一类非线性期望保费的再保险模型

李振华，杭晓渝，毛丽芹
（天津商业大学 宝德学院，天津 300384）

摘 要：最大期望效用原理被广泛用于保险人的风险决策，本研究在此背景下提出了一类非线性期望保费——幂函数期望保费，建立了停止损失再保险模型，得出该模型最优自留额存在的方程，并严格证明了该方程存在唯一解的充分条件。通过数值模拟计算，验证了非线性期望保费模型更加符合保险人和再保险人的决策心理。之后又对线性和非线性模型进行了求解。结果表明，在保险人期望效用最优时，非线性模型计算的最优自留额都在合理范围内，同时非线性模型比线性模型更有效。

关键词：效用理论；再保险；幂函数期望保费；最优自留额

中图分类号：O211. 9　**文献标志码：**A　**文章编号：**1672-3767(2017)02-0101-06

Reinsurance Model Based on A Class of Nonlinear Expected Premium

LI Zhenhua, HANG Xiaoyu, MAO Liqin
(Boustead College, Tianjin University of Commerce, Tianjin 300384, China)

Abstract: Applying maximum expected utility principle, which is widely used in risk management decisions in the insurance industry, this paper proposed power function expected premium, a class of nonlinear expected premium, and established a stop－loss reinsurance model. The optimal retention equation of this model was then obtained and the sufficient condition for the unique solution to this equation was proved. The numerical simulation showed that the nonlinear expected premium model was more in line with the desicion－making psychology of insurers and reinsurers. Both the linear and nonlinear models were solved via the maximum expected utility principle. The results show that all the optimal retention levels are within the reasonable range when the insurers' expectation utility is optimal, proving that the nonlinear model provides more favorable utility for insurers than the linear one.

Key words: utility theory; reinsurance; power function expected premium; optimal retention

在保险行业中，最优再保险策略的研究对于保险公司的发展具有重要的理论和现实意义。最优再保险策略的关键问题是在不同的准则下，给出最优再保险形式及保险人自留额的大小。再保险形式中停止损失再保险具有很重要的地位[1－4]。许多学者从不同的模型出发对此进行了大量研究，文献[5]从金融行业中引入风险管理和绩效评估指标，在追求保险人风险调整资本收益率最大化的准则下，讨论了比例再保险和停止

收稿日期：2016-06-14
基金项目：国家自然科学基金项目(71401178)；天津市 2015 年度哲学社会科学规划课题(TJYYWT15-017)；天津市科技发展战略规划项目(15ZLZLF00220)
作者简介：李振华(1981—)，男，天津蓟县人，讲师，硕士，主要从事风险理论与保险精算，随机过程及其应用等方面的研究. E-mail：auhnehzil@126.com
杭晓渝(1972—)，男，天津人，讲师，硕士，主要从事概率论与数理统计的研究
毛丽芹(1978—)，女，天津蓟县人，副教授，硕士，主要从事区域经济等方面的研究

损失再保险，并得出最优自留风险比率和自留风险额度。文献[6]从基金中引入夏普比率指标，得到了保险人夏普比率最大化的自留比例和自留额度。文献[7]由伊藤微分公式得出总资产的线性正倒向随机微分方程，在此条件下求出再保险的自留比例或自留额的解析式。文献[8]在传统期望保费的基础上，考虑凹扭曲风险度量最小化，研究了最优再保险形式的确定。文献[9]讨论了保险公司的盈余过程，得出最优再保险策略。文献[10-12]在效用理论下建模，追求保险人效用最大化，研究了最优再保险形式或最优自留额的确定。

以上这些研究虽然都得出了不同条件下的最优自留额的结果，但均建立在传统期望保费原则前提下，保费或(再保费)与期望索赔额或(再保险期望赔付额)为线性关系，而非线性形式下自留额的确定问题目前研究很少。基于此，本研究提出了一类非线性幂函数形式 $P=(1+\alpha)(ER(X))^{C}$ 的期望保费准则，并参考文献[12]的效用理论方法，在非线性期望保费的条件下，给出了再保险中最优自留额的存在方程及最优解的存在条件，并通过数值模拟计算验证了结论的正确性和实用性。

1 幂函数期望保费准则的停止损失再保险模型

再保险公司负责事故发生时对保险人进行相应的赔付，所以再保险人应该向其收取一定的保费，期望保费是其中一种：$P=(1+\alpha)E(R(X))$。由于再保险人也是风险厌恶的，故含有安全附加系数 $\alpha>0$，有 $P>E(R(X))$，即收取保费高于再保险赔付的期望均值。一般的期望保费是 $E(R(X))$ 的线性函数，对再保险人承担风险心理考虑不足，本研究把期望保费变成其一般幂函数形式，对停止损失再保险问题进行讨论，丰富了期望保费的形式。

停止损失再保险比起其他再保险函数具有一定的优越性，文献[13]已经证明下面结论：

引理 1 当保险事故损失 $X\geqslant 0$ 时，某再保险合同约定的理赔支付为 $I(X)$，假定 $\forall x$，$0\leqslant I(x)\leqslant x$，则 $E(I(X))=E[(X-d)_+]\Rightarrow Var(X-I(X))\geqslant Var(X-(X-d)_+)$。

引理说明：停止损失再保险与其他类型再保险，具有相同的期望理赔时，保险人自留风险的方差达到最小。

而对于保险人来说，根据赔付额 X 的分布设定多大的自留额 d 是停止损失再保险的核心问题之一。在一些风险理论教材中给出了最优再保险方式，即在自留额固定的情况下，效用理论下的最优再保险为停止损失再保险，其中分保费可以通过方程 $P=(1+\alpha)E(\bar{R}(X))$ 来确定，假设原保险人损失分布函数 $F(x)$ 已知，由函数期望计算可得到方程：$P=\int_d^{\infty}(1+\alpha)(x-d)\mathrm{d}F(x)$。基于此建立如下模型。

设保险人保费收入为 w，其效用函数为 $u(w)$，保险人损失额为 X，X 是定义在概率空间 (Ω,F,P) 上的随机变量。其分布函数和密度函数已知，分别为 $F(x)$ 和 $f(x)$，且 $x\geqslant 0$。当理赔发生时，再保险人对保险人的赔付记为 $\bar{R}(X)=(X-d)_+=\begin{cases}0, 0\leqslant x\leqslant d\\ x-d, x>d\end{cases}$，且满足 $0\leqslant\bar{R}(X)\leqslant X$，假设再保费函数形式为 $P=(1+\alpha)(E(\bar{R}(X)))^{C}$（$c$ 为常数）。设最优自留额为 d^*，幂函数期望保费准则的停止损失再保险模型可以写成如下形式：

$$\begin{cases}\max Eu(w-X-P+\bar{R}(X))\\ P=(1+\alpha)(E\bar{R}(X))^{C}\\ 0\leqslant\bar{R}(X)\leqslant X\end{cases}。\tag{1}$$

其中 $c>0$ 为幂指数，自留额 $d>0$。

定理 1 在模型(1)的条件下，若最优再保险为停止损失再保险 $\bar{R}(X)$，则自留额 d 是方程：

$$u'(w-d-P)=\beta(E\bar{R}(X))^{C-1}\cdot E(u'(w-X+\bar{R}(X)-P))。\tag{2}$$

的解，其中 $\beta=(1+\alpha)c$。

证明 令 $Y(d)=Eu(w-X-P+\bar{R}(X))$，由期望计算公式 $EX=\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{d}F(x)$ 和再保险函数 $\bar{R}(X)=\begin{cases}0, 0\leqslant X\leqslant d\\ X-d, X>d\end{cases}$，可得 $E\bar{R}(X)=\int_d^{\infty}(x-d)\mathrm{d}F(x)=\int_d^{\infty}x\mathrm{d}F(x)-d\int_d^{\infty}\mathrm{d}F(x)$，

$P=(1+\alpha)(E\bar{R}(X))^C$ 为自留额 d 的函数，由 $(\mathrm{E}\bar{\mathrm{R}}(\mathrm{X}))'_{\mathrm{d}}=(\mathrm{F}(d)-1)$ 可以推出

$P'_d=\beta(E\bar{R}(X))^{C-1}(F(d)-1)$，又 $Y(d)=\int_0^d u(w-x-P)\mathrm{d}F(x)+\int_d^\infty u(w-d-P)\mathrm{d}F(x)$，

得 $Y'(d)=\beta(E\bar{R}(X))^{C-1}\cdot(1-F(d))\cdot\int_0^d u'(w-x-P)\mathrm{d}F(x)+u(w-d-P)F'(d)-$

$u'(w-d-P)\cdot(1-F(d))+u'(w-d-P)\cdot(1-F(d))^2\cdot\beta(E\bar{R}(X))^{C-1}-u(w-d-P)F'(d)$，

由于 $(1-F(d))\neq 0$，令 $Y'(d)=0$，整理可得

$Y'(d)=-u'(w-d-P)+u'(w-d-P)\cdot\beta\cdot(E\bar{R}(X))^{C-1}\cdot(1-F(d))+\beta\cdot(E\bar{R}(X))^{C-1}\cdot$ $\int_0^d u'(w-x-P)\mathrm{d}F(x)=0$，移项可得

$$u'(w-d-P)=\beta\cdot(E\bar{R}(X))^{C-1}\left[u'(w-d-P)\cdot(1-F(d))+\int_0^d u'(w-x-P)\mathrm{d}F(x)\right]$$

$=\beta\cdot(E\bar{R}(X))^{C-1}\cdot E[u'(w-X+\bar{R}(X)-P)]$，证毕。

2 最优自留额存在性的讨论

定理1证明了最优自留额是由方程(2)确定的，但是并没有讨论该方程是否存在解，下面定理给出方程存在唯一解的充分条件。

定理2 在模型(1)假设条件下，对于 $\forall x>0$，$0\leqslant d\leqslant \sup x$，当幂指数 $c\geqslant 1$，保费满足 $\left.\dfrac{E\bar{R}(X)}{c}\right|_{d=0}<P|_{d=0}$ 且 $P|_{d=\sup x}<\dfrac{u'(w-d-P)E\bar{R}(X)|_{d=\sup x}}{E(cu'(w-X+\bar{R}(X)-P))|_{d=\sup x}}$ 时，方程(2)的解存在且唯一。

证明 由方程(2)，令 $U(d)=u'(w-d-P)-\beta(E\bar{R}(X))^{C-1}\cdot E(u'(w-X+\bar{R}(X)-P))$，

$U'(d)=-u''(w-d-P)\{[\beta(E\bar{R}(X))^{C-1}\cdot(1-F(d))]-1\}^2-[\beta(E\bar{R}(X))^{C-1}]^2\cdot(1-F(d))\cdot$ $\int_0^d u''(w-x-P)\mathrm{d}F(x)+\beta(c-1)\cdot(E\bar{R}(X))^{C-2}(1-F(d))\cdot E(u'(w-X+\bar{R}(X)-P))$，因为效用函数 $u'>0$，$u''<0$，当 $c\geqslant 1$ 时，由 $U'(d)$ 表达式可知 $U'(d)\geqslant 0$，所以 $U(d)$ 单调递增，在 $0\leqslant d<\infty$ 范围内，方程 $U(d)=0$ 的解如果存在必唯一。

接下来讨论方程 $U(d)=0$ 解存在需要满足的条件。如果存在解，则等同于 $U(0)<0$ 且 $U(d=\sup x)>0$ 或 $U(\infty)>0$，于是令 $U(0)<0$，可得

$$U(d)=u'(w-d-P)-\left[\beta(E\bar{R}(X))^{C-1}\cdot\left(\int_0^d u'(w-x-P)\mathrm{d}F(x)+\int_d^\infty u'(w-d-P)\mathrm{d}F(x)\right)\right],$$

取 $d=0$，$U(0)=u'(w-P|_{d=0})-\beta(E\bar{R}(X)|_{d=0})^{C-1}\int_0^\infty u'(w-P|_{d=0})\mathrm{d}F(x)$

$=u'(w-P|_{d=0})-\beta(E\bar{R}(X)|_{d=0})^{C-1}E(u'(w-P|_{d=0})<0$，

移项整理可得 $[u'(w-P)<\beta(E\bar{R}(X))^{C-1}E(u'(w-P)]_{d=0}$，

$\left.\dfrac{E\bar{R}(X)\cdot u'(w-(1+\alpha)(E\bar{R}(X))^C)}{cE(u'(w-(1+\alpha)(E\bar{R}(X))^C)}\right|_{d=0}<(1+\alpha)(E\bar{R}(X)|_{d=0})^C=P|_{d=0}$，

又 $E(u'(w-(1+\alpha)(E\bar{R}(X))^C)=u'(w-(1+\alpha)(E\bar{R}(X))^C)$，

$$\text{所以有}\ \left.\frac{E\bar{R}(X)}{c}\right|_{d=0}<P|_{d=0}\tag{3}$$

自留额都取有限值，研究 $U(d=\sup x)>0$ 的情况，可得 $U(d=\sup x)=u'(w-d-P)$ $-\left.\left[\beta(E\bar{R}(X))^{C-1}\cdot\int_0^d u'(w-x-P)\mathrm{d}F(x)+\int_d^\infty u'(w-d-P)\mathrm{d}F(x)\right]\right|_{d=\sup x}=u'(w-d-P)-$ $\beta(E\bar{R}(X))^{C-1}\cdot Eu'(w-X+\bar{R}(X)-P)_{d=\sup x}$，

$$U(d=\sup x)>0\ \text{时，可有}\ P|_{d=\sup x}<\frac{u'(w-d-P)E\bar{R}(X)|_{d=\sup x}}{E(cu'(w-X+\bar{R}(X)-P))|_{d=\sup x}}\ 。\tag{4}$$

又因为 $P'_d=\beta(E\bar{R}(X))^{C-1}\cdot(F(d)-1)<0$，所以 $P(d)$ 单调递减，结合式(3)和(4)，命题得证。

3 数值分析

3.1 数值模拟

设保险公司在某段时间内发生索赔额 X 服从伽玛分布(Gamma 分布)，概率密度为

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{b^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}\mathrm{e}^{-bx},x>0\\0,x\leqslant 0\end{cases}$，保险公司对某一保险单安排停止损失再保险 $\bar{R}(X)=(X-d)_+$，期望再保费指数为 c，即 $P=(1+\alpha)(E\bar{R}(X))^C$，安全附加系数为 $\alpha>0$，效用函数取常见的指数形式，即 $u(x)=-\mathrm{e}^{-x}$，符合风险厌恶型的条件：$u'>0,u''<0$，保险公司的保费为 w(单位：万元)。利用 MATLAB 模拟索赔额 X 的分布，选取五组不同的参数，拟保费向量为 $\boldsymbol{w}=(1,3,4,6,10)$，拟最优自留额向量 $\boldsymbol{d}=(0.5,0.7,3,5,7)$，每组进行 1 000 次索赔模拟，对数据进行计算分析，结果如表 1。

表 1 线性和非线性再保费

Tab. 1 The linear and nonlinear reinsurance premium

万元

	分布参数	$a=1,b=2$	$a=1,b=1$	$a=4,b=1$	$a=6,b=1$	$a=10,b=1$
	EX	0.5	1	4	6	10
	样本均值	0.497 8	1.097 8	4.072 4	6.027 5	9.912 8
	线性保费 P ($\alpha=0.2$)	0.220 4	0.688 0	1.683 8	1.810 2	3.733 1
非线性保费与线性保费之差 P_1-P	$\alpha=0.2,c=1.03$	−0.010 9	−0.011 4	0.017 2	0.022 5	0.129 3
	$\alpha=0.2,c=1.07$	−0.024 7	−0.026 3	0.040 4	0.052 9	0.308 7
	$\alpha=0.2,c=1.10$	−0.034 4	−0.037 2	0.058 0	0.076 0	0.448 7
	$\alpha=0.2,c=1.14$	−0.046 5	−0.051 5	0.081 8	0.107 2	0.642 9
	$\alpha=0.2,c=1.18$	−0.057 9	−0.065 6	0.105 9	0.139 0	0.846 1

通过表 1 可以看到，在相同的安全系数 α 和相同的自留额下，当索赔额期望较小时，线性保费 P 大于非线性保费 P_1，而当索赔额期望明显增大时，保费 P_1 开始大于保费 P。这说明，非线性保费比线性保费更能体现保险人和再保险人的决策心理，即索赔额较低时，保险人可以适当少支付保费，而当索赔额剧增时，再保险人就会承担更大的风险，所以更愿意多收取保费。这样的保费策略优于线性保费比例一成不变的情况，更符合保险决策人的心理。同时从表 1 中还可以看到，非线性保费可以通过调整两个参数：安全系数 α 与保费指数 c 来确定保费额，适当降低 α，同时适当提高指数 c，可以得到更多的保费结果便于决策，增强了保费计算的灵活性和广泛性，保费的计算方法得到了推广。

3.2 模型的数值计算与分析

前面分析只是拟定自留额向量，这里为检验模型的实用性和正确性，比较两种模型的计算效果，基于上面给出的索赔额分布的参数取值，对模型方程进行求解，计算出最优自留额向量。

定理 1 给出了效用理论下最优自留额 d^* 的存在方程：

$$u'(w-d-P)=\beta(E\bar{R}(X))^{C-1}\cdot E(u'(w-X+\bar{R}(X)-P))\text{。}$$

定理 2 给出了该方程存在唯一解的充分条件：

$$f_0=\left.\frac{E\bar{R}(X)}{c}\right|_{d=0}<P|_{d=0}=P_0\text{ 且 }P_{\sup}=P|_{d=\sup x}<\left.\frac{u'(w-d-P)E\bar{R}(X)}{E(cu'(w-X+\bar{R}(X)-P))}\right|_{d=\sup x}=f_{\sup}\text{。}$$

伽玛分布的不同参数所产生的自留额方程可以看成 $f(a,b,c,d,\alpha,w)=0$，篇幅所限这里略去求解过程，只给出数值结果。理论上 $\sup x$ 为无穷大，这里为了便于计算取 $\sup x=100$，通过 *MATLAB* 计算，得出结果如表 2 所示。

表 2 线性和非线性最优自留额水平

Tab.2 The linear and nonlinear optimal retention level

万元

分布参数	线性期望保费最优自留额 ($c=1,\alpha=0.2$)	方程唯一解条件 $f_0<P_0$		方程唯一解条件 $f_{\sup}>P_{\sup}$		非线性期望保费最优留额 ($c=1.03,\alpha=0.1$)	方程唯一解条件 $f_0<P_0$		方程唯一解条件 $f_{\sup}>P_{\sup}$	
$a=1,b=2$	0.524 7	0.500	0.600	$2.7/10^{44}$	$3.6/10^{88}$	0.333 9	0.49	0.54	$1.4/10^{44}$	$8.5/10^{90}$
$a=1,b=1$	0.731 0	1.000	1.200	0.009	$3.2/10^{44}$	0.541 2	0.97	1.10	0.009	$7.7/10^{42}$
$a=4,b=1$	2.890 4	4.000	4.800	0.011	$5.3/10^{39}$	2.645 8	3.88	4.58	0.010	$3.4/10^{40}$
$a=6,b=1$	4.482 1	6.000	7.200	0.016	$2.6/10^{36}$	4.228 4	5.83	6.96	0.015	$2.01/10^{37}$
$a=10,b=1$	7.820 1	10.00	13.00	0.026	$8.5/10^{32}$	7.568 8	9.71	11.78	0.025	$9.1/10^{33}$

基于表 1 中伽玛分布的五种类型，表 2 对线性期望保费和非线性期望保费模型分别进行了求解。从方程解的条件可以看到，两种模型对于五种索赔额组合分布都满足唯一解的条件，且 f_0 、P_0 、$f_{\sup}$ 、$P_{\sup}$ 均随着索赔额期望 EX 增加而增长，符合保费计算的实际规律，且都满足唯一解条件，说明模型适用性较好。两种模型都成功地求解出了最优自留额向量 $\boldsymbol{d}^*_{(1,0.2)}=(0.524\ 7,\ 0.731\ 0,\ 2.890\ 4,\ 4.482\ 1,\ 7.820\ 1)$ 和 $\boldsymbol{d}^*_{(1.03,0.1)}=(0.333\ 9,\ 0.541\ 2,\ 2.645\ 8,\ 4.228\ 4,\ 7.568\ 8)$。由表 1 可以看到 $EX=(0.5,1,4,6,10)$，表 2 线性模型中除 $\boldsymbol{d}^*_{(1,0.2)}(1)>EX$ 外，其他均有 $\boldsymbol{d}^*_{(1,0.2)}(i)(i=2,\cdots,5)<EX$ ，而非线性模型中恒有 $\boldsymbol{d}^*_{(1.03,0.1)}<EX$ ，自留额位于索赔额期望以下，这样保险人会更好地利用再保险减小自身承担的风险，说明两模型都能计算出较合理的最优自留额，而非线性模型更优。

和表 1 线性保费 P 和非线性保费 P_1 计算方法相同，利用五种不同参数分布的模拟数据，将拟最优自留额 d 分别替换成 $\boldsymbol{d}^*_{(1,0.2)}$ 和 $\boldsymbol{d}^*_{(1.03,0.1)}$ ，可以计算出实际的线性再保费 P 、非线性再保费 P_1 以及两种模型在各自最优自留额策略下的效用函数的差值，结果如表 3。

表 3 线性与非线性最优自留额水平及其效用

Tab.3 The linear and nonlinear optimal retention level and their utilities

万元

分布参数	再保险赔付额期望 $E(\bar{R}(X))$	线性再保费 P^*	非线性再保费 P_1^*	线性最优自留额	非线性最优自留额	效用值之差 $U(P_1)-U(P)$ (无量纲)
$a=1,b=2$	0.174 7	0.209 6	0.269 8	0.524 7	0.333 9	0.020 0
$a=1,b=1$	0.556 9	0.668 3	0.721 7	0.731 0	0.541 2	0.011 3
$a=4,b=1$	1.475 8	1.771 0	1.837 3	2.890 4	2.645 8	0.201 3
$a=6,b=1$	1.847 1	2.216 5	2.281 0	4.482 1	4.228 4	0.233 9
$a=10,b=1$	2.464 8	2.957 8	3.007 9	7.820 1	7.568 8	0.292 1

表 3 中线性模型与非线性模型分别取参数 $c=1,\alpha=0.2$ 和 $c=1.03,\alpha=0.1$ ，通过模拟计算可以看到 $P_1^*>E(\bar{R}(X))$ 满足再保费收取条件。$\boldsymbol{d}^*_{(1.03,0.1)}<\boldsymbol{d}^*_{(1,0.2)}$ ，$P_1^*>P^*$ ，且对于五组分布都有 $U(P_1)-U(P)>0$ 。结果说明：非线性模型可以通过降低最优自留额，适当提高再保费，来提高保险人的效用，非线性模型的最优自留额策略明显优于线性模型。同时，非线性模型还可以通过调整安全系数 α 和保费指数 c ，得出更多优于线性模型的保险策略。

最后，还应指出：非线性模型的保费指数 $c>1$ ，但不能取值太大，否则随着期望索赔额增加，再保费就会出现增加过大的情况，这显然是保险人不能接受的，所以应该控制在保险人可以接受的范围内。

4 结论

1）在一类非线性的期望保费原则下，建立了自留额计算模型，计算出最优自留额存在的方程并证明了唯一解的充分条件。

2）通过数值模拟计算，验证了非线性模型的正确性和实用性。

3）在保险人期望效用最大化的条件下，所建立的非线性期望保费模型比线性模型更符合保险决策心理，应用上更具有广泛性和灵活性，结果表明非线性模型明显优于线性模型。

参考文献：

[1] ARROW K J. *Uncertainty and the welfare economics of medical care*[J]. *American Economic Review*, 1963, 53(5): 941-973.

[2] KALUSZKA M, OKOLEWSKI A. *An extension of Arrow's result on optimal reinsurance contract*[J]. *Journal of Risk and Insurance*, 2008, 75(2): 275-288.

[3] CAI J, TAN K S, WENG C G, et al. *Optimal reinsurance under VaR and CTE risk measures*[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2008, 43(1): 185-196.

[4] BALBáS A, BALBáS B, HERAS A. *Optmal reinsurance with general risk measures*[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2009, 44(3): 374-384.

[5] 周明，陈建成，董洪斌. 风险调整资本收益率下的最优再保险策略[J]. 系统工程与实践，2010，30(11)：1931-1937.
ZHOU Ming, CHEN Jiancheng, DONG Hongbin. *Optimal reinsurance strategies under return on risk-adjusted capital rate*[J]. *Systems Engineering: Theory & Practice*, 2010, 30(11): 1931-1937.

[6] 周明，寇炜，李宏军. 基于夏普比率的最优再保险策略[J]. 数理统计与管理，2013，32(5)：910-922.
ZHOU Ming, KOU Wei, LI Hongjun. *Optimal reinsurance strategies under Sharpe ratio*[J]. *Journal of Applied Statistics and Management*, 2013, 32(5): 910-922.

[7] 邓志民. 投资影响下的再保险策略[J]. 数学杂志，2006，26(2)：171-176.
DENG Zhimin. *Reinsurance strategies under investment influence*[J]. *Journal of Mathematics*, 2006, 26(2): 171-176.

[8] 迟育涵. 凹扭曲风险度量下的最优再保险[D]. 长春：吉林大学，2015：8-24.

[9] 刘洁，赵秀兰. 保险公司的最优投资和再保险策略[J]. 模糊系统与数学，2013，27(3)：160-168.
LIU Jie, ZHAO Xiulan. *Optimal investment and reinsurance policies for insurance company*[J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 2013, 27(3): 160-168.

[10] 刘波. 超额损失再保险中最优自留额的确定[D]. 青岛：山东科技大学，2006：11-16.

[11] 颜丽华. 效用理论下的再保险研究[D]. 秦皇岛：燕山大学，2010：35-47.

[12] 刘琳. 停止损失再保险最优自留额的确定及存在性讨论[J]. 江西师范大学学报(自然科学版)，2011，33(3)：614-616.
LIU Lin. *The determination and discussion of existence of the optimal solution for stop-loss reinsurance*[J]. *Journal of Jiangxi Normal University (Natural Science)*, 2011, 33(3): 614-616.

[13] 王丙参，魏艳华，戴宁. 停止损失再保险与风险模型的有限时间破产概率[J]. 江西师范大学学报(自然科学版)，2013，37(3)：206-209.
WANG Bingcan, WEI Yanhua, DAI Ning. *The stop-loss reinsurance and the finite time ruin probability of risk model*[J]. *Journal of Jiangxi Normal University (Natural Science)*, 2013, 37(3): 206-209.

（责任编辑：傅　游）