

# 一类捕食者染病的捕食者-食饵系统的 随机动力学行为

冯 涛,孟新柱

(山东科技大学 数学与系统科学学院,山东 青岛 266590)

**摘 要:**考虑了一类具有 Beddington-DeAngelis 功能性反应和 Lévy 跳的捕食者染病的捕食者-食饵系统的动力学行为。利用 Lyapunov 方法和伊藤公式,本文讨论了系统全局正解的存在唯一性;研究了随机系统在其确定性模型的平衡点周围的长时间行为。研究表明,在一定条件下,随机系统的解会在其确定性系统的平衡点周围波动,且波动的幅度与随机系统所受干扰的强度呈正相关。最后,本文运用 Matlab 数值模拟对前述理论进行了验证。

**关键词:**捕食者-食饵系统;Beddington-DeAngelis 功能性反应;渐近行为;随机扰动;Lévy 跳

中图分类号:O175

文献标志码:A

文章编号:1672-3767(2017)01-0099-12

## Stochastic Dynamics of a Predator-prey System with Disease in Predator

FENG Tao, MENG Xinzhu

(College of Mathematics and Systems Science, Shandong University of Science and Technology,  
Qingdao, Shandong 266590, China)

**Abstract:** This paper investigated the stochastic dynamics of an infected predator-prey model with Beddington-DeAngelis functional response and Lévy jump. By using Lyapunov methods and It's formula, this paper first discussed the existence and uniqueness of the global positive solution of the stochastic system, and then studied the asymptotic behaviors around the equilibrium points of its deterministic model. Results show that the solutions of the stochastic system fluctuate around the equilibrium points of its deterministic model under certain conditions, and the fluctuation intensity is positively correlated with the intensity of interference. Finally, numerical simulations were carried out to verify the theoretical findings.

**Key words:** predator-prey system; Beddington-DeAngelis functional response; asymptotic behaviors; random disturbance; Lévy jump

近年来,随机干扰对生态系统的影响逐渐成为生物数学领域的研究热点<sup>[1-6]</sup>。在生态系统中,捕食者和食饵之间的相互作用经常受到一些环境因素的影响,例如海啸、水源、地震、火山、疾病等。许多学者研究了传染病对捕食者-食饵种群的影响<sup>[7-13]</sup>和环境干扰对捕食者-食饵种群的影响<sup>[14-17]</sup>。研究传染病和环境噪声对捕食者-食饵种群的影响具有重要的生物学意义。本文结合传染病与环境噪声对生物种群的影响,研究了一类带有 Beddington-DeAngelis 功能性反应和 Lévy 跳的捕食者染病的捕食者-食饵系统的动力学行为。

收稿日期:2016-05-16

基金项目:国家自然科学基金项目(11371230,11501331);山东省自然科学基金项目(ZR2015AQ001,BS2015SF002);山东科技大学科研创新团队项目(2014TDJH102)

作者简介:孟新柱(1972—),男,山东菏泽人,教授,博士生导师,主要从事生物数学方面的研究,本文通信作者。

E-mail:mxz721106@sdust.edu.cn

## 1 数学模型

设  $X(t), S(t), I(t)$  分别为  $t$  时刻食饵、易感染捕食者和染病捕食者的种群密度,  $b_1$  表示  $X(t)$  的内禀增长率,  $b_2$  表示  $S(t)$  的自然死亡率,  $b_3$  是  $I(t)$  的因病死亡率,  $\beta$  是  $S(t)$  的传染率系数,  $\frac{a_{21}}{a_{12}}$  是  $S(t)$  捕食  $X(t)$  的转化率,  $a_{11}, a_{22}$  和  $a_{33}$  分别为  $X(t), S(t)$  和  $I(t)$  的密度制约系数,  $p, q$  是正常数。

文献[13]研究了如下具有 Beddington-DeAngelis 功能性反应和捕食者染病的捕食者-食饵系统:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = X(t) \left[ b_1 - a_{11}X(t) - \frac{a_{12}S(t)}{1 + pX(t) + qS(t)} \right], \\ \frac{dS}{dt} = S(t) \left[ -b_2 - a_{22}S(t) + \frac{a_{21}X(t)}{1 + pX(t) + qS(t)} - \beta I(t) \right], \\ \frac{dI}{dt} = I(t) [-b_3 - a_{33}I(t) + \beta S(t)]. \end{cases} \quad (1)$$

令

$$R_0 = \frac{a_{21}b_1}{b_2(a_{11} + pb_1)}, R_1 = \frac{a_{21}b_1}{\left(b_2 + \frac{b_3a_{22}}{\beta}\right)(a_{11} + pb_1 + \frac{qb_3a_{11}}{\beta})},$$

由文献[13]易得, 当  $R_0 < 1$  时, 系统(1)存在边界平衡点  $E_1\left(\frac{b_1}{a_{11}}, 0, 0\right)$ , 当  $R_0 > 1, R_1 < 1$  时, 系统(1)存在无病平衡点  $E_2(\bar{X}, \bar{S}, 0)$ , 当  $R_1 > 1$  时, 系统(1)存在正平衡点  $E_3(X^*, S^*, I^*)$ 。

实际上, 生态系统中的物种可能会遭受到一些较大的不确定因素的干扰, 比如火山喷发、地震、海啸和气候骤变等, 一般把这类较大的干扰因素称为有色噪声干扰, 数学上使用 Lévy 跳表示。考虑这类有色噪声干扰后, 模型(1)变为:

$$\begin{cases} dX(t) = X(t) \left[ b_1 - a_{11}X(t) - \frac{a_{12}S(t)}{1 + pX(t) + qS(t)} \right] dt + \sigma_1 X(t) dB_1(t) \\ \quad + \int_Z X(t^-) \gamma_1(u, t) \tilde{N}(dt, du), \\ dS(t) = S(t) \left[ -b_2 - a_{22}S(t) + \frac{a_{21}X(t)}{1 + pX(t) + qS(t)} - \beta I(t) \right] dt + \sigma_2 S(t) dB_2(t) \\ \quad + \int_Z S(t^-) \gamma_2(u, t) \tilde{N}(dt, du), \\ dI(t) = I(t) [-b_3 - a_{33}I(t) + \beta S(t)] dt + \sigma_3 I(t) dB_3(t) + \int_Z I(t^-) \gamma_3(u, t) \tilde{N}(dt, du), \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $B_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 是定义在完备概率空间  $(\Omega, F, P, \{F_t\}_{t \geq 0})$  上的标准布朗运动;  $\{F_t\}_{t \geq 0}$  是这个概率空间的滤子且满足通常条件 ( $F_t = \bigcap_{s>t} F_s$  ( $t \geq 0$ ) 且  $F_0$  包含所有的  $P$  零集);  $\sigma_i^2$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 为布朗运动的强度;  $\tilde{N}(dt, du) = N(dt, du) - \lambda(du)dt$ , 其中  $N$  是定义在  $(0, +\infty) \times Z$  上的泊松点过程,  $\lambda$  是  $N$  的特征测度,  $\lambda(Z) < \infty$ , 测度集  $Z \in (0, +\infty)$ 。

## 2 全局正解的存在唯一性

本文的研究对象为生物种群, 由于负数解不存在生物学意义, 因此本节首先证明模型(2)存在全局唯一正解。

假设 2.1 假定以下条件成立<sup>[15]</sup>:

(i)  $1 + \gamma_i(u) > 0$ ,

(ii)  $\int_Z [\gamma_i(u) - \ln(1 + \gamma_i(u))] \lambda(du) < \infty$ ,

其中,  $i = 1, 2, 3$ , 这两个假设意味着 Lévy 噪声的强度不会无限大。

**引理 2.1** 对任意给定的初值  $(X(0), S(0), I(0)) \in \mathbf{R}_+^3$ , 模型(2)在  $t \in [0, \tau_e)$  存在局部唯一正解  $(X(t), S(t), I(t))$ , 其中  $\tau_e$  是爆炸时刻。

**定理 2.1** 对任意给定的初值  $(X(0), S(0), I(0)) \in \mathbf{R}_+^3$ , 模型(2)存在依概率 1 停留在  $R_+^3$  的全局唯一正解  $(X(t), S(t), I(t)) (t \geq 0)$ 。

**证明** 由引理 2.1 可知, 只需要证明  $\tau_e = \infty$ 。定义一个充分大的正常数  $k_0$ , 使得

$$\frac{1}{k_0} \leq X(0), S(0), I(0) \leq k_0。$$

定义停时

$$\tau_k = \inf \left\{ t \in [0, \tau_e] : X(t) \notin \left( \frac{1}{k_0}, k_0 \right) \text{ 或 } S(t) \notin \left( \frac{1}{k_0}, k_0 \right) \text{ 或 } I(t) \notin \left( \frac{1}{k_0}, k_0 \right) \right\}, k > k_0, k \in \mathbf{R}_+。$$

易知, 当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\tau_k$  是增函数。取  $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$ , 则有  $\tau_\infty \leq \tau_e$  a.s.。要证明解是全局的, 只需要证明  $\tau_\infty = \infty$  a.s.。下面采用反证法: 如果  $\tau_\infty \neq \infty$  a.s., 那么一定存在两个常数  $N > 0$  和  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $P\{\tau_\infty \leq N\} > \xi$ 。因此, 存在一个整数  $k_1 > k_0$ , 满足

$$P\{\tau_k \leq N\} > \xi, \quad k \geq k_1。 \quad (3)$$

定义一个函数  $V: \mathbf{R}_+^3 \rightarrow \mathbf{R}_+$  :

$$V(X, S, I) = X - 1 - \ln X + S - 1 - \ln S + I - 1 - \ln I。 \quad (4)$$

由伊藤公式得

$$\begin{aligned} dV = & LVdt + \sigma_1(X-1)dB_1(t) + \int_Z [\gamma_1(u)X - \ln(1+\gamma_1(u))] \tilde{N}(dt, du) \\ & + \sigma_2(S-1)dB_2(t) + \int_Z [\gamma_2(u)S - \ln(1+\gamma_2(u))] \tilde{N}(dt, du) \\ & + \sigma_3(I-1)dB_3(t) + \int_Z [\gamma_3(u)I - \ln(1+\gamma_3(u))] \tilde{N}(dt, du), \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} LV = & (X-1) \left( b_1 - a_{11}X - \frac{a_{12}S}{1+pX+qS} \right) + (S-1) \left( -b_2 - a_{22}S - \beta I + \frac{a_{21}X}{1+pX+qS} \right) \\ & + (I-1) (-b_3 - a_{33}I + \beta S) + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\sigma_i^2}{2} + \int_Z [\gamma_i - \ln(1+\gamma_i)] \lambda(du) \right) \\ = & b_1X - a_{11}X^2 - \frac{a_{12}SX}{1+pX+qS} - b_1 + a_{11}X + \frac{a_{12}S}{1+pX+qS} - b_2S - a_{22}S^2 \\ & + \frac{a_{21}XS}{1+pX+qS} - \beta SI + b_2 + a_{22}S - \frac{a_{21}X}{1+pX+qS} + \beta I - b_3I - a_{33}I^2 \\ & + \beta SI + b_3 + a_{33}I - \beta S + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\sigma_i^2}{2} + \int_Z [\gamma_i - \ln(1+\gamma_i)] \lambda(du) \right) \\ \leq & - \left( a_{11}X^2 - (b_1 + a_{11})X - \frac{a_{12}}{q} \right) - \left( a_{22}S^2 - \left( a_{22} + \frac{a_{21}}{p} \right)S - b_2 \right) \\ & - (a_{33}I^2 - (\beta + a_{33})I - b_3) + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\sigma_i^2}{2} + \int_Z [\gamma_i - \ln(1+\gamma_i)] \lambda(du) \right) \\ \leq & H_0 + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\sigma_i^2}{2} + \int_Z [\gamma_i - \ln(1+\gamma_i)] \lambda(du) \right), \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $H_0 > 0$  是常数。

对方程(5)的两端从 0 到  $\tau_k \wedge N$  积分并取期望, 得

$$EV(X(\tau_k \wedge N), S(\tau_k \wedge N), I(\tau_k \wedge N)) \leq V(X(0), S(0), I(0)) + H_0 N。 \quad (7)$$

取  $\Omega_k = \{\tau_k \leq N\}$ , 由不等式(3)得  $P(\Omega_k) \geq \xi$ 。因此

$$V(X(\tau_k \wedge N), S(\tau_k \wedge N), I(\tau_k \wedge N)) \geq (k-1 - \ln k) \wedge \left( \frac{1}{k} - 1 - \ln \frac{1}{k} \right)。 \quad (8)$$

结合方程(7)和方程(8),得

$$V(X(0), S(0), I(0)) + H_0 N \geq E[1_{\Omega_k}(\varphi)V(X(\tau_k \wedge N), S(\tau_k \wedge N), I(\tau_k \wedge N))] \\ \geq \xi(k-1-\ln k) \wedge \left(\frac{1}{k}-1-\ln \frac{1}{k}\right),$$

其中  $1_{\Omega_k}$  是  $\Omega_k$  的指标函数。令  $k \rightarrow +\infty$ , 得

$$+\infty \geq V(X(0), S(0), I(0)) + H_0 N \geq +\infty.$$

显然与假设矛盾。故  $\tau_\infty = \infty$ 。

### 3 模型(2)解的渐近性质

**定理 3.1** 对任意给定的初值  $(X(0), S(0), I(0)) \in \mathbf{R}_+^3$ , 如果条件  $R_0 < 1$  和  $b_1 a_{21} \leq b_2 a_{11}$  成立, 则模型(2)的解  $(X(t), S(t), I(t))$  满足

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [(X(\theta) - K)^2 + S(\theta)^2 + I(\theta)^2] d\theta \leq \frac{\delta_1}{K_1},$$

其中

$$K_1 = \min \left\{ a_{11}, \frac{a_{12} a_{22}}{a_{21}}, \frac{a_{12} a_{33}}{a_{21}} \right\}, \delta_1 = \frac{\sigma_1^2 K}{2} + K \int_Z [\gamma_1 - \ln(1 + \gamma_1)] \lambda(du).$$

**证明** 定义

$$V(X, S, I) = \left( X - K - K \ln \frac{X}{K} \right) + \frac{a_{12}}{a_{21}} (S + I).$$

由伊藤公式得

$$dV = LV dt + \sigma_1 (X - K) dB_1(t) + \int_Z [\gamma_1(u) X - K \ln(1 + \gamma_1(u))] \tilde{N}(dt, du) \\ + \frac{a_{12}}{a_{21}} \left[ \sigma_2 S dB_2(t) + \int_Z \gamma_2(u) S \tilde{N}(dt, du) + \sigma_3 I dB_3(t) + \int_Z \gamma_3(u) I \tilde{N}(dt, du) \right], \quad (9)$$

其中

$$LV = (X - K) \left[ b_1 - a_{11} X - \frac{a_{12} S}{1 + pX + qS} \right] + \frac{\sigma_1^2 K}{2} + K \int_Z [\gamma_1 - \ln(1 + \gamma_1)] \lambda(du) \\ + \frac{a_{12}}{a_{21}} S \left[ -b_2 - a_{22} S + \frac{a_{21} X}{1 + pX + qS} - \beta I \right] + \frac{a_{12}}{a_{21}} I [-b_3 - a_{33} I + \beta S] \\ = -a_{11} (X - K)^2 + \frac{a_{12} KS}{1 + pX + qS} + \frac{\sigma_1^2 K}{2} + K \int_Z [\gamma_1 - \ln(1 + \gamma_1)] \lambda(du) \\ - \frac{b_2 a_{12}}{a_{21}} S - \frac{a_{12} a_{22}}{a_{21}} S^2 - \frac{b_3 a_{12}}{a_{21}} I - \frac{a_{33} a_{12}}{a_{21}} I^2 \\ \leq -a_{11} (X - K)^2 + a_{12} \left( K - \frac{b_2}{a_{21}} \right) S + \frac{\sigma_1^2 K}{2} + K \int_Z [\gamma_1 - \ln(1 + \gamma_1)] \lambda(du) \\ - \frac{a_{12} a_{22}}{a_{21}} S^2 - \frac{a_{33} a_{12}}{a_{21}} I^2.$$

由  $K \leq \frac{b_2}{a_{21}}$ , 得

$$LV \leq -a_{11} (X - K)^2 - \frac{a_{12} a_{22}}{a_{21}} S^2 - \frac{a_{33} a_{12}}{a_{21}} I^2 + \frac{\sigma_1^2 K}{2} + K \int_Z [\gamma_1 - \ln(1 + \gamma_1)] \lambda(du). \quad (10)$$

对方程(9)两端由 0 到  $t$  积分并取期望, 得

$$E \int_0^t \left\{ a_{11} (X(\theta) - K)^2 + \frac{a_{12} a_{22}}{a_{21}} S(\theta)^2 + \frac{a_{12} a_{33}}{a_{21}} I(\theta)^2 \right\} d\theta \\ \leq EV(0) + \left[ \frac{\sigma_1^2 K}{2} + K \int_Z [\gamma_1 - \ln(1 + \gamma_1)] \lambda(du) \right] t. \quad (11)$$

对方程(11)两端同时除以  $t$ , 令  $t \rightarrow \infty$  并取上界, 得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [(X(\theta) - K)^2 + S(\theta)^2 + I(\theta)^2] d\theta \leq \frac{\delta_1}{K_1}.$$

证毕。

**推论 3.1** 当  $\sigma_1, \gamma_1 = 0$  时, 模型(2)等同于模型(1)。由定理 3.1 中(10)可知, 此时

$$LV \leq -a_{11}(X - K)^2 - \frac{a_{12}a_{22}}{a_{21}}S^2 - \frac{a_{33}a_{12}}{a_{21}}I^2 \leq 0,$$

所以模型(1)的平衡点  $E_1(K, 0, 0)$  是全局渐近稳定的。

**注 3.1** 由定理 3.1 可知, 如果干扰强度  $\sigma_1, \gamma_1$  足够小, 模型(2)的解会在模型(1)的边界平衡点  $E_1(K, 0, 0)$  周围震荡, 且震荡的幅度与干扰的强度呈正相关。

**定理 3.2** 对任意的初值  $(X(0), S(0), I(0)) \in R_+^3$ , 若条件  $R_0 > 1, R_1 < 1$  和  $a_{11} > p(b_1 - a_{11}\bar{X})$  成立, 则模型(3)的解  $(X(t), S(t), I(t))$  满足

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [(X(\theta) - \bar{X})^2 + (S(\theta) - \bar{S})^2 + I(\theta)^2] d\theta \leq \frac{\delta_2}{K_2},$$

其中

$$K_2 = \min \left\{ a_{11} - p(b_1 - a_{11}\bar{X}), \frac{a_{12}a_{22}(1 + p\bar{X})}{a_{21}(1 + q\bar{S})}, \frac{a_{12}a_{33}(1 + p\bar{X})}{a_{21}(1 + q\bar{S})} \right\},$$

$$\delta_2 = \frac{\sigma_1^2 \bar{X}}{2} + \bar{X} \int_Z [\gamma_1 - \ln(1 + \gamma_1)] \lambda(du) + \frac{a_{12}(1 + p\bar{X})}{a_{21}(1 + q\bar{S})} \left[ \frac{\sigma_2^2 \bar{S}}{2} + \bar{S} \int_Z [\gamma_2 - \ln(1 + \gamma_2)] \lambda(du) \right].$$

**证明** 由于  $(\bar{X}, \bar{S}, 0)$  是系统(1)的平衡点, 所以

$$\begin{cases} b_1 - a_{11}\bar{X} - \frac{a_{12}\bar{S}}{1 + p\bar{X} + q\bar{S}} = 0, \\ b_2 + a_{22}\bar{S} - \frac{a_{12}\bar{X}}{1 + p\bar{X} + q\bar{S}} = 0. \end{cases}$$

定义

$$V(X, S, I) = \left( X - \bar{X} - \bar{X} \ln \frac{X}{\bar{X}} \right) + \frac{a_{12}(1 + p\bar{X})}{a_{21}(1 + q\bar{S})} \left( S - \bar{S} - \bar{S} \ln \frac{S}{\bar{S}} + I \right)$$

$$:= V_1 + \frac{a_{12}(1 + pX^*)}{a_{21}(1 + qS^*)} (V_2 + V_3).$$

由伊藤公式得

$$dV_1 = LV_1 dt + \sigma_1(X - \bar{X})dB_1(t) + \int_Z [\gamma_1(u)X - \bar{X}\ln(1 + \gamma_1(u))] \tilde{N}(dt, du), \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} LV_1 &= (X - \bar{X}) \left[ b_1 - a_{11}X - \frac{a_{12}S}{(1 + pX + qS)} \right] + \frac{\sigma_1^2 \bar{X}}{2} + \bar{X} \int_Z [\gamma_1 - \ln(1 + \gamma_1)] \lambda(du) \\ &= b_1(X - \bar{X}) - a_{11}(X - \bar{X})^2 - a_{11}(X - \bar{X})\bar{X} - \frac{a_{12}S(X - \bar{X})}{(1 + pX + qS)} \\ &\quad + \frac{\sigma_1^2 \bar{X}}{2} + \bar{X} \int_Z [\gamma_1 - \ln(1 + \gamma_1)] \lambda(du) \\ &= -a_{11}(X - \bar{X})^2 + \frac{a_{12}\bar{S}(X - \bar{X})}{(1 + p\bar{X} + q\bar{S})} - \frac{a_{12}S(X - \bar{X})}{(1 + pX + qS)} + \frac{\sigma_1^2 \bar{X}}{2} + \bar{X} \int_Z [\gamma_1 - \ln(1 + \gamma_1)] \lambda(du) \\ &= -a_{11}(X - \bar{X})^2 + \frac{a_{12}p\bar{S}(X - \bar{X})^2}{(1 + p\bar{X} + q\bar{S})(1 + pX + qS)} - \frac{a_{12}(1 + p\bar{X})(S - \bar{S})(X - \bar{X})}{(1 + p\bar{X} + q\bar{S})(1 + pX + qS)} \\ &\quad + \frac{\sigma_1^2 \bar{X}}{2} + \bar{X} \int_Z [\gamma_1 - \ln(1 + \gamma_1)] \lambda(du). \end{aligned}$$

同理可得

$$dV_2 = LV_2 dt + \sigma_2 (S - \bar{S}) dB_2(t) + \int_Z [\gamma_2(u) S - \bar{S} \ln(1 + \gamma_2(u))] \tilde{N}(dt, du), \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} LV_2 &= (S - \bar{S}) \left[ -b_2 - a_{22} S + \frac{a_{21} X}{1 + pX + qS} - \beta I \right] + \frac{\sigma_2^2 \bar{S}}{2} + \bar{S} \int_Z [\gamma_2 - \ln(1 + \gamma_2)] \lambda(du) \\ &= (S - \bar{S}) \left[ -a_{22} (S - \bar{S}) + a_{21} \frac{(X - \bar{X})(1 + q\bar{S}) - q\bar{X}(S - \bar{S})}{(1 + pX + q\bar{S})(1 + pX + qS)} - \beta I \right] + \frac{\sigma_2^2 \bar{S}}{2} \\ &\quad + \bar{S} \int_Z [\gamma_2 - \ln(1 + \gamma_2)] \lambda(du) \\ &= -a_{22} (S - \bar{S})^2 + a_{21} \frac{(X - \bar{X})(S - \bar{S})(1 + q\bar{S})}{(1 + p\bar{X} + q\bar{S})(1 + pX + qS)} - \beta I (S - \bar{S}) \\ &\quad - a_{21} \frac{q\bar{X}(S - \bar{S})^2}{(1 + p\bar{X} + q\bar{S})(1 + pX + qS)} + \frac{\sigma_2^2 \bar{S}}{2} + \bar{S} \int_Z [\gamma_2 - \ln(1 + \gamma_2)] \lambda(du). \end{aligned}$$

同理

$$dV_3 = I(t) [-b_3 - a_{33} I(t) + \beta S(t)] dt + \sigma_3 I(t) dB_3(t) + \int_Z I(t^-) \gamma_3(u, t) \tilde{N}(dt, du). \quad (14)$$

结合方程(12)~(14),得

$$\begin{aligned} dV &= LV dt + \sigma_1 (X - \bar{X}) dB_1(t) + \int_Z [\gamma_1(u) X - \bar{X} \ln(1 + \gamma_1(u))] \tilde{N}(dt, du) \\ &\quad + \frac{a_{12}(1 + p\bar{X})}{a_{21}(1 + q\bar{S})} \left[ \sigma_2 (S - \bar{S}) dB_2(t) + \int_Z [\gamma_2(u) S - \bar{S} \ln(1 + \gamma_2(u))] \tilde{N}(dt, du) \right. \\ &\quad \left. + \sigma_3 I dB_3(t) + \int_Z \gamma_3(u) I \tilde{N}(dt, du) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} LV &= LV_1 + \frac{a_{12}(1 + p\bar{X})}{a_{21}(1 + q\bar{S})} (LV_2 + LV_3) \\ &= -a_{11} (X - \bar{X})^2 + \frac{a_{12} p \bar{S} (X - \bar{X})^2}{(1 + p\bar{X} + q\bar{S})(1 + pX + qS)} - \frac{a_{12}(1 + p\bar{X})(S - \bar{S})(X - \bar{X})}{(1 + p\bar{X} + q\bar{S})(1 + pX + qS)} \\ &\quad + \frac{\sigma_1^2 \bar{X}}{2} + \bar{X} \int_Z [\gamma_1 - \ln(1 + \gamma_1)] \lambda(du) + \frac{a_{12}(1 + p\bar{X})}{a_{21}(1 + q\bar{S})} [-a_{22} (S - \bar{S})^2 - \beta I (S - \bar{S})] \\ &\quad + a_{21} \frac{(X - \bar{X})(S - \bar{S})(1 + q\bar{S})}{(1 + p\bar{X} + q\bar{S})(1 + pX + qS)} - a_{21} \frac{q\bar{X}(S - \bar{S})^2}{(1 + p\bar{X} + q\bar{S})(1 + pX + qS)} \\ &\quad + \frac{\sigma_2^2 \bar{S}}{2} + \bar{S} \int_Z [\gamma_2 - \ln(1 + \gamma_2)] \lambda(du) - a_{33} I^2 - b_3 I + \beta SI \\ &\leqslant -[a_{11} - p(b_1 - a_{11} \bar{X})] (X - \bar{X})^2 - \frac{a_{12} a_{22} (1 + p\bar{X})}{a_{21} (1 + q\bar{S})} (S - \bar{S})^2 - \frac{a_{12} a_{33} (1 + p\bar{X})}{a_{21} (1 + q\bar{S})} I^2 \\ &\quad + \frac{a_{12}(1 + p\bar{X})}{a_{21}(1 + q\bar{S})} (\beta \bar{S} - b_3) I + \frac{\sigma_1^2 \bar{X}}{2} + \bar{X} \int_Z [\gamma_1 - \ln(1 + \gamma_1)] \lambda(du) \\ &\quad + \frac{a_{12}(1 + p\bar{X})}{a_{21}(1 + q\bar{S})} \left[ \frac{\sigma_2^2 \bar{S}}{2} + \bar{S} \int_Z [\gamma_2 - \ln(1 + \gamma_2)] \lambda(du) \right]. \end{aligned}$$

由于  $\beta \bar{S} < b_3$ , 所以

$$\begin{aligned} LV &\leqslant -[a_{11} - p(b_1 - a_{11} \bar{X})] (X - \bar{X})^2 - \frac{a_{12} a_{22} (1 + p\bar{X})}{a_{21} (1 + q\bar{S})} (S - \bar{S})^2 \\ &\quad - \frac{a_{12} a_{33} (1 + p\bar{X})}{a_{21} (1 + q\bar{S})} I^2 + \frac{\sigma_1^2 \bar{X}}{2} + \bar{X} \int_Z [\gamma_1 - \ln(1 + \gamma_1)] \lambda(du) \end{aligned}$$

$$+ \frac{a_{12}(1+p\bar{X})}{a_{21}(1+q\bar{S})} \left[ \frac{\sigma_2^2 \bar{S}}{2} + \bar{S} \int_Z [\gamma_2 - \ln(1+\gamma_2)] \lambda(du) \right]. \quad (16)$$

对方程(15)两端由 0 到  $t$  积分并取期望,得

$$\begin{aligned} E \int_0^t & \left\{ [a_{11} - p(b_1 - a_{11} \bar{X})] (X(\theta) - \bar{X})^2 + \frac{a_{12} a_{22} (1+p\bar{X})}{a_{21}(1+q\bar{S})} (S(\theta) - \bar{S})^2 \right. \\ & \left. + \frac{a_{12} a_{EE} (1+p\bar{X})}{a_{21}(1+q\bar{S})} I^2(\theta) d\theta \right. \\ & \leq EV(0) + \left\{ \frac{\sigma_1^2 \bar{X}^*}{2} + \bar{X} \int_Z [\gamma_1 - \ln(1+\gamma_1)] \lambda(du) \right. \\ & \left. + \frac{a_{12}(1+p\bar{X})}{a_{21}(1+q\bar{S})} \left[ \frac{\sigma_2^2 \bar{S}}{2} + \bar{S} \int_Z [\gamma_2 - \ln(1+\gamma_2)] \lambda(du) \right] \right\} t. \end{aligned} \quad (17)$$

对方程(17)两端同时除以  $t$ , 令  $t \rightarrow \infty$  并取上界,得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [(X(\theta) - \bar{X})^2 + (S(\theta) - \bar{S})^2 + I(\theta)^2] d\theta \leq \frac{\delta_2}{K_2}.$$

证明完毕。

**推论 3.2** 当  $\sigma_i, \gamma_i = 0 (i = 1, 2)$  时,模型(2)等同于模型(1)。由定理 3.2 中方程(16)知,此时

$$LV \leq -[a_{11} - p(b_1 - a_{11} \bar{X})] (X - \bar{X})^2 - \frac{a_{12} a_{22} (1+p\bar{X})}{a_{21}(1+q\bar{S})} (S - \bar{S})^2 - \frac{a_{12} a_{33} (1+p\bar{X})}{a_{21}(1+q\bar{S})} I^2 \leq 0,$$

所以模型(1)的平衡点  $E_2(\bar{X}, \bar{S}, 0)$  是全局渐近稳定的。

**注 3.2** 由定理 3.2 可知,如果干扰强度  $\sigma_i, \gamma_i (i = 1, 2)$  足够小,模型(2)的解会在模型(1)的边界平衡点  $E_2(\bar{X}, \bar{S}, 0)$  周围震荡,且震荡的幅度与干扰的强度呈正相关。

**定理 3.3** 对任意给定的初值  $(X(0), S(0), I(0)) \in \mathbf{R}_+^3$ , 如果条件  $R_1 > 1$  和  $a_{11} > p(b_1 - a_{11} X^*)$  成立,则模型(3)的解  $(X(t), S(t), I(t))$  满足

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [(X(\theta) - X^*)^2 + (S(\theta) - S^*)^2 + (I(\theta) - I^*)^2] d\theta \leq \frac{\delta_3}{K_3},$$

其中

$$\begin{aligned} K_3 &= \min \left\{ a_{11} - p(b_1 - a_{11} X^*), \frac{a_{12} a_{22} (1+pX^*)}{a_{21}(1+qS^*)}, \frac{a_{12} a_{33} (1+pX^*)}{a_{21}(1+qS^*)} \right\}, \\ \delta_3 &= \frac{\sigma_1^2 X^*}{2} + X^* \int_Z [\gamma_1 - \ln(1+\gamma_1)] \lambda(du) + \frac{a_{12}(1+pX^*)}{a_{21}(1+qS^*)} \left[ \frac{\sigma_2^2 S^*}{2} \right. \\ & \left. + S^* \int_Z [\gamma_2 - \ln(1+\gamma_2)] \lambda(du) + \frac{\sigma_3^2 S^*}{2} + I^* \int_Z [\gamma_3 - \ln(1+\gamma_3)] \lambda(du) \right]. \end{aligned}$$

**证明** 由于  $(X^*, S^*, I^*)$  是系统(1)的正平衡点,所以

$$\begin{cases} b_1 - a_{11} X^* - \frac{a_{12} S^*}{1+pX^*+qS^*} = 0, \\ b_2 + a_{22} S^* - \frac{a_{12} X^*}{1+pX^*+qS^*} + \beta I^* = 0, \\ \beta S^* - b_3 - a_{33} I^* = 0. \end{cases}$$

定义

$$\begin{aligned} V(X, S, I) &= \left( X - X^* - X^* \ln \frac{X}{X^*} \right) + \frac{a_{12}(1+pX^*)}{a_{21}(1+qS^*)} \left( S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*} \right) \\ &+ \frac{a_{12}(1+pX^*)}{a_{21}(1+qS^*)} \left( I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*} \right) \\ &:= V_1 + \frac{a_{12}(1+pX^*)}{a_{21}(1+qS^*)} V_2 + \frac{a_{12}(1+pX^*)}{a_{21}(1+qS^*)} V_3. \end{aligned}$$

由伊藤公式得

$$dV_1 = LV_1 dt + \sigma_1 (X - X^*) dB_1(t) + \int_Z [\gamma_1(u) X - X^* \ln(1 + \gamma_1(u))] \tilde{N}(dt, du), \quad (18)$$

其中

$$LV_1 = -a_{11} (X - X^*)^2 + \frac{a_{12} p S^* (X - X^*)^2}{(1 + p X^* + q S^*)(1 + p X + q S)} - \frac{a_{12} (1 + p X^*)(S - S^*)(X - X^*)}{(1 + p X^* + q S^*)(1 + p X + q S)} + \frac{\sigma_1^2 X^*}{2} + X^* \int_Z [\gamma_1 - \ln(1 + \gamma_1)] \lambda(du)。$$

同理可得

$$dV_2 = LV_2 dt + \sigma_2 (S - S^*) dB_2(t) + \int_Z [\gamma_2(u) S - S^* \ln(1 + \gamma_2(u))] \tilde{N}(dt, du), \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} LV_2 &= (S - S^*) \left[ -b_2 - a_{22} S + \frac{a_{21} X}{1 + p X + q S} - \beta I \right] + \frac{\sigma_2^2 S^*}{2} + S^* \int_Z [\gamma_2 - \ln(1 + \gamma_2)] \lambda(du) \\ &= (S - S^*) \left[ -b_2 - a_{22} (S - S^*) - a_{22} S^* + \frac{a_{21} X}{1 + p X + q S} - \beta (I - I^*) - \beta I^* \right] + \frac{\sigma_2^2 S^*}{2} \\ &\quad + S^* \int_Z [\gamma_2 - \ln(1 + \gamma_2)] \lambda(du) \\ &= (S - S^*) \left[ -a_{22} (S - S^*) + a_{21} \frac{(X - X^*)(1 + q S^*) - q X^* (S - S^*)}{(1 + p X^* + q S^*)(1 + p X + q S)} - \beta (I - I^*) \right] + \frac{\sigma_2^2 S^*}{2} \\ &\quad + S^* \int_Z [\gamma_2 - \ln(1 + \gamma_2)] \lambda(du) \\ &= -a_{22} (S - S^*)^2 + a_{21} \frac{(X - X^*)(S - S^*)(1 + q S^*) - q X^* (S - S^*)}{(1 + p X^* + q S^*)(1 + p X + q S)} - \beta (I - I^*) (S - S^*) \\ &\quad - a_{21} \frac{q X^* (S - S^*)^2}{(1 + p X^* + q S^*)(1 + p X + q S)} + \frac{\sigma_2^2 S^*}{2} + S^* \int_Z [\gamma_2 - \ln(1 + \gamma_2)] \lambda(du)。 \end{aligned}$$

同理

$$dV_3 = LV_3 dt + \sigma_3 (I - I^*) dB_3(t) + \int_Z [\gamma_3(u) I - I^* \ln(1 + \gamma_3(u))] \tilde{N}(dt, du), \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} LV_3 &= (I - I^*) [-b_3 - a_{33} I + \beta S] + \frac{\sigma_3^2 I^*}{2} + I^* \int_Z [\gamma_3 - \ln(1 + \gamma_3)] \lambda(du) \\ &= (I - I^*) [-b_3 - a_{33} (I - I^*) - a_{33} I^* + \beta (S - S^*) + \beta S^*] + \frac{\sigma_3^2 I^*}{2} \\ &\quad + I^* \int_Z [\gamma_3 - \ln(1 + \gamma_3)] \lambda(du) \\ &= -a_{33} (I - I^*)^2 + \beta (S - S^*) (I - I^*) + \frac{\sigma_3^2 I^*}{2} + I^* \int_Z [\gamma_3 - \ln(1 + \gamma_3)] \lambda(du)。 \end{aligned}$$

结合方程(18)~(20),得

$$\begin{aligned} dV &= LV dt + \sigma_1 (X - X^*) dB_1(t) + \int_Z [\gamma_1(u) X - X^* \ln(1 + \gamma_1(u))] \tilde{N}(dt, du) \\ &\quad + \frac{a_{12} (1 + p X^*)}{a_{21} (1 + q S^*)} \left[ \sigma_2 (S - S^*) dB_2(t) + \int_Z [\gamma_2(u) S - S^* \ln(1 + \gamma_2(u))] \tilde{N}(dt, du) \right. \\ &\quad \left. + \sigma_3 (I - I^*) dB_3(t) + \int_Z [\gamma_3(u) I - I^* \ln(1 + \gamma_3(u))] \tilde{N}(dt, du) \right], \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$LV = LV_1 + \frac{a_{12} (1 + p X^*)}{a_{21} (1 + q S^*)} LV_2 + \frac{a_{12} (1 + p X^*)}{a_{21} (1 + q S^*)} LV_3$$



$$\begin{aligned}
 &= -a_{11}(X - X^*)^2 + \frac{a_{12}pS^*(X - X^*)^2}{(1 + pX^* + qS^*)(1 + pX + qS)} - \frac{a_{12}(1 + pX^*)(S - S^*)(X - X^*)}{(1 + pX^* + qS^*)(1 + pX + qS)} \\
 &\quad + \frac{\sigma_1^2 X^*}{2} + X^* \int_Z [\gamma_1 - \ln(1 + \gamma_1)] \lambda(du) + \frac{a_{12}(1 + pX^*)}{a_{21}(1 + qS^*)} \left[ -a_{22}(S - S^*)^2 \right. \\
 &\quad + a_{21} \frac{(X - X^*)(S - S^*)(1 + qS^*) - qX^*(S - S^*)}{(1 + pX^* + qS^*)(1 + pX + qS)} - a_{21} \frac{qX^*(S - S^*)^2}{(1 + pX^* + qS^*)(1 + pX + qS)} \\
 &\quad \left. + \frac{\sigma_2^2 S^*}{2} + S^* \int_Z [\gamma_2 - \ln(1 + \gamma_2)] \lambda(du) - a_{33}(I - I^*)^2 + \frac{\sigma_3^2 I^*}{2} + I^* \int_Z [\gamma_3 - \ln(1 + \gamma_3)] \lambda(du) \right] \\
 &\leq -[a_{11} - p(b_1 - a_{11}X^*)](X - X^*)^2 + \frac{\sigma_1^2 X^*}{2} + X^* \int_Z [\gamma_1 - \ln(1 + \gamma_1)] \lambda(du) \\
 &\quad - \frac{a_{12}a_{22}(1 + pX^*)}{a_{21}(1 + qS^*)}(S - S^*)^2 - \frac{a_{12}a_{33}(1 + pX^*)}{a_{21}(1 + qS^*)}(I - I^*)^2 + \frac{a_{12}(1 + pX^*)}{a_{21}(1 + qS^*)} \\
 &\quad \times \left[ \frac{\sigma_2^2 S^*}{2} + S^* \int_Z [\gamma_2 - \ln(1 + \gamma_2)] \lambda(du) + \frac{\sigma_3^2 I^*}{2} + I^* \int_Z [\gamma_3 - \ln(1 + \gamma_3)] \lambda(du) \right].
 \end{aligned}$$

对方程(21)两端由 0 到  $t$  积分并取期望,得

$$\begin{aligned}
 &E \int_0^t \left\{ [a_{11} - p(b_1 - a_{11}X^*)](X(\theta) - X^*)^2 + \frac{a_{12}a_{22}(1 + pX^*)}{a_{21}(1 + qS^*)}(S(\theta) - S^*)^2 + \frac{a_{12}a_{33}(1 + pX^*)}{a_{21}(1 + qS^*)} \right. \\
 &\quad \times (I(\theta) - I^*)^2 \} d\theta \\
 &\leq EV(0) + \left\{ \frac{\sigma_1^2 X^*}{2} + X^* \int_Z [\gamma_1 - \ln(1 + \gamma_1)] \lambda(du) + \frac{a_{12}(1 + pX^*)}{a_{21}(1 + qS^*)} \right. \\
 &\quad \times \left[ \frac{\sigma_2^2 S^*}{2} + S^* \int_Z [\gamma_2 - \ln(1 + \gamma_2)] \lambda(du) + \frac{\sigma_3^2 I^*}{2} + I^* \int_Z [\gamma_3 - \ln(1 + \gamma_3)] \lambda(du) \right] \} t. \quad (22)
 \end{aligned}$$

对方程(22)两端同时除以  $t$ , 令  $t \rightarrow \infty$  并取上界,得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \int_0^t [(X(\theta) - X^*)^2 + (S(\theta) - S^*)^2 + (I(\theta) - I^*)^2] d\theta \leq \frac{\delta_3}{K_3}.$$

证明完毕。

**推论 3.3** 当  $\sigma_i, \gamma_i = 0 (i = 1, 2, 3)$  时,模型(2)等同于模型(1)。由定理 3.3 知,此时

$$\begin{aligned}
 LV &\leq -[a_{11} - p(b_1 - a_{11}X^*)](X - X^*)^2 - \frac{a_{12}a_{22}(1 + pX^*)}{a_{21}(1 + qS^*)}(S - S^*)^2 \\
 &\quad - \frac{a_{12}a_{33}(1 + pX^*)}{a_{21}(1 + qS^*)}(I - I^*)^2 \leq 0,
 \end{aligned}$$

所以模型(1)的正平衡点  $E_3(X^*, S^*, I^*)$  是全局渐近稳定的。

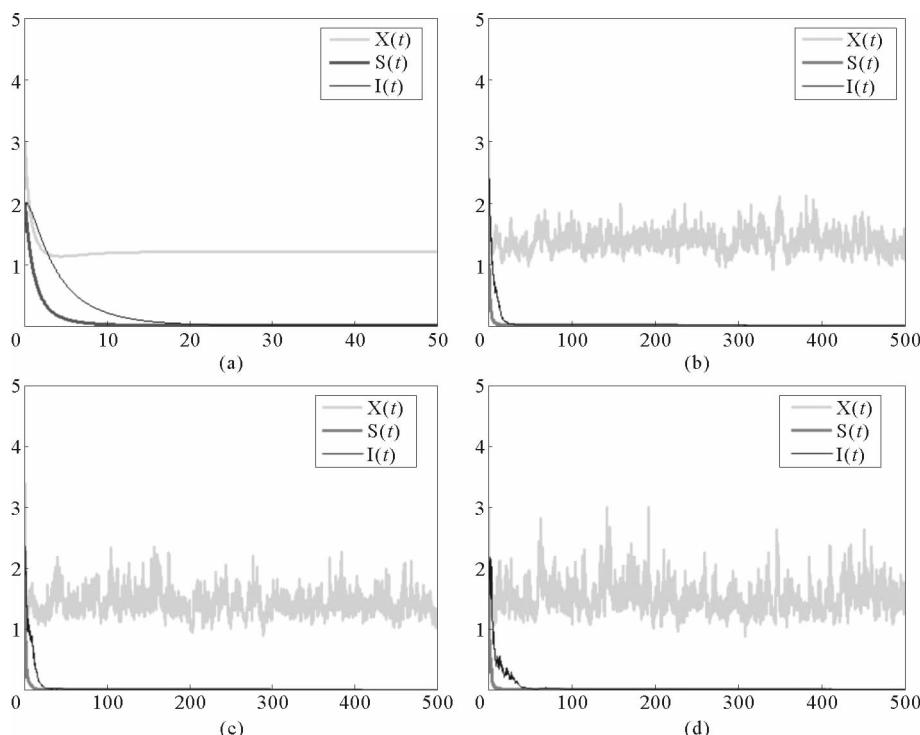
**注 3.3** 由定理 3.3 知,如果干扰强度  $\sigma_i, \gamma_i = 0 (i = 1, 2, 3)$  足够小,模型(2)的解会在模型(1)的正平衡点  $E_3(X^*, S^*, I^*)$  周围震荡,且震荡的幅度与干扰的强度呈正相关。

## 4 数值仿真

利用欧拉法和 Matlab 2014b<sup>[13]</sup>,本文进行了数值模拟以支持获得的结果。数值仿真中,使用以下参数:初始值  $X(0) = 3, S(0) = 2, I(0) = 2, p = q = 1, Z = (0, +\infty), \lambda(Z) = 1$ ,步长  $\Delta t = 0.001$ 。

在图 1 中,  $b_1 = 0.6, b_2 = 0.4, b_3 = 0.2, a_{11} = 0.5, a_{12} = 0.6, a_{21} = 0.3, a_{22} = 0.1, a_{33} = 0.1, \beta = 0.2$ 。图 1(a)为确定性模型(1)的时间序列图,(b)-(d)为随机模型(2)的时间序列图,干扰强度分别取:(b)  $\sigma_i = 0.05, \gamma_i = 0.1$ , (c)  $\sigma_i = 0.05, \gamma_i = 0.15$ , (d)  $\sigma_i = 0.05, \gamma_i = 0.2$ , 其中  $i = 1, 2, 3$ 。

在这种情况下,  $R_0 = 0.409 < 1, K = 1.2 < \frac{b_2}{a_{21}} = 1.33$ 。平衡点  $E_1(K, 0, 0) = (1.2, 0, 0)$ 。图 1 显示系统(2)的解在系统(1)的平衡点  $E_1$  周围浮动,且浮动的幅度与干扰的强度  $\sigma_i, \gamma_i (i = 1)$  的取值呈正相关关系。这与定理 3.1 中的结论一致。



(a) 确定性模型(1);(b)-(d)为随机模型(2),干扰强度分别取值:

(b)  $\sigma_i = 0.05, r_i = 0.1$ , (c)  $\sigma_i = 0.05, r_i = 0.15$ , (d)  $\sigma_i = 0.05, r_i = 0.2$ , 其中  $i = 1, 2, 3$ 。

图1 系统(2)在平衡点  $E_1$  附近的时间序列图

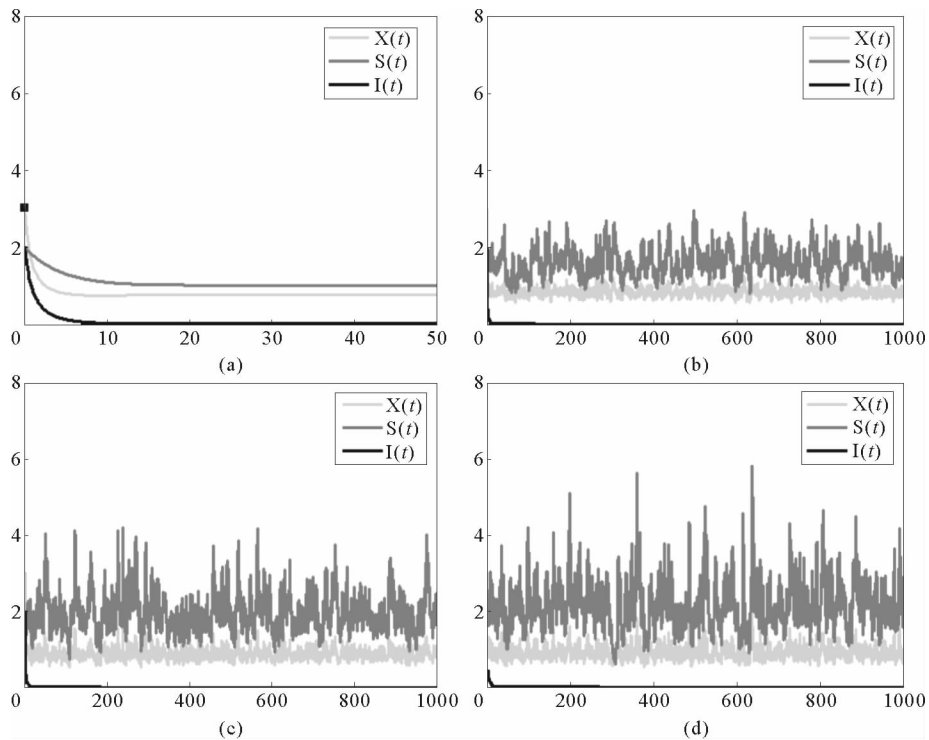
Fig. 1 The time sequence diagram of system(2) around equilibrium point  $E_1$

在图2中,  $b_1=0.6, b_2=0.12, b_3=0.5, a_{11}=0.5, a_{12}=0.6, a_{21}=0.8, a_{22}=0.1, a_{33}=0.4, \beta=0.1$ 。图2(a)为确定性模型(1)的时间序列图, (b)~(d)为随机模型(2)的时间序列图, 干扰强度分别取: (b)  $\sigma_i=0.05, \gamma_i=0.1$ , (c)  $\sigma_i=0.05, \gamma_i=0.15$ , (d)  $\sigma_i=0.05, \gamma_i=0.2$ , 其中  $i=1, 2, 3$ 。

在这种情况下,  $R_0=3.64>1, R_1=0.57<1, a_{11}=0.5>p(b_1-a_{11}\bar{X})=0.21795$ , 边界平衡点  $E_2(\bar{X}, \bar{S}, 0)=(0.7641, 1.0064, 0)$ 。图2显示系统(2)的解在系统(1)的平衡点  $E_2$  周围浮动, 且浮动的幅度与干扰的强度  $\sigma_i, \gamma_i (i=1, 2)$  的取值呈正相关关系。这与定理3.2中的结论一致。

在图3中,  $b_1=1, b_2=0.1, b_3=0.1, a_{11}=0.2, a_{12}=0.6, a_{21}=0.1, a_{22}=0.1, a_{33}=0.2, \beta=0.5$ 。图3(a)为确定性模型(1)的时间序列图, (b)~(d)为随机模型(2)的时间序列图, 干扰强度分别取: (b)  $\sigma_i=0.05, \gamma_i=0.1$ , (c)  $\sigma_i=0.05, \gamma_i=0.15$ , (d)  $\sigma_i=0.05, \gamma_i=0.2$ , 其中  $i=1, 2, 3$ 。

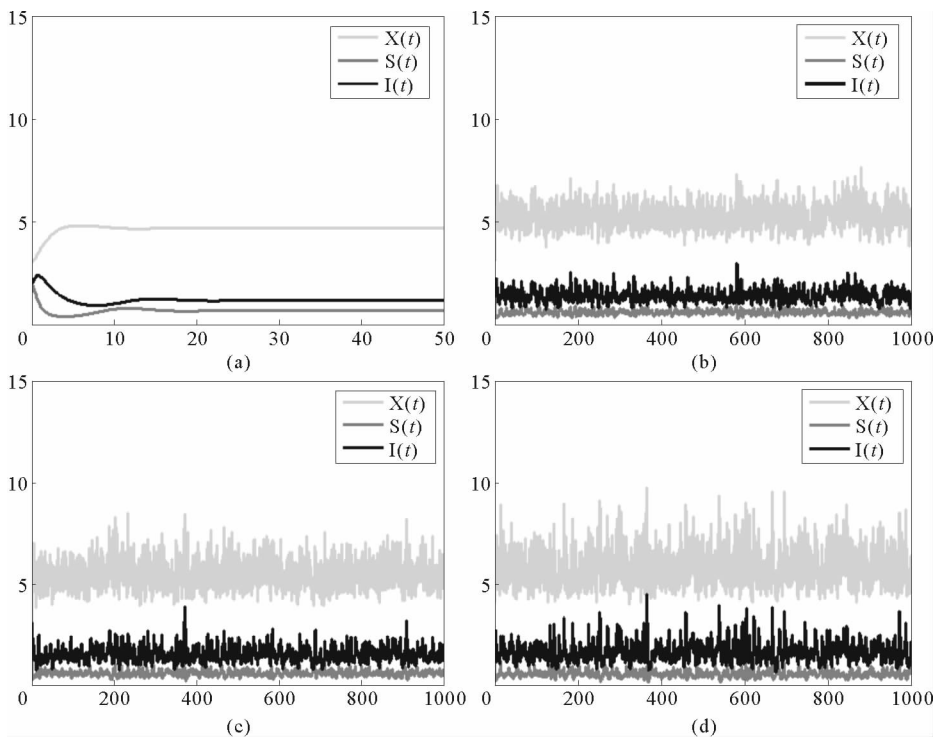
在这种情况下,  $a_{11}=0.2>p(b_1-a_{11}X^*)=0.06224$ , 平衡  $E_3(X^*, S^*, I^*)=(4.69, 0.66, 1.15)R_1=6.72>1$ 。图3显示系统(2)的解在系统(1)的平衡点  $E_3$  周围浮动, 且浮动的幅度与干扰的强度  $\sigma_i, \gamma_i (i=1, 2, 3)$  的取值呈正相关关系。这与定理3.3中的结论一致。



(a) 确定性模型(1);(b)-(d)为随机模型(2),干扰强度分别取值:  
(b)  $\sigma_i = 0.05, r_i = 0.1$ , (c)  $\sigma_i = 0.05, r_i = 0.15$ , (d)  $\sigma_i = 0.05, r_i = 0.2$ , 其中  $i = 1, 2, 3$ 。

图 2 系统(2)在平衡点  $E_2$  附近的时间序列图

Fig. 2 The time sequence diagram of system(2)around equilibrium point  $E_2$



(a) 确定性模型(1);(b)-(d)为随机模型(2),干扰强度分别取值:  
(b)  $\sigma_i = 0.05, r_i = 0.1$ , (c)  $\sigma_i = 0.05, r_i = 0.15$ , (d)  $\sigma_i = 0.05, r_i = 0.2$ , 其中  $i = 1, 2, 3$ 。

图 3 系统(2)在平衡点  $E_3$  附近的时间序列图

Fig. 3 The time sequence diagram of system(2)around equilibrium point  $E_3$

## 5 总结

本文研究了一类带有 Beddington-DeAngelis 功能性反应和 Lévy 跳的捕食者染病的捕食者-食饵系统。运用李雅普诺夫方法和推广的伊藤公式,本文首先证明了系统(2)全局正解的存在唯一性,然后讨论了模型(2)的解在其确定性模型的平衡点周围的渐近行为。Lévy 跳在生物学上表示一些大的环境干扰,比如地震、火山、海啸等。当这类噪声干扰发生的时候,会对生物种群的稳定性产生一定的影响。文中干扰强度参数分别表示三个种群所受自然环境干扰的强度,比如地震、火山、暴雨等自然灾害的强度。定理 3.1~3.3 的理论结果表明,当这类噪声干扰不是特别大的时候,并不会使物种灭绝,但会使种群的数量在平衡状态周边浮动,且这种浮动的强度与噪声干扰的强度呈正相关关系。也就是说,种群对环境的变化具有一定的适应能力,当环境变化的强度很小的时候,它们并不会导致物种的灭亡,而是使物种密度在一定范围内波动。并且,当这种干扰强度不断增大时,它们对物种密度产生的影响也会越大。

### 参考文献:

- [1] MENG X Z, ZHAO S N, FENG T, et al. Dynamics of a novel nonlinear stochastic SIS epidemic model with double epidemic hypothesis[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015, 433: 227-242.
- [2] AGUIRRE P, GONZÁLEZ-OLIVARES E, TORRES S. Stochastic predator-prey model with Allee effect on prey [J]. Nonlinear Analysis: Real World Application, 2013, 14(1): 768-779.
- [3] YAGI A, TON T V. Dynamic of a stochastic predator-prey population[J]. Applied mathematics and Computation, 2011, 218(7): 3100-3109.
- [4] 刘文昌, 孟新柱. 具有脉冲毒素输入的随机收获模型最优捕获策略[J]. 山东科技大学学报(自然科学版), 2015, 34(5): 98-103.  
LIU Wenchang, MENG Xinzhu. Optimal harvesting strategies for stochastic harvest model with impulsive toxicant input[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology(Natural Science), 2015, 34(5): 98-103.
- [5] ZHANG Q M, JIANG D Q, LIU Z W, et al. Asymptotic behavior of a three species eco-epidemiological model perturbed by white noise[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2016, 433: 121-148.
- [6] LIU M, WANG K. Persistence, extinction and global asymptotical stability of a non-autonomous predator-prey model with random perturbation[J]. Applied Mathematical Modelling, 2012, 36: 5344-5353.
- [7] HAQUE M, JIN Z, EZIO V. An ecoepidemiological predator-prey model with standard disease incidence [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2009, 32: 875-898.
- [8] CHATTOPADHYAY J, ARINO O. A predator-prey model with disease in the prey[J]. Nonlinear Analysis-Series A Theory and Methods and Series B Real World Applications, 1999, 36: 747-766.
- [9] XIAO Y N, CHEN L S. Modeling and analysis of a predator-prey model with disease in the prey[J]. Mathematical Biosciences, 2001, 171: 59-82.
- [10] HADELER K P, FREEDMAN H I. Predator-prey populations with parasitic infection[J]. Journal of mathematical biology, 1989, 27: 609-631.
- [11] HAN L T, MA Z E, HETHCOTE H W. Four predator prey models with infectious diseases[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2001, 34: 849-858.
- [12] HETHCOTE H W, WANG W D, HAN L T, et al. A predator-prey model with infected prey[J]. Theoretical Population Biology, 2004, 66: 259-268.
- [13] LI S, WANG X P. Analysis of stochastic predator-prey models with disease in the predator and Beddington-DeAngelis functional response[J]. Advances in Difference Equations, 2015, (1): 1-21.
- [14] ZU L, JIANG D Q, O'REGAN D. Conditions for persistence and ergodicity of a stochastic Lotka-Volterra predator-prey model with regime switching[J]. Communications Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2015, 29: 1-11.
- [15] LI D, CUI J A, SONG G H. Permanence and extinction for a single-species system with jump-diffusion[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015, 430: 438-464.
- [16] LIU M, WANG K. Stochastic Lotka-Volterra systems with Levy noise[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2014, 410: 750-763.
- [17] ZOU X L, WANG K. Numerical simulations and modeling for stochastic biological systems with jumps[J]. Communications Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014, 19: 1557-1568.