含泊松跳跃随机系统的稳定性和可观测性研究

李奇勋[1]，蔺香运[1]，张维海[2]

（1. 山东科技大学 数学与系统科学学院，山东 青岛 266590；
2. 山东科技大学 电气与自动化工程学院，山东 青岛 266590）

摘　要：讨论了由布朗运动和泊松跳跃过程共同驱动的随机线性系统的稳定性和可观测性问题。在引入线性算子的基础上，首先结合谱分析方法，得到了含跳跃随机线性系统稳定性的充要条件，并且获得系统可观测性的 PBH 判据。其次，在系统稳定性和可观测性的基础上，得到了含跳跃随机线性系统镇定的充要条件。最后，将“不可移动的谱”的概念推广到含泊松跳跃的线性随机系统，并获得相应的判定条件。

关键词：泊松跳跃；稳定性；可观测性；不可移动的谱

中图分类号：TP13　　　**文献标志码**：A　　　**文章编号**：1672-3767(2017)02-0095-06

Stability and Observability of Stochastic Systems with Poisson Jumps

LI Qixun[1], LIN Xiangyun[1], ZHANG Weihai[2]

(1. College of Mathematics and Systems Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China; 2. College of Electrical Engineering and Automation, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

Abstract: This paper discusses the stability and observability of the linear stochastic systems driven by Brownian motion and Poisson jumps process. Firstly, linear operator was introduced and spectral analysis was used to obtain the necessary and sufficient conditions for the stability as well as the PBH criterion of the linear stochastic system with Poisson jumps. Secondly, based on the stability and observability, the necessary and sufficient conditions for the stabilizability of the linear stochastic system with Poisson jumps were presented. Finally, the concept of “unremovable spectral” was extended to the stochastic system with Poisson jumps, and the corresponding judgment condition was obtained.

Key words: Poisson jumps; stability; observability; unremovable spectral

稳定性和可观测性是现代控制理论中两个重要的概念，系统的稳定性表示系统保持在平衡状态的一种能力[1]，系统的可观测性表示系统输出对系统状态的反映能力[1]。对于稳定性，学者们历来都有不同的描述方式，如渐近均方稳定性[2]、弱稳定性[3]、指数稳定性[4]等。对于可观测性，学者们也有着不同的定义，如精确能观测性[2-3]、随机能观测性[5]、W-能观测性[6]等。稳定性和可观测性是研究许多问题如二次最优控制问题[7-8]、H_2/H_∞ 控制问题[9]等的前提条件。

在理论研究中，常见的随机系统大多是由布朗运动或者马尔科夫跳跃驱动的[2-4,6-7]，还有许多系统含有泊松过程[8-10]。含泊松跳跃的控制理论在工程与金融市场中有广泛的应用前景[7-10]，如在传统期权定价理论中，常假定股票价格的波动服从几何布朗运动。但现实中股票价格常因为自然灾害、战争、经济危机和重大

收稿日期：2016-09-25

基金项目：国家自然科学基金项目(61573227)；山东省自然科学基金项目(ZR2016FM48)

作者简介：李奇勋（1992—），男，山东济宁人，硕士研究生，主要从事含 Possion 跳随机系统稳定性的研究.
张维海(1965—)，男，山东莱阳人，教授，博士生导师，主要从事随机系统的谱分析、随机 H_∞ 控制和滤波器设计、机器人控制和量子系统的跟踪控制等方面研究，本文通信作者. E-mail：w_hzhang@163.com

政治事件等而导致随机性突然跳跃。为了更好地描述这种现象，需要引入新的数学模型。含泊松跳跃随机系统不仅包含了布朗运动描述的随机因素，也包含了市场的突然变化，因此对含泊松跳跃随机系统的研究具有重要意义。

本研究首先利用矩阵理论的知识构造一个确定性系统，使得含泊松跳跃线性随机系统渐近均方稳定和精确可观测等价于该确定性系统渐近均方稳定和完全可观测。然后利用谱算子技术将确定性系统渐近均方稳定的充要条件推广到含跳随机系统，并且把确定性系统完全可观测的 PBH 判据推广到含跳随机系统。另外，将伊藤型随机系统中“不可移动的谱”的概念[2-3]推广到含跳随机系统，并且得到相应判别方法。最后列出几个关于上述定理的数值例子。

为方便讨论，引入下列记号：$\mathbf{S}_n(\mathbf{R})$：元素为实数的 $n\times n$ 对称矩阵集合，$\mathbf{R}^{n\times m}$：元素为实数的 $n\times m$ 矩阵集合，$\mathbf{R}^n$：元素为实数的 n 维向量集合，$\boldsymbol{A}^T$：$\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$\boldsymbol{A}^*$：$\boldsymbol{A}$ 的共轭转置矩阵，$tr(\mathbf{A})$：矩阵 $\mathbf{A}$ 的迹，$\otimes$：Kronecker 乘积的算符，$\mathbf{C}$：复数域，$\mathbf{C}^-$：复数域负半平面，$\boldsymbol{I}$：单位矩阵。

1 系统描述

设 $(\Omega,\mathscr{F},F,P)$ 为一完备概率空间，$\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ 为定义在该概率空间上的 d 维标准布朗运动；μ 为定义在 $\mathbf{R}_+\times\mathbf{E}$ 上的泊松测度，其中 $\mathbf{E}\subset R^l$ 为非空开集，其 Borel 域为 $\mathscr{B}(E)$，补偿因子为 $\hat{\mu}(\mathrm{d}e,\mathrm{d}t)=\lambda(\mathrm{d}e)\mathrm{d}t$，且使得 $\{\tilde{\mu}((0,t]\times\mathbf{A})=(\mu-\hat{\mu})((0,t]\times\mathbf{A})\}_{t\geqslant 0}$ 对于所有满足 $\lambda(\mathbf{A})<\infty$ 的 $\mathbf{A}\in\mathscr{B}(E)$ 是鞅。λ 假定为 $(\mathbf{E},\mathscr{B}(\mathbf{E}))$ 上的 σ-有限 lévy 测度，相应的过程称为泊松过程。并且布朗运动与泊松跳跃过程是相互独立的。记 $F=\{\mathscr{F}_t:t\geqslant 0\}$ 是由布朗运动和泊松过程生成的完备 σ-域流。[9]

主要考虑下面两个系统：

i）由布朗运动和泊松跳跃过程驱动的线性随机自治系统

$$\begin{cases}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t+\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x}\mathrm{d}W_t+\int_E\boldsymbol{A}_1(e)\boldsymbol{x}\tilde{\mu}(\mathrm{d}e,\mathrm{d}t),\\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n,\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}。\end{cases}\tag{1}$$

ii）由布朗运动和泊松跳跃过程驱动含反馈的闭环线性随机系统

$$\begin{cases}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}K)\boldsymbol{x}\mathrm{d}t+(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0K)\boldsymbol{x}\mathrm{d}W_t+\int_E[\boldsymbol{A}_1(e)+\boldsymbol{B}_1(e)\boldsymbol{K}]x\tilde{\mu}(\mathrm{d}e,\mathrm{d}t),\\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n,\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}。\end{cases}\tag{2}$$

为方便，下文中的 $\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t)$ 皆简写为 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$。其中 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{y}(t)\in\mathbf{R}^l$ 分别为系统状态和量测输出，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{B}_0,\boldsymbol{A}_1(e),\boldsymbol{B}_1(e),\boldsymbol{K},\boldsymbol{Q})\in\mathbf{R}^{n\times n}\times\mathbf{R}^{n\times m}\times\mathbf{R}^{n\times n}\times\mathbf{R}^{n\times m}\times\mathbf{R}^{n\times n}\times\mathbf{R}^{n\times m}\times\mathbf{R}^{m\times n}\times\mathbf{R}^{l\times n}$，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{B}_0$，$\boldsymbol{A}_1(e),\boldsymbol{B}_1(e)$ 是系统参数，$\boldsymbol{K}$ 为反馈矩阵，$\boldsymbol{Q}$ 是输出矩阵。

2 泊松跳跃系统的稳定性与镇定性

定义 1 对于系统(1)，若对任意的初始状态 $\boldsymbol{x}_0$，都有 $\lim\limits_{t\to\infty}E[\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^T(t)]=0$，则称系统(1)是渐近均方稳定的。

定理 1 系统(1)是渐近均方稳定的，当且仅当 $\sigma(\mathscr{L})\in\mathbf{C}^-$，其中

$$\mathscr{L}[\boldsymbol{X}]=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_0^T+\int_E\boldsymbol{A}_1(e)\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_1^T(e)\lambda(\mathrm{d}e),$$

$$(\boldsymbol{X}\in\mathbf{S}_n(\mathbf{R}),\mathscr{L}[\boldsymbol{X}]\in\mathbf{S}_n(\mathbf{R}))，\sigma(\mathscr{L})=\{\alpha\in\mathbf{C}:\mathscr{L}(\boldsymbol{X})=\alpha\boldsymbol{X}\}。$$

证明 令 $\boldsymbol{X}(t)=E[\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^T(t)]$ 通过伊藤公式可以计算得：

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_0^T+\int_E\boldsymbol{A}_1(e)\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_1^T(e)\lambda(\mathrm{d}e),\tag{3}$$

构造一个算子如下：

$$\mathscr{L}[\boldsymbol{X}]=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}^T+\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{XA}_0^T+\int_E \boldsymbol{A}_1(e)\boldsymbol{XA}_1^T(e)\lambda(\mathrm{d}e),\quad (\boldsymbol{X}\in \mathbf{S}_n(\mathbf{R}),\mathscr{L}[\boldsymbol{X}]\in \mathbf{S}_n(\mathbf{R})),$$

引入拉直运算，对于任意 $\boldsymbol{Y}=(y_{ij})_{n\times n}\in \mathbf{R}^{n\times n}$，$\vec{\boldsymbol{Y}}=(y_{11},y_{12},\cdots,y_{1n},\cdots,y_{n1},y_{n2},\cdots,y_{nn})^T$，

对(3)式两边进行拉直可得：

$$\dot{\vec{\boldsymbol{X}}}(t)=[\boldsymbol{A}\otimes \boldsymbol{I}+\boldsymbol{I}\otimes \boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{A}_0\otimes \boldsymbol{A}_0+\int_E \boldsymbol{A}_1(e)\otimes \boldsymbol{A}_1(e)\lambda(\mathrm{d}e)]\vec{\boldsymbol{X}},$$

令矩阵 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{A}\otimes \boldsymbol{I}+\boldsymbol{I}\otimes \boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{A}_0\otimes \boldsymbol{A}_0+\int_E \boldsymbol{A}_1(e)\otimes \boldsymbol{A}_1(e)\lambda(\mathrm{d}e)\in \mathbf{R}^{n^2\times n^2}$，则(3)式变为：$\dot{\vec{\boldsymbol{X}}}(t)=\boldsymbol{L}\vec{\boldsymbol{X}}$。

由确定性系统的稳定性理论可得：线性定常连续系统 $\dot{\vec{\boldsymbol{X}}}(t)=\boldsymbol{L}\vec{\boldsymbol{X}}$ 稳定等价于 $\sigma(\boldsymbol{L})\in \mathbf{C}^-$，因此，系统(1)稳定 $\Leftrightarrow \lim\limits_{t\to\infty}E[\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^T(t)]=0\Leftrightarrow \lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{X}(t)=0\Leftrightarrow \lim\limits_{t\to\infty}\vec{\boldsymbol{X}}(t)=0\Leftrightarrow$ 系统 $\dot{\vec{\boldsymbol{X}}}(t)=\boldsymbol{L}\vec{\boldsymbol{X}}$ 稳定 $\Leftrightarrow\sigma(L)\in \mathbf{C}^-$。所以，现在只需要证明 $\sigma(\boldsymbol{L})\in \mathbf{C}^-\Leftrightarrow\sigma(\mathscr{L})\in \mathbf{C}^-$ 即可。

由谱的定义知，对于任意 $\alpha\in\sigma(\mathscr{L})$，存在相应的特征向量 $\boldsymbol{X}\in S_n(\mathbf{R})$，使得 $\mathscr{L}(\boldsymbol{X})=\alpha\boldsymbol{X}$，对两边拉直可得 $\dot{\vec{\boldsymbol{X}}}(t)=\alpha\vec{\boldsymbol{X}}$，即 $\sigma(\mathscr{L})\subset\sigma(\boldsymbol{L})$。同样的，对于任意 $\beta\in\sigma(\boldsymbol{L})$，存在相应的特征向量 $\vec{\boldsymbol{X}}\in \mathbf{R}^{n^2}$，使得 $\boldsymbol{L}\vec{\boldsymbol{X}}=\beta\vec{\boldsymbol{X}}$，使用拉直的逆运算即得 $\mathscr{L}(\boldsymbol{X})=\beta\boldsymbol{X}$，所以 $\sigma(\boldsymbol{L})\subset\sigma(\mathscr{L})$。由此证得 $\sigma(\boldsymbol{L})=\sigma(\mathscr{L})$ 即 $\sigma(\boldsymbol{L})\in \mathbf{C}^-\Leftrightarrow\sigma(\mathscr{L})\in \mathbf{C}^-$，综上所述，定理 1 得证。

定义 2 对于系统(2)，如果存在一个反馈矩阵 $\boldsymbol{K}$，使得对于任意初始状态 $\boldsymbol{x}_0\in \mathbf{R}^{n\times n}$，系统(2)稳定，则称系统(2)是镇定的。

定理 2 系统(2)是镇定的，当且仅当存在一个反馈矩阵 $\boldsymbol{K}$，使得 $\sigma(\mathscr{L}_K)\in \mathbf{C}^-$，其中

$$\mathscr{L}_K[\boldsymbol{X}]=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^T+(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{K})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{K})^T$$
$$+\int_E(\boldsymbol{A}_1(e)+\boldsymbol{B}_1(e)\boldsymbol{K})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}_1(e)+\boldsymbol{B}_1(e)\boldsymbol{K})^T\lambda(\mathrm{d}e),(\boldsymbol{X}\in S_n(\mathbf{R}),\mathscr{L}_K[\boldsymbol{X}]\in S_n(\mathbf{R}))。$$

证明 类似于定理 1 的证明，定理 2 可证出，此处不再赘言。

3 精确可观测性

定义 3 若对于任意 $T>0$，系统(1)满足 $\boldsymbol{y}(t)\equiv 0,t\in[0,T],T>0\Rightarrow x_0=0$，则称系统(1)为精确可观测的。

定理 3 系统(1)精确可观测，当且仅当不存在 $\boldsymbol{X}\neq 0\in S_n(\mathbf{R})$ 满足下式：

$$\begin{cases}\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}^T+\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{XA}_0^T+\int_E \boldsymbol{A}_1(e)\boldsymbol{XA}_1^T(e)\lambda(\mathrm{d}e)=\alpha\boldsymbol{X},(\alpha\in \mathbf{C})\\ \boldsymbol{QX}=0。\end{cases}\tag{4}$$

证明 令 $\boldsymbol{X}=E\boldsymbol{xx}^T,\boldsymbol{Y}=E\boldsymbol{yy}^T$，其中 $\boldsymbol{x}(\cdot),\boldsymbol{y}(\cdot)$ 分别是系统(1)的解。类似于定理 1 的讨论，对 $\boldsymbol{X}=E\boldsymbol{xx}^T$ 用伊藤公式可得：$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}^T+\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{XA}_0^T+\int_E \boldsymbol{A}_1(e)\boldsymbol{XA}_1^T(e)\lambda(\mathrm{d}e)$，两边拉直得 $\dot{\vec{\boldsymbol{X}}}(t)=\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1(e))\vec{\boldsymbol{X}}$，其中 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1(e))=\boldsymbol{A}\otimes \boldsymbol{I}+\boldsymbol{I}\otimes \boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{A}_0\otimes \boldsymbol{A}_0+\int_E \boldsymbol{A}_1(e)\otimes \boldsymbol{A}_1(e)\lambda(\mathrm{d}e)$。

当系统(1)精确可观测时，由定义 3 可知，对于任何非零初始状态 $\boldsymbol{X}(0)=E\boldsymbol{x}(0)\boldsymbol{x}(0)^T\neq 0$ 都存在一个时刻 $t_1>0$ 使得

$$\boldsymbol{Y}(t_1)=E[\boldsymbol{y}(t_1)\boldsymbol{y}(t_1)^T]=E[\boldsymbol{Qx}(t_1)\boldsymbol{x}^T(t_1)\boldsymbol{Q}^T]=\boldsymbol{QX}(t_1)\boldsymbol{Q}\neq 0,\tag{5}$$

又因为 $\boldsymbol{X}(t)=E\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}(t)^T\geqslant 0,(t\geqslant 0)$，所以存在一个矩阵 $\boldsymbol{Y}_1$ 使得(5)式等价于 $\boldsymbol{Y}_1(t_1)=\boldsymbol{QX}(t_1)\neq 0$，两边拉直得：$\vec{\boldsymbol{Y}}_1(t_1)=\boldsymbol{L}(\boldsymbol{Q})\vec{\boldsymbol{X}}(t_1)\neq 0$，其中 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{Q})=\boldsymbol{Q}\otimes \boldsymbol{I}$。

由此构造了一个确定性系统：

$$\begin{cases}\dot{\vec{\boldsymbol{X}}}(t)=\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1(e))\vec{\boldsymbol{X}},\\ \vec{\boldsymbol{X}}(0)=\overrightarrow{(E\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0^T)},\\ \vec{\boldsymbol{Y}}_1(t_1)=\boldsymbol{L}(\boldsymbol{Q})\vec{\boldsymbol{X}}(t_1)。\end{cases}\tag{6}$$

并且通过上述讨论易得：系统(1)精确可观测等价于确定性系统(6)，完全可观测。

由确定性系统完全可观测的 PBH 判据知，确定性系统(6)完全可观测，当且仅当不存在 $\xi \neq 0 \in \mathbf{C}^{n^2}$，使得 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1(e))\xi = \alpha\xi$，$(\alpha \in \mathbf{C})$，且 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{Q})\xi = 0$。由 $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1(e))$，$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{Q})$ 的定义可知，这等价于不存在 $\boldsymbol{X} \neq 0 \in S_n(\mathbf{R})$ 满足(4)式，由此定理3证毕。

4 不可移动的谱

由算子 $\mathscr{L}_K$ 的定义知，$\mathscr{L}_K$ 为定义在希尔伯特空间 $S_n(\mathbf{R})$ 上的线性算子，对于任意 $\boldsymbol{X} \in S_n(\mathbf{R})$，$\boldsymbol{Y} \in S_n(\mathbf{R})$，定义内积 $\langle \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\rangle = tr(\boldsymbol{X}^*\boldsymbol{Y})$。给出以下定义：

定义4 若 H_1、H_2 是希尔伯特空间，T 是 H_1 到 H_2 上的有界线性算子，T^* 是 H_2 到 H_1 上的有界线性算子，且对于任意的 $x \in H_1$、$y \in H_2$ 满足 $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$，则称 T^* 是 T 伴随算子。

由上面的定义，通过一系列计算可以求得算子 $\mathscr{L}_K^*$ 为 $\mathscr{L}_K$ 的伴随算子，其中：

$$\mathscr{L}_K^*: \boldsymbol{X} \in S_n(\mathbf{R}) \mapsto \boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}) + (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^T\boldsymbol{X} + (\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{K})^T\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{K}) + \int_E (\boldsymbol{A}_1(e)+\boldsymbol{B}_1(e)\boldsymbol{K})^T\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}_1(e)+\boldsymbol{B}_1(e)\boldsymbol{K})\lambda(\mathrm{d}e) \in S_n(\mathbf{R})。$$

定义5 对于系统(2)，若存在 $\boldsymbol{X} \neq 0 \in S_n(\mathbf{R})$，使得对于任意反馈矩阵 $\boldsymbol{K} \in \mathbf{R}^{m\times n}$，$\mathscr{L}_K^*[\boldsymbol{X}] = \alpha\boldsymbol{X}$ 成立，则称 α 为系统(2)的不可移动的谱，$\boldsymbol{X}$ 为相应的特征向量。

为判断 α 是否为系统(2)的不可移动的谱，给出以下定理。

定理4 α 为系统(2)的不可移动的谱当且仅当以下三个等式同时成立：

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{XA} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}_0^T\boldsymbol{XA}_0 + \int_E \boldsymbol{A}_1^T(e)\boldsymbol{XA}_1(e)\lambda(\mathrm{d}e) = \alpha\boldsymbol{X},\\
&\boldsymbol{XB} + \boldsymbol{A}_0^T\boldsymbol{XB}_0 + \int_E \boldsymbol{A}_1^T(e)\boldsymbol{XB}_1(e)\lambda(\mathrm{d}e) = 0,\\
&\boldsymbol{B}_0^T\boldsymbol{XB}_0 + \int_E \boldsymbol{B}_1^T(e)\boldsymbol{XB}_1(e)\lambda(\mathrm{d}e) = 0。
\end{aligned} \tag{7}$$

证明 首先证明充分性，将 $\mathscr{L}_K^*[\boldsymbol{X}]$ 展开得：

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_K^*[\boldsymbol{X}] &= \boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}) + (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^T\boldsymbol{X} + (\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{K})^T\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{K})\\
&\quad + \int_E (\boldsymbol{A}_1(e)+\boldsymbol{B}_1(e)\boldsymbol{K})^T\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}_1(e)+\boldsymbol{B}_1(e)\boldsymbol{K})\lambda(\mathrm{d}e)\\
&= \boldsymbol{XA} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X} + \boldsymbol{A}_0^T\boldsymbol{XA}_0 + \int_E \boldsymbol{A}_1^T(e)\boldsymbol{XA}_1(e)\lambda(\mathrm{d}e)\\
&\quad + [\boldsymbol{XB} + \boldsymbol{A}_0^T\boldsymbol{XB}_0 + \int_E \boldsymbol{A}_1^T(e)\boldsymbol{XB}_1(e)\lambda(\mathrm{d}e)]\boldsymbol{K}\\
&\quad + \boldsymbol{K}^T[\boldsymbol{XB} + \boldsymbol{A}_0^T\boldsymbol{XB}_0 + \int_E \boldsymbol{A}_1^T(e)\boldsymbol{XB}_1(e)\lambda(\mathrm{d}e)]\\
&\quad + \boldsymbol{K}^T[\boldsymbol{B}_0^T\boldsymbol{XB}_0 + \int_E \boldsymbol{B}_1^T(e)\boldsymbol{XB}_1(e)\lambda(\mathrm{d}e)]\boldsymbol{K}。
\end{aligned} \tag{8}$$

将(7)式代入(8)式，显然若(7)式成立则有 $\mathscr{L}_K^*[\boldsymbol{X}] = \alpha\boldsymbol{X}$，即充分性得证。

下面证明必要性，即证明 $L_K^*[\boldsymbol{X}] = \alpha\boldsymbol{X} \Rightarrow$ (7)成立，由(8)式，$\mathscr{L}_K^*[\boldsymbol{X}] = \alpha\boldsymbol{X}$ 可写为：

$$\begin{aligned}
&[\boldsymbol{XB} + \boldsymbol{A}_0^T\boldsymbol{XB}_0 + \int_E \boldsymbol{A}_1^T(e)\boldsymbol{XB}_1(e)\lambda(\mathrm{d}e)]\boldsymbol{K}\\
&+ \boldsymbol{K}^T[\boldsymbol{XB} + \boldsymbol{A}_0^T\boldsymbol{XB}_0 + \int_E \boldsymbol{A}_1^T(e)\boldsymbol{XB}_1(e)\lambda(\mathrm{d}e)]\\
&+ \boldsymbol{K}^T[\boldsymbol{B}_0^T\boldsymbol{XB}_0 + \int_E \boldsymbol{B}_1^T(e)\boldsymbol{XB}_1(e)\lambda(\mathrm{d}e)]\boldsymbol{K} = 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

令 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{XB} + \boldsymbol{A}_0^T\boldsymbol{XB}_0 + \int_E \boldsymbol{A}_1^T(e)\boldsymbol{XB}_1(e)\lambda(\mathrm{d}e)$，$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{B}_0^T\boldsymbol{XB}_0 + \int_E \boldsymbol{B}_1^T(e)\boldsymbol{XB}_1(e)\lambda(\mathrm{d}e)$，则(9)式可写为：

$$\boldsymbol{FK} + \boldsymbol{K}^T\boldsymbol{F} + \boldsymbol{K}^T\boldsymbol{GK} = 0。 \tag{10}$$

欲证明必要性成立，只需证明 $\boldsymbol{F}=0,\boldsymbol{G}=0$ 即可。(10)式又写为 $\boldsymbol{FK}+\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{GK}$，这个等式左边是关于 $\boldsymbol{K}$ 的一次多项式，右边是关于 $\boldsymbol{K}$ 的二次多项式，等式成立则必有二次多项式的系数为0，即 $\boldsymbol{G}=0$。

现证明 $\boldsymbol{F}=0$，将 $\boldsymbol{G}=0$ 代入(10)式可得 $\boldsymbol{FK}+\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{F}=0$，即

$$\boldsymbol{FK}=-\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{F}\ ,\tag{11}$$

记 $\boldsymbol{F}=(f_{ij})_{n\times m}$，因为(11)式对任意矩阵 $\boldsymbol{K}$ 成立，令

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_{ij}=(k_{ls})_{m\times n}=\begin{cases}1, & l=i,s=j\\ 0, & \text{其他}\end{cases},$$

由 $\boldsymbol{FK}=-\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{F}$，得 $f_{1i}=\cdots=f_{ni}=0$。因为 i,j 可以取任何满足条件的整数，又 $f_{ij}=0$，所以 $\boldsymbol{F}=0$，综上所述定理4得证。

5 数值例子

例1 判断稳定性

在系统(1)中，取 $n=2,E=\{e_1,e_2\}$，对于每个 $e_i\in E$ 存在泊松测度 $\mu(e_i,t)$ 与参数 $\lambda_i>0$，以及 μ 的补偿因子 $\hat{\mu}(e_i,t)=\lambda_i t,(i=1,2)$，

$$\begin{cases}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ax}\mathrm{d}t+\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x}\mathrm{d}W_t+\int_E\boldsymbol{A}_1(e)\boldsymbol{x}\tilde{\mu}(\mathrm{d}e,\mathrm{d}t),\\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n,\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{Qx},\end{cases}$$

其中 $\tilde{\mu}(\mathrm{d}e,\mathrm{d}t)=\mu(\mathrm{d}e,\mathrm{d}t)-\hat{\mu}(\mathrm{d}e,\mathrm{d}t)$。

设 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-4 & -4\\ -4 & -7.5\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_0=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_1(e_1)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_1(e_2)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$，

将这些数据代入算子 $\mathscr{L}[\boldsymbol{X}]=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XA}^T+\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{XA}_0^T+\int_E\boldsymbol{A}_1(e)\boldsymbol{XA}_1^T(e)\lambda(\mathrm{d}e)$，经过一系列计算可以求得：$\sigma(\mathscr{L})=\{8.5104,-8,-15.5104\}$。由定理1可知，该系统不稳定。

例2 判断是否为不可移动的谱

在系统(2)中，取 $n=2,E=\{e_1,e_2\}$，对于每个 $e_i\in E$ 存在泊松测度 $\mu(e_i,t)$ 与参数 $\lambda_i>0$，以及 μ 的补偿因子 $\hat{\mu}(e_i,t)=\lambda_i t,(i=1,2)$，

$$\begin{cases}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})\boldsymbol{x}\mathrm{d}t+(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}\mathrm{d}W_t+\int_E[\boldsymbol{A}_1(e)+\boldsymbol{B}_1(e)\boldsymbol{K}]\boldsymbol{x}\tilde{\mu}(\mathrm{d}e,\mathrm{d}t),\\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n,\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{Qx},\end{cases}$$

其中 $\tilde{\mu}(\mathrm{d}e,\mathrm{d}t)=\mu(\mathrm{d}e,\mathrm{d}t)-\hat{\mu}(\mathrm{d}e,\mathrm{d}t)$。令 $\lambda_1=1,\lambda_2=2$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_0=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{B}_1(e)=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_1(e_1)=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_1(e_2)=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}$。

将这些数据代入下列等式中：

$$\boldsymbol{XA}+\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}_0^T\boldsymbol{XA}_0+\int_E\boldsymbol{A}_1^T(e)\boldsymbol{XA}_1(e)\lambda(\mathrm{d}e)=\alpha\boldsymbol{X},$$

$$\boldsymbol{XB}+\boldsymbol{A}_0^T\boldsymbol{XB}_0+\int_E\boldsymbol{A}_1^T(e)\boldsymbol{XB}_1(e)\lambda(\mathrm{d}e)=0,$$

$$\boldsymbol{B}_0^T\boldsymbol{XB}_0+\int_E\boldsymbol{B}_1^T(e)\boldsymbol{XB}_1(e)\lambda(\mathrm{d}e)=0,$$

经过计算得 $\alpha=101,\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 满足上式。通过定理3可知 $\alpha=101$ 是系统(2)的一个不可移动的谱，

且 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ 为相应的特征向量。

例 3 判断系统是否精确可观测

在系统(1)中,取 $n=2, E=\{e_1, e_2\}$,对于每个 $e_i \in E$ 存在泊松测度 $\mu(e_i, t)$ 与参数 $\lambda_i>0$,以及 μ 的补偿因子 $\hat{\mu}(e_i, t)=\lambda_i t,(i=1,2)$,

$$\begin{cases}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t+\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x}\mathrm{d}W_t+\int_E \boldsymbol{A}_1(e)\boldsymbol{x}\tilde{\mu}(\mathrm{d}e, \mathrm{d}t),\\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0 \in \mathbf{R}^n,\\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x},\end{cases}$$

其中 $\tilde{\mu}(\mathrm{d}e, \mathrm{d}t)=\mu(\mathrm{d}e, \mathrm{d}t)-\hat{\mu}(\mathrm{d}e, \mathrm{d}t)$,取参数 $\lambda_1=1, \lambda_2=2$,$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}_0=\begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 4\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}_1(e_1)=\begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}_1(e_2)=\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$。

将数据代入下列方程中:

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_0^T+\int_E \boldsymbol{A}_1(e)\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_1^T(e)\lambda(\mathrm{d}e)=\alpha\boldsymbol{X},(\alpha \in \mathbf{C}),\\ \boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}=0,\end{cases}$$

经计算得上式只有零解,即 $\boldsymbol{X}=0$,由定理4可知,系统(1)精确可观测。

6 结论

研究了由布朗运动和泊松跳跃过程共同驱动的线性随机系统稳定性和可观测性问题。通过构造线性算子 $\mathscr{L}$ 的方法,得到了系统稳定和镇定的充分必要条件,系统精确可观测的PBH判据。随后引入"不可移动的谱"的概念并得到了相应的判别方法。由于本研究构造算子 L 的方法不适用于非线性随机系统,而且 $C^2[0,+\infty)$ 空间是无穷维的,在 C^2 空间中讨论线性算子谱较复杂,因此不能将所得的几个判据推广到非线性随机系统。对于非线性情形,可以考虑借鉴Lyapunov函数的方法引入线性生成元算子,这将作为后续研究的内容。

参考文献:

[1]刘豹,唐万生.现代控制理论[M].3版.北京:机械工业出版社,2015:157-177.

[2]ZHANG W H,CHEN B S. On stabilizability and exact observability of stochastic systems with their applications[J]. Automatica,2004,40(1):87-94.

[3]ZHANG W H,ZHANG H S,CHEN B S. Generalized Lyapunov equation approach to state-dependent stochastic stabilization/detectability criterion[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2008,53(7):1630-1642.

[4]HU L J,MAO X R. Almost sure exponential stabilisation of stochastic systems by state-feedback control[J]. Automatica,2008,44(2):465-471.

[5]CHEN H F. On stochastic observability[J]. Science in China Series A:Mathematics,1977,20(3):31-50.

[6]ZHANG W H,TAN C. On detectability and observability of discrete-time stochastic Markov jump systems with state-dependentnoise[J]. Asian Journal of Control,2013,15(5):1366-1375.

[7]RAMI M A,ZHOU X Y. Linear matrix inequalities,Riccati equations,and indefinite stochastic linear quadratic controls[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2000,45(6):1131-1143.

[8]史敬涛.带泊松跳跃的正倒向随机最优控制理论及其应用[D].济南:山东大学,2009.

[9]LIN X Y,ZHANG R. H_∞ control for stochastic systems with Poisson jumps[J]. Journal of Systems Science and Complexity,2011,24(4):683-700.

[10]于辉.带泊松测度随机微分方程数值解的收敛性和稳定性[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2013.

[11]侯婷.离散时间Markov跳变系统的稳定性与鲁棒 H_2/H_∞ 控制[D].青岛:山东科技大学,2010.

(责任编辑:傅 游)