0,d\leqslant 0$。根据 $G_m(t,s)$ 的表达式可知，当 m 为奇数时，$G_m(t,s)\leqslant 0$；当 m 为偶数时，$G_m(t,s)\geqslant 0$。另外根据引理1.4中的(5)式成立，其中对 $\forall t\in[0,1]$，$\psi(t)\geqslant 0$ 以及引理1.1可以得到：

① 对于 $m=3,5,\cdots$

$$K_m(t,s)=-M^m\int_0^1\cdots\int_0^1 K(t,r_1)K(r_1,r_2)\cdots K(r_{m-1},s)\mathrm{d}r_1\cdots\mathrm{d}r_{m-1}\geqslant$$
$$-(\frac{1}{6})^m M^m\int_0^1\cdots\int_0^1 G(t,t)G(r_1,r_1)\cdots G(r_{m-1},r_{m-1})\mathrm{d}r_1\cdots\mathrm{d}r_{m-1}=$$
$$-M^m G(t,t)(\frac{1}{6})^{2m-1},\quad t\in[0,1]。$$

② 对于 $m=2,4,\cdots$

$$K_m(t,s)=M^m\int_0^1\cdots\int_0^1 K(t,r_1)K(r_1,r_2)\cdots K(r_{m-1},s)\mathrm{d}r_1\cdots\mathrm{d}r_{m-1}\geqslant$$
$$(\frac{1}{30})^m M^m\int_0^1\cdots\int_0^1 G(t,t)G(r_1,r_1)G(r_1,r_1)G(r_2,r_2)\cdots G(r_{m-1},r_{m-1})G(s,s)\mathrm{d}r_1\cdots\mathrm{d}r_{m-1}=$$
$$M^m G(t,t)G(s,s)(\frac{1}{30})^{2m-1},\quad t,s\in[0,1]。$$

因此，有

$$H(t,s)=K(t,s)+\int_0^1 Q(t,\tau)K(\tau,s)\mathrm{d}\tau=K(t,s)+\sum_{m=1}^{+\infty}\int_0^1 K_m(t,\tau)K(\tau,s)\mathrm{d}\tau\geqslant$$
$$K(t,s)-M\int_0^1 K(t,\tau)K(\tau,s)\mathrm{d}\tau+\sum_{m=1}^{+\infty}\int_0^1 K_{2m+1}(t,\tau)K(\tau,s)\mathrm{d}\tau+$$
$$\sum_{m=1}^{+\infty}\int_0^1 K_{2m}(t,\tau)K(\tau,s)\mathrm{d}\tau\geqslant$$
$$\frac{1}{30}G(t,t)G(s,s)-\frac{1}{30}M\int_0^1 G(t,t)G(s,s)\mathrm{d}\tau-$$
$$\sum_{m=1}^{+\infty}M^{2m+1}G(t,t)G(s,s)(\frac{1}{6})^{4m+2}+\sum_{m=1}^{+\infty}M^{2m}G(t,t)G(s,s)(\frac{1}{30})^{4m+1}=$$
$$G(t,t)G(s,s)\left\{\frac{1}{30}-\frac{1}{30}M-\frac{(\frac{M}{36})^3}{1-(\frac{M}{36})^2}-\frac{(\frac{M}{900})^2}{30[1-(\frac{M}{900})^2]}\right\},\ t,s\in[0,1]。$$

对于 $y(t)\in\{I_0(t),I_1(t),J_0(t),J_1(t)\}$，

$$y(t)+\int_0^1 Q(t,s)y(s)\mathrm{d}s\geqslant$$

$$y(t)-M\int_0^1 K(t,s)y(s)\mathrm{d}s+\sum_{m=1}^{+\infty}\int_0^1 K_{2m+1}(t,s)y(s)\mathrm{d}s+\sum_{m=1}^{+\infty}\int_0^1 K_{2m}(t,s)y(s)\mathrm{d}s \geqslant$$

$$\frac{G(t,t)}{6}-MG(t,t)\int_0^1 G(s,s)y(s)\mathrm{d}s-\sum_{m=1}^{+\infty}M^{2m+1}G(t,t)\int_0^1 G(s,s)y(s)\mathrm{d}s(\frac{1}{6})^{4m}+$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty}M^{2m}G(t,t)\int_0^1 G(s,s)y(s)\mathrm{d}s(\frac{1}{30})^{4m-1}\geqslant$$

$$\frac{G(t,t)}{6}-MG(t,t)N-\sum_{m=1}^{+\infty}M^{2m+1}G(t,t)N(\frac{1}{6})^{4m}+\sum_{m=1}^{+\infty}M^{2m}G(t,t)L(\frac{1}{30})^{4m-1}=$$

$$G(t,t)\left\{\frac{1}{6}-\frac{1}{12}M-\frac{M(\frac{M}{36})^2}{12-12(\frac{M}{36})^2}-\frac{(\frac{M}{900})^2}{4-4(\frac{M}{900})^2}\right\},\quad t,s\in[0,1]。$$

由式(9)～(10)可得 $x(t)\geqslant 0,\forall t\in[0,1]$。证毕。

2 主要结果

定理 令 $f\in C([0,1]\times R,R)$，v_0,w_0 分别为式(1)的下解和上解，且在$[0,1]$上 $v_0(t)\leqslant w_0(t)$。假设存在 $M>0$ 使得

$$f(t,x)-f(t,y)\geqslant -M(x-y),\tag{11}$$

其中 $v_0(t)\leqslant y<x\leqslant w_0(t)$，$M$ 满足式(4)、(9)和(10)。那么存在单调序列$\{v_m(t)\}$，$\{w_m(t)\}$在$[0,1]$上一致收敛于问题(1)在序区间$[v_0,w_0]=\{u\in C[0,1]:v_0(t)\leqslant u(t)\leqslant w_0(t),t\in[0,1]\}$上的极值解。

证明 对 $\alpha\in[v_0,w_0]$，考虑线性问题

$$\begin{cases}x^{(4)}(t)=-Mx(t)+f(t,\alpha(t))+M\sigma(t),0<t<1,\\ x(0)=x(1)=x''(0)=x''(1)=0。\end{cases}\tag{12}$$

根据引理1.4可推得式(12)在 $C[0,1]$ 有唯一解

$$x(t)=\int_0^1 H(t,s)[f(s,\alpha(s))+M\alpha(s)]\mathrm{d}s。$$

定义算子 $A:[v_0,w_0]\to C[0,1]$ 如下：

$$(A\alpha)(t)=\int_0^1 H(t,s)[f(s,\alpha(s))+M\alpha(s)]\mathrm{d}s。$$

下证：

(i) $v_0\leqslant Av_0,Aw_0\leqslant w_0$；

(ii) A 为$[v_o,w_o]$上的单调算子。

证(i)：设 $Av_0=v_1$，其中 v_1 是式(12)的唯一解，且 $\alpha=v_0$。设 $p=v_1-v_0$，则有

$$\begin{cases}p^{(4)}(t)\geqslant -Mp(t),0<t<1,\\ p(0)\geqslant 0,p(1)\geqslant 0,\\ p''(0)\leqslant 0,p''(1)\leqslant 0。\end{cases}$$

由引理1.5可得在$[0,1]$上 $p(t)\geqslant 0$，即 $v_0\leqslant Av_0$。同理可证 $Aw_0\leqslant w_0$。

证(ii)：令 $\alpha_1,\alpha_2\in[v_o,w_o]$且 $\alpha_1\leqslant\alpha_2$。假设 $x_1=A\alpha_1,x_2=A\alpha_2$ 令 $p=x_2-x_1$。应用定理1.1的条件2)，有

$$\begin{cases}p^{(4)}(t)\geqslant -Mp(t),0<t<1,\\ p(0)=p(1)=p''(0)=p''(1)=0。\end{cases}$$

根据引理1.5上式可推得 $A\alpha_1\leqslant A\alpha_2$，故(ii)得证。

现令

$$v_m=Av_{m-1},w_m=Aw_{m-1},\quad m=1,2,\cdots。$$

由(i)(ii)可得

$$v_0 \leqslant v_1 \leqslant \cdots \leqslant v_m \leqslant \cdots \leqslant w_m \leqslant \cdots \leqslant w_1 \leqslant w_0。 \tag{13}$$

容易看出序列$\{v_m(t)\}$、$\{w_m(t)\}$在$[0,1]$上一致有界，根据(11)式，有

$$\begin{aligned} f(t,v_0(t))+Mv_0(t) \leqslant f(t,v_m(t))+Mv_m(t) &\leqslant \\ f(t,w_m(t))+Mw_m(t) &\leqslant \\ f(t,w_0(t))+Mw_0(t),\ m\in \mathbf{N},t\in[0,1]。 \end{aligned}$$

结合$H(t,s)$在$[0,1]\times[0,1]$上的连续性可得$\{v_m\}_{m=2}^{\infty}=\{Av_m\}_{m=1}^{\infty}$和$\{w_m\}_{m=2}^{\infty}=\{Aw_m\}_{m=1}^{\infty}$为两个列紧集。由Ascoli-Arzela定理知存在子列$\{v_{m_j}(t)\}$、$\{w_{m_j}(t)\}$在$[0,1]$上一致收敛。另外由(13)可知，序列$\{v_m(t)\}$、$\{w_m(t)\}$在$[0,1]$上分别单调一致收敛于各自的极限函数$v^*(t)$、$w^*(t)$，即

$$\lim_{m\to\infty} v_m(t)=v^*(t),\lim_{m\to\infty} w_m(t)=w^*(t)。$$

由对应于式(12)的积分方程

$$x(t)=(A\alpha)(t)=\int_0^1 H(t,s)[f(s,\alpha(s))+M\alpha(s)]\mathrm{d}s,$$

可推得v^*，w^*为边值问题(1)的解。

下证v^*，w^*为边值问题(1)在$[v_o,w_o]$上的极值解。

假设x为问题(1)的任一解，即

$$\begin{cases} x^{(4)}(t)=f(t,x(t)), & 0<t<1, \\ x(0)=x(1)=x''(0)=x''(1)=0。 \end{cases}$$

根据式(11)及引理1.5，应用归纳法易证

$$v_m \leqslant x \leqslant w_m,\quad m=1,2,\cdots。 \tag{14}$$

现令式(14)中的$m\to\infty$，那么有$v^*\leqslant x\leqslant w^*$，即$v^*$和$w^*$为边值问题(1)在$[v_o,w_o]$上的极值解。

参考文献：

[1]AFTABIZADEH A. Existence and uniqueness theorems for fourth-order boundary value problems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1986, 116:415-426.

[2]YANG Y. Fourth-order two-point boundary value problem[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1988, 104:175-180.

[3]ALBERTO C, STEPAN T. Multiplicity of solutions of a two point boundary value problem for a fourth-order equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 219(10):5261-5267.

[4]CETIN E, AGARWAL R. Existence of solutions for fourth order three-point boundary value problems on a half-line[J/OL]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2015:62 [2016-05-12]. http://ftp. fi. muni. cz/pub/muni. cz/EMIS/journals/EJQTDE/p4169. pdf.

[5]YAO Q. Positive solutions for eigenvalue problems of fourth-order elastic beam equations[J]. Applied Mathematical Letters, 2004, 17(2):237-243.

[6] XIE J, LUO Z. Solutions to a boundary value problem of a fourth-order impulsive differential equation[J/OL]. Boundary Value Problems, 2013:154 [2016-05-12]. http://boundaryvalueproblems. springeropen. com/ articles/10. 1186/1687-2770-2013-154.

[7] ZHANG K, XU J, DONG W. Positive solutions for a fourth-order p-Laplacian boundary value problem with impulsive effects[J/OL]. Boundary Value Problems, 2013:120 [2016-05-13]. http://link. springer. com/ article/10. 1186%2F1687-2770-2013-120.

[8] SHEN W. Existence of nodal solutions of a nonlinear fourth-order two-point boundary value problem[J/OL]. Boundary Value Problems, 2012:31 [2016-05-20]. http://link. springer. com/article/10. 1186%2F1687- 2770 -2012-31.

[9] CUI Y, SUN J. Existence of multiple positive solutions for fourth-order boundary value problems in Banach spaces[J/OL]. Boundary Value Problems, 2012:107[2016-05-09]. http://link. springer. com/article/10. 118 6%2F1687-2770-2012-107.

[10] MA R, ZHANG J, FU S. The method of lower and upper solutions for fourth-order two-point boundary value problems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1997, 215:415-422.

（下转第122页）