线性正则变换在信号处理中的应用

许水清，柴　毅，冯　莉
（重庆大学 自动化学院，重庆 400044）

摘　要：线性正则变换作为 Fourier 变换和分数阶 Fourier 变换的广义形式，具有更强的灵活性，在非平稳信号处理中具有独特的优势，已经在信号处理领域引起了广泛的关注。首先阐述了线性正则变换的基本定义与性质，然后着重介绍了在信号处理中的应用，最后对当前线性正则变换在故障诊断中的应用进行了探讨。

关键词：线性正则变换；信号处理；故障诊断

中图分类号：TN929.5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-3767(2017)05-0043-09

DOI：10.16452/j.cnki.sdkjzk.2017.05.007

Application of Linear Canonical Transform in Signal Processing

XU Shuiqing, CHAI Yi, FENG Li
(College of Automation, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: As a generalization of the Fourier transform and the fraction Fourier transform, the linear canonical transform (LCT) is more flexible and has unique advantages in non-stationary signal processing. It also has received much attention in the field of signal processing. In this paper, the definition and basic properties of LCT were first expounded. Then the applications of LCT in signal processing were focused on. Finally, the application of LCT in fault diagnosis was discussed.

Key words: linear canonical transform (LCT); signal processing; fault diagnosis

线性正则变换(linear canonical transform, LCT)，又被称作为 ABCD 变换[1]、广义 Fresnel 变换[2]、扩展分数阶 Fourier 变换[3]等。相对 Fourier 变换和分数阶 Fourier 变换，LCT 具有 3 个自由参数，使得传统 Fourier 变换域和分数阶 Fourier 变换域的非带限信号可能为某个参数下 LCT 域的带限信号。并且使 LCT 可以看作时频平面上的仿射变换关系，这种关系与分数阶 Fourier 变换在时频面上的旋转关系相比，不仅包括旋转关系，还包括压缩和拉伸等关系，同时在时频平面上的总支撑域保持不变[1]。因此 LCT 具有更多的灵活性，在信号处理领域具有强大的潜力。

早在 20 世纪 70 年代，LCT 由 Monshinsky 和 Collins[1-2]分别提出，与分数阶 Fourier 变换一样，LCT 最初也是被应用到微分方程求解和光学系统中[3]。随着分数阶 Fourier 变换在信号处理领域中的广泛应用，LCT 在信号处理中的应用也逐渐引起国内外学者的重视，并在国内外顶级期刊《IEEE Transactions on Signal Processing》和《电子学报》等发表了一系列高水平论文。其中具有代表性的有：Barshan 等[4]在 1997 年首次讨论了 LCT 域的最优滤波器的设计问题；其后，Pei 等[5]从 2002 年起先后探讨了 LCT 的特征值、特征函数、二维 LCT 以及在时频分析上的应

收稿日期：2017-03-31
基金项目：国家自然科学基金重点项目(61633005)；国家自然科学基金项目(61673076，61374135)；重庆市自然科学基金项目(cstc2015jcyjA0480，cstc2016jcyjA1255)
作者简介：许水清(1991—)，男，安徽太和人，博士研究生，主要从事信号处理、故障诊断研究
柴　毅(1962—)，男，安徽芜湖人，教授，博士生导师，主要从事信息融合、故障诊断研究，本文通信作者.
E-mail：chaiyi@cqu.edu.cn

用；Hennelly，Healy 和 Ozaktas 等[6-8]从 2005 年起关注了离散 LCT 及其快速计算问题，提出了 LCT 的快速算法；而 Stern[9-10]则在 2006 年首次研究了 LCT 域信号的采样问题。

在国内，虽然对 LCT 的研究相对较晚，但许多专家学者从不同角度对 LCT 进行了深入的研究，成果各具特色。北京理工大学的陶然和李炳照等[11-12]在 2006 年首次在国内期刊上介绍了 LCT，并对 LCT 的卷积定理、框架理论和采样理论等进行了深入的研究；西安电子科技大学的魏德运等[13-15]则关注 LCT 域的多通道采样理论以及在图像超分辨率上的应用；哈尔滨工业大学的史军等[16-18]关注 LCT 域不确定性原理和不受带宽限制的采样定理等；电子科技大学的向强等[19-20]主要研究 LCT 与模糊函数、Winger 分布等时频分布之间的关系；四川大学的张志超等[21-22]主要研究基于 LCT 域的新的时频分布，如 LCT 域模糊函数、Gabor 变换等。此外，徐冠雷[23]、赵辉[24-25]、柴毅[26-30]等知名学者也在各自的研究成果中体现对 LCT 的重视和探索。

国内外专家学者的研究成果极大地推动了 LCT 理论体系的发展与完善，展现了 LCT 在信号处理领域强大的作用与潜力。在此基础上，以 LCT 在信号处理领域的应用为主线，阐述 LCT 的基本性质、LCT 域算子与变换、离散 LCT 及其快速算法等一系列最新理论成果，描述了 LCT 在信号处理中的国内外最新研究进展，探讨 LCT 目前存在的问题，展望未来的研究热点与难点。

1 线性正则变换

1.1 线性正则变换的定义

信号 $f(t)$ 以实数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 为参数变量的 LCT 定义[1-2]为：

$$F_A(u)=L_A[f(t)](u)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)K_A(t,u)\mathrm{d}t, b\neq 0 \\ \sqrt{d}e^{j\frac{cd}{2}u^2}f(du), b=0\end{cases}。\tag{1}$$

式中，$K_A(t,u)=C_A e^{j(\frac{d}{2b}u^2-\frac{ut}{b}+\frac{a}{2b}t^2)}$，$C_A=\frac{1}{\sqrt{j2\pi b}}$ 并且满足 $ad-bc=1$，$F_A[\cdot]$ 和 $L_A[\cdot]$ 表示参数为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的 LCT 算子。并且由定义知，当参数 $b=0$ 时，LCT 将退化为一个简单的 Chirp 乘积形式。除非特别声明，本研究只考虑 $b\neq 0$ 的情况。

LCT 的逆变换(inverse linear canonical transform，ILCT)[1]可表示为 $F_A(u)$ 以 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ 为参数变量的 LCT，即：

$$f(t)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty} F_A(u)K_{A^{-1}}(t,u)\mathrm{d}t, b\neq 0 \\ \sqrt{a}e^{-j\frac{ca}{2}t^2}f(at), b=0\end{cases}。\tag{2}$$

式中 $K_{A^{-1}}(t,u)=\sqrt{\frac{1}{-j2\pi b}}e^{j(\frac{-d}{2b}u^2+\frac{ut}{b}-\frac{a}{2b}t^2)}$，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 为参数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵。

当式(1)中参数变量 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ 时，LCT 变为分数阶 Fourier 变换。如果进一步令 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，则 LCT 变为 Fourier 变换，因此 Fourier 变换和分数阶 Fourier 变换都是 LCT 的特殊形式。同时从式(2)可以看出，信号 $f(t)$ 可以表示为 u 域上的一组正交 chirp 基的线性组合，这里 u 域称为 LCT 域。由于 Fourier 变换和分数阶 Fourier 变换是 LCT 的特殊形式，因此 LCT 域可以看作时域、频域和分数阶 Fourier 域的统一，并且同时包含了信号在时域和频域的信息，可以看成一种新的时频分析方法[5]。

1.2 线性正则域算子与变换

LCT 作为一个统一的时频分析工具，其在时频平面上的仿射变换具有强大的灵活性。因此许多专家学者定义了一些有用的 LCT 域算子与变换，为 LCT 域信号的分析与处理提供了有力支撑。

LCT 域算子是指在 LCT 体系下的信号分析运算算子，如 LCT 域卷积与相关等。卷积和相关是两个重要的基础概念，已经在传统 Fourier 域信号处理系统、图像处理以及模式识别等领域得到了广泛的应用与研究。作为传统 Fourier 变换的进一步推广，文献[31]根据 LCT 与 Fourier 变换的关系提出了 LCT 域卷积定理。除了这种 LCT 域卷积与相关算子，许多学者从不同的角度提出了不同形式的 LCT 域卷积与相关算子[15,32-33]。

LCT 域变换是指在 LCT 基础上得到的新的信号分析工具，主要是传统 Fourier 体系下的信号分析工具扩展到 LCT 域。目前许多专家学者从不同的角度研究了 LCT 域 Hilbert 变换[34]、LCT 域 Winger 分布[35]、LCT 域模糊函数[36]、LCT 域正弦与余弦变换[37]、LCT 域哈利特变换[37]、LCT 域 Gabor 变换[38]、LCT 域小波包变换[39]以及短时 LCT[40]等，这些变换丰富了 LCT 的理论体系并提供了新的信号处理与分析方法，在信号处理中具有重要的应用。

1.3 离散线性正则变换与快速算法

离散化方法和快速算法是 LCT 能否在实际工程广泛应用的关键。由 LCT 的定义可知，相比传统的 Fourier 变换，LCT 具有 3 个自由参数，更加灵活同时也更加复杂，这给 LCT 的离散化方法和快速算法的带来了具大的挑战性与困难，一直是 LCT 研究领域的热点与难点。

理想的离散线性正则变换不仅能够保留连续 LCT 的性质，还应该具有较低的计算复杂度。类似离散 Fourier 变换的思想和方法，文献[41]首先通过对连续信号进行采样得到采样信号，对采样信号进行 LCT 变换，定义了离散线性正则变换。这种离散化算法虽然是最简单的，但却丢失了 LCT 的酉变换性质。为了弥补以上不足，文献[42]首先对输入输出信号进行采样，并通过限定输入输出采样间隔来获得新的离散线性正则变换。除了以上两种采样型离散线性正则变换外，Oktem 等[8]提出一种与信号采样周期无关的离散线性正则变换，这种定义形式下的离散线性正则变换在不知道连续信号的采样间隔的情况下具有一定的优势。

在实际工程应用中，低运算量的快速算法是一个变换方法在实际工程中广泛应用的关键。正如快速 Fourier 变换极大地推动了 Fourier 变换在工程中的应用一样，LCT 的快速算法将是 LCT 在实际工程领域成功应用的关键。由 LCT 的定义可知，一个长度为 N 的离散序列，直接积分计算的算法复杂度为 $O(N^2)$，而不是类似快速 Fourier 变换算法的 $O(N\log N)$，给 LCT 在实际工程中的广泛应用带来巨大的挑战。近年来，国内外学者提出了多种 LCT 的快速算法，主要有基于离散线性正则变换的快速算法[43]、分解型快速算法[44-45]、混合型快速算法[46]。除了以上三种类型的快速算法，还有基于特征函数的快速算法[47]、基于 Hermite 多项式的快速算法[48]等。这些数值计算方法给 LCT 的快速算法提供了新的思路，为 LCT 在实际工程中的广泛应用提供了基础。

2 线性正则变换在信号处理中的应用

近年来，LCT 理论体系得到不断完善，在信号处理中的应用也逐渐展开。然而由于 LCT 的研究尚处于起步阶段，LCT 在信号处理中的应用还没有分数阶 Fourier 变换那么广泛。目前，LCT 已经被应用在信号处理、光学、解微分方程等领域(图 1)，本文主要介绍 LCT 在采样、滤波、信号检测、时频分析等信号处理中的应用。

1) 信号调制

在传统信号处理中，信号的调制是建立在 Fourier 变换的基础上，但当信号在频域为非带限信号，而在 LCT 域为带限信号时，利用 LCT 进行信号调制往往能够取得更理想的效果。文献[5]介绍了线性正则域信号的调制过程，首先选取合适的 LCT 参数 (a,b,c,d)，使输入信号 $g_n(t)$ 为线性正则域带限信号。其次，对输入信号作参数为 $(-c,-d,a,b)$ 的线性正则变换，得到 $f_n(t)$。最后利用传统的调制方法对 $f_n(t)$ 进行调制，得到对输入信号 $g_n(t)$ 的调制。这种基于 LCT 的信号调制过程，对非平稳信号的调制有独特优势，尤其是对雷达信号和声信号。此外，当输入信号为实信号时，调制过程还可以利用 LCT 域 Hilbert 变换来产生 LCT 域解析信号节省带宽，有利于信号的快速传输[49]。

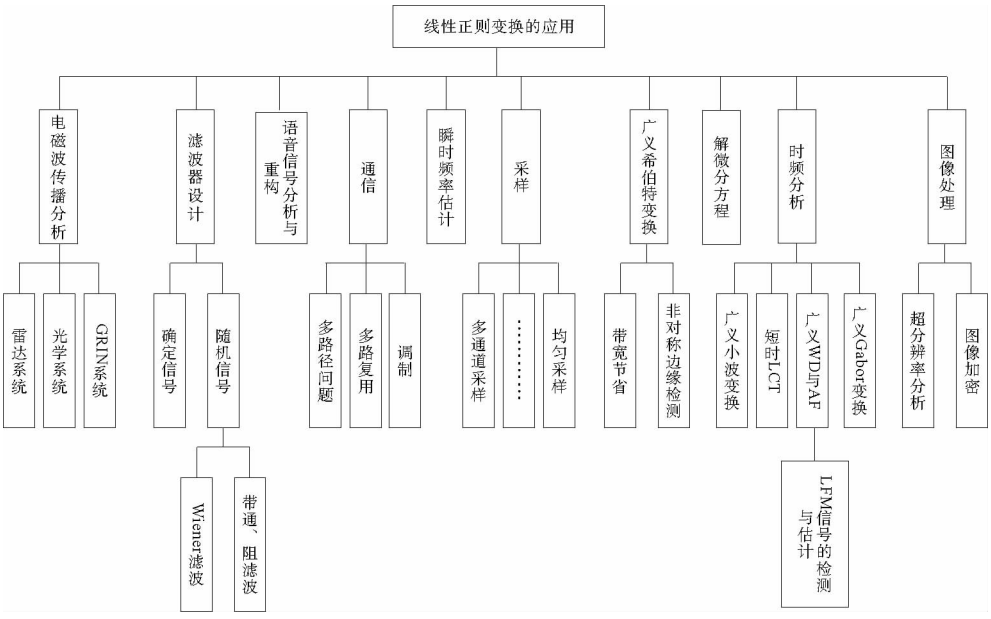

图 1　线性正则变换的应用

Fig. 1　The applications of LCT

2）瞬时频率估计

信号的瞬时频率估计是现代信号处理中的一个基本问题，在通信、雷达和生物医学等领域起着重要的作用，尤其是非平稳信号的瞬时频率估计一直是研究的热点与难点。文献[50]根据 LCT 在非平稳信号分析与处理方面的独特优势，提出利用 LCT 的功率谱和和信号的相位倒数来估计信号的瞬时频率，获得了以下瞬时频率估计公式：

$$f_{\mathrm{IF}}(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{M-N}{2|f(t)|^2 tb(a+d)}-\frac{a-d}{2b}t\right)。\tag{3}$$

其中：$\varphi(t)$ 为信号 $f(t)$ 的相位，$M=|L_{A^{-1}}[L_A(f(t))(u)u](t)|^2$，$N=|L_A[L_{A^{-1}}(f(t))(u)u](t)|^2$。在此基础上，通过对含噪声和不含噪声两种信号进行瞬时频率估计，验证了基于 LCT 的瞬时频率估计方法的有效性。并且此方法相对传统的瞬时频率估计方法不需要迭代过程、计算复杂度较小、准确性高，为实际工程应用中的信号瞬时频率估计提供了新的方法。此外，文献[35-36]等还利用 LCT 域 Wigner 分布与模糊函数对线性调频信号和二次调频信号的频率进行了检测与估计。

3）线性正则域滤波

作为传统乘性滤波器的进一步推广，文献[31]首先根据 LCT 域卷积理论，得到 LCT 域乘性滤波器，滤波器输出为：

$$m_{\mathrm{out}}(t)=L_{A^{-1}}[L_A(m_{\mathrm{in}}(t))\cdot H_A(u)]。\tag{4}$$

这里 $H_A(u)$ 为滤波器的传递函数，当设计不同的 $H_A(u)$ 时，可以获得不同形式的滤波器，如带通、带阻等。文献[31]进一步介绍了 LCT 域乘性滤波器能够解决一些传统滤波器不能解决的问题，例如输入信号 $m_{\mathrm{in}}(t)=s(t)+n_1(t)+n_2(t)$，$n_1(t)$ 和 $n_2(t)$ 为噪声，其时频分布如图 2 所示。

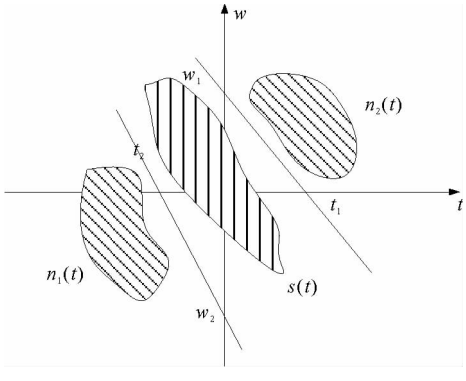

图 2　输入信号的时频分布

Fig. 2　Time-frequency distribution of input signal

由其时频分布可以看出，$s(t)$ 和噪声在时频面上存在耦合，传统的时频方法不能够将信号很好的分离出来，而由 LCT 与时频分布之间的关系知，可以利用改变 LCT 的参数来实现时频平面的分割，即通过两个参数分别为 $a_1/b_1=w_1/t_1$，$a_2/b_2=w_2/t_2$ 的 LCT 域滤波就可以完全去

掉噪声，获得原信号 $s(t)$ 。文献[32]等基于不同的 LCT 域卷积定义，也研究了 LCT 域乘性滤波，其实质是一样的。

文献[51]则提出了最小均方误差准则下的 LCT 域 Wiener 滤波，假设输入信号 $x(t)=s(t)+n(t)$ ，令式(4)中的传递函数为

$$H_A(u)=R_{S,X}(u,u)/R_{X,X}(v,v)\text{。} \tag{5}$$

其中：

$$\begin{aligned} R_{S,X}(u,u)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_A(u,t)K_A^*(u,\sigma)R_{sx}(t,\sigma)\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma \\ R_{X,X}(u,u)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K_A(u,t)K_A^*(u,\sigma)R_{xx}(t,\sigma)\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma\text{。} \end{aligned} \tag{6}$$

$R_{sx}(t,\sigma)$ 为 $s(t)$ 和 $x(t)$ 的互相关函数，$R_{xx}(t,\sigma)$ 为 $x(t)$ 的自相关函数。其思想是通过计算最小均方误差来确定最佳的参数 A ，然后代入式(5)获得 LCT 域 Wiener 滤波的传递函数。由于 LCT 域 Wiener 滤波是从信号的相关函数出发获得的，具有更广泛的普适性。此外，文献[52]等也进一步讨论了 LCT 域多通道滤波器和双通道仿酉滤波器的设计问题，并通过实验证明了基于 LCT 的滤波器在信号分离与滤波方面的优越性。

4）在雷达中的应用

根据 LCT 在处理非平稳信号上的优势，文献[53]介绍了 LCT 在雷达系统中的应用，首先假设两个球盘 A 和 B 之间的距离为 D ，其半径和区域分布函数分别是 R_A ，R_B 和 $F_A(x,y)$ ，$F_B(s,h)$ 。然后根据雷达的性质，可以得到 $F_A(x,y)$ 和 $F_B(s,h)$ 之间的关系为：

$$F_B(k,h)=e^{j2\pi D\lambda^{-1}}O_{Sx}^{(R_A,R_B,D)}(O_{Sy}^{(R_A,R_B,D)}(F_A(x,y)))\text{。} \tag{7}$$

其中

$$O_{Sx}^{(R_A,R_B,D)}(f(x))=\sqrt{\frac{j}{\lambda D}}e^{(-\frac{j\pi}{\lambda}(R_B^{-1}+D^{-1})s^2)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{(-\frac{j2\pi}{\lambda D}sx+\frac{j\pi}{\lambda}(R_A^{-1}-D^{-1})s^2)}f(x)\mathrm{d}x\text{。} \tag{8}$$

由上知可以把 $O_{Sx}^{(R_A,R_B,D)}(f(x))$ 看成如下的 LCT，即：

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-R_A^{-1}D & -D/k \\ k(R_A^{-1}-R_B^{-1}+R_A^{-1}R_B^{-1}D) & 1+R_B^{-1}D \end{bmatrix}\text{。} \tag{9}$$

并且 $O_{Sy}^{(R_A,R_B,D)}(f(y))$ 与 $O_{Sx}^{(R_A,R_B,D)}(f(x))$ 具有相同的形式，因此可以利用 LCT 建立雷达系统模型。文献[54]则根据雷达信号的 Chirp 特性和 LCT 在处理 Chirp 信号优势，提出一种基于 LCT 的快速雷达信号处理算法。由于 LCT 在处理非平稳信号、尤其是 Chirp 类信号时具有独特的魅力，因此 LCT 在雷达中的应用必将引起更多的重视。

5）图像处理

LCT 在图像处理方面的应用主要包括图像的水印与加密、空间移变模式识别和非对称模式识别[5]。分数阶 Fourier 变换已经广泛应用到图像加密中，由于 LCT 具有 4 个参数，因此利用 LCT 做图像加密比分数阶 Fourier 变换更有优势，安全度更高。文献[5]提出了一种基于 LCT 的图像加密算法（如图 3 所示）。

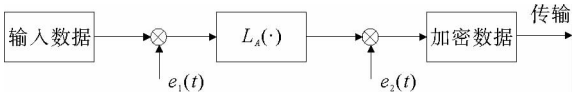

图 3　基于 LCT 的图像加密过程

Fig. 3　Image encryption based on LCT

首先对原始图像数据乘以密钥 $e_1(t)$ ，然后对获得的数据做 LCT，其次把得到的 LCT 在乘以密钥 $e_2(t)$ 来完成加密。解密的过程与加密的过程相反，必须知道 $e_1(t)$ ，$e_2(t)$ 和 LCT 的参数才能完成解密过程。由

于 LCT 相比分数阶 Fourier 变换和 Fourier 变换，具有更多的参数，因此这种加密算法具有更高安全度的加密效果。在上述基本加密算法基础上，文献进一步提出级联多个 LCT，使用不同的 LCT 参数等许多不同的加密算法。类似图像的加密过程，文献[55]提出了一种基于 LCT 的数字水印算法以更好地提高水印算法的安全性和增加水印的容量。除了在图像加密与水印上的应用，文献[56]等分别进一步研究了把 LCT 域相关应用到空间移变模式识别和利用 LCT 域 Hilbert 变换进行非对称边缘检测，并通过一系列仿真实验验证了 LCT 在图像处理上的优势。

6）语音信号分析

语音信号具有非平稳性，其频率是不断发生变化的。常见的语音信号模型有正弦信号模型、Chirp 信号模型、AM-FM 模型等[57]。由于 LCT 具有 3 个自由参数，在处理非平稳信号上具有独特优势，文献[57]在多分量 AM-FM 的语音信号模型的基础上，提出基于 LCT 的两种语音信号分析与重构方法。第一种方法是根据 AM-FM 语音信号模型中的语音信号与干扰的 Gauss 信号在线性正则域具有不同的能量聚集性质，设计合理的 LCT 域滤波器滤掉大部分噪声能量，随后利用 LCT 的逆变换恢复原始语音信号，实现语音信号的去噪。第二种方法是根据 AM-FM 的语音信号模型具有多分量 Chirp 模型的形式，在多分量 Chirp 模型的检测和参数估计中，为了避免强 Chirp 分量对弱 Chirp 分量的干扰，首先设置一个门限，利用拟牛顿方法进行思维峰值搜索来获得最大峰值点的记录值。然后可以利用单分量 AM-FM 模型的检测和参数估计方法检测估计出最强 Chirp 分量，这样 AM-FM 模型中的第一强分量能够被重构出来，其后在 LCT 域设计一个自适应滤波器来滤除最强 Chirp 分量，并利用 LCT 的逆变换获得 AM-FM 模型中的第二强分量，重复以上过程直到检测出的分量低于设置的门限值，恢复原始语音信号。在这两种方法的基础上，文献进一步通过仿真和真实语音信号实验验证了基于 LCT 的语音信号分析与重构方法比传统的 ML 方法、PPT 方法和 Dechirp 方法具有更好的效果。

7）在故障诊断上的应用

基于信号处理技术的故障诊断主要是对系统中测得的各种信号进行分析和处理，提取与故障相关的时域特征和频域特征，进行故障诊断[58-59]。LCT 作为一种新颖的信号分析工具，在非平稳信号的特征提取中具有独特优势。因此可以通过对信号的 LCT 域频谱进行谱分析来诊断故障。例如当异步电机发生故障时，其输出的故障谐波往往是非平稳信号，利用 LCT 在非平稳信号处理上的优势，提出如图 4 所示的异步电机故障诊断系统，为异步电机的故障诊断提供新的思路。

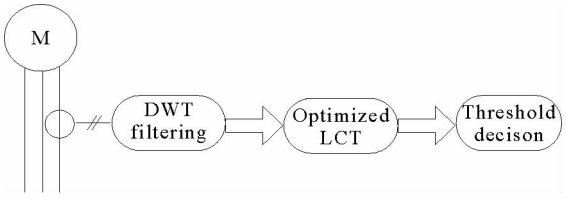

图 4　电机电流特征分析诊断系统

Fig. 4　Motor current signature analysis diagnostic system

除了以上介绍的应用，LCT 还在采样时刻未知的信号重构、通信系统、GRIN 系统等方面具有广泛的应用。例如文献[60]介绍了利用 LCT 级数来重构采样时刻未知的信号、尤其是非平稳、非 Gauss 类采样信号；文献[11]介绍了 LCT 应用于通信信号抗多径效应，能够实现通信领域当中采用传统频域处理不能很好完成的任务。

3　结束语

作为 Fourier 变换和分数阶 Fourier 变换的进一步推广形式，LCT 具有 3 个自由参数、灵活性更强，在非平稳信号的分析上具有独特的优势，引起了国内外众多专家学者的关注。本文主要介绍线性正则变换在信号处理中的应用，然而由于线性正则变换的研究起步较晚，线性正则变换在信号分析中的应用还有待进一步研究。例如可以利用线性正则变换与时频分析工具相结合来更加精细刻画故障信号，从而对故障信号进行

特征提取,为故障诊断提供新的思路。

参考文献:

[1]BERNARDO L M. ABCD matrix formalism of fractional Fourier optics[J]. Optical Engineering,1996,35(3):732-740.

[2]JAMES D F V,AGARWAL G S. The generalized Fresnel transform and its application to optics[J]. Optics Communications,1996,126(4/5/6):207-212.

[3]HUA J,LIU L,LI G. Extended fractional Fourier transforms[J]. Journal of the Optical Society of America A,1997,14(14):3316-3322.

[4]BARSHAN B,KUTAY M A,OZAKTAS H M. Optimal filtering with linear canonical transformations[J]. Optics Communications,1997,135(1/2/3):32-36.

[5]DING J J,PEI S C. Linear canonical transform[J]. Advances in Imaging & Electron Physics,2014,186:39-99.

[6]HENNELLY B M,SHERIDAN J T. Fast numerical algorithm for the linear canonical transform[J]. Journal of the Optical Society of America A Optics Image Science & Vision,2005,22(5):928-37.

[7]HEALY J J,SHERIDAN J T. Fast linear canonical transforms[J]. Journal of the Optical Society of America A Optics Image Science & Vision,2010,27(1):21-30.

[8]OKTEM F S,OZAKTAS H M. Exact relation between continuous and discrete linear canonical transforms[J]. IEEE Signal Processing Letters,2009,16(8):727-730.

[9]STERN A. Why is the linear canonical transform so little known? [C]//AIP Conference Proceedings,2006:225-234.

[10]STERN A. Sampling of linear canonical transformed signals[J]. Signal Processing,2006,86(7):1421-1425.

[11]邓兵,陶然. 线性正则变换及其应用[J]. 兵工学报,2006,27(4):665-670.
DENG Bing,TAO Ran. Linear canonical transform and its implication[J]. Acta Armamentarii,2006,27(4):665-670.

[12]LI Y,ZHANG F,LI Y,et al. Application of linear canonical transform correlation for detection of linear frequency modulated signals[J]. IET Signal Processing,2016,10(4):351-358.

[13]WEI D,LI Y. Reconstruction of multidimensional bandlimited signals from multichannel samples in linear canonical transform domain[J]. IET Signal Processing,2014,8(6):647-657.

[14]WEI D,LI Y M. The dual extensions of sampling and series expansion theorems for the linear canonical transform[J]. Optik-International Journal for Light and Electron Optics,2015,126(24):5163-5167.

[15]WEI D,RAN Q,LI Y. A Convolution and correlation theorem for the linear canonical transform and its application[J]. Circuits Systems & Signal Processing,2012,31(1):301-312.

[16]SHI J,LIU X,ZHANG Q,et al. Sampling theorems in function spaces for frames associated with linear canonical transform [J]. Signal Processing,2014,98(5):88-95.

[17]LIU X,SHI J,SHA X,et al. Sampling expansion in function spaces associated with the linear canonical transform[J]. Signal Image & Video Processing,2014,8(1):143-148.

[18]SHI J,HAN M,ZHANG N. Uncertainty principles for discrete signals associated with the fractional Fourier and linear canonical transforms[J]. Signal Image & Video Processing,2016,10(8):1519-1525.

[19]XIANG Q,QIN K Y. Convolution,correlation,and sampling theorems for the offset linear canonical transform[J]. Signal Image & Video Processing,2012,8(3):433-442.

[20]XIANG Q,QIN K Y,HUANG Q Z. Multichannel sampling of signals band-limited in offset linear canonical transform domains[J]. Circuits Systems & Signal Processing,2013,32(5):2385-2406.

[21]ZHANG Z C. New Wigner distribution and ambiguity function based on the generalized translation in the linear canonical transform domain[J]. Signal Processing,2016,118(C):51-61.

[22]ZHANG Z C. Novel Wigner distribution and ambiguity function associated with the linear canonical transform[J]. Optik-International Journal for Light and Electron Optics,2016,127(12):4995-5012

[23]XU G,WANG X,XU X. On uncertainty principle for the linear canonical transform of complex signals[J]. IEEE Transactions on Signal Processing,2010,58(9):4916-4918.

[24]ZHAO H,WANG R,SONG D,et al. Extrapolation of discrete bandlimited signals in linear canonical transform domain[J]. Signal Processing,2014,94(1):212-218.

[25]ZHAO H,WANG R,SONG D. Recovery of bandlimited signals in linear canonical transform domain from noisy samples [J]. Circuits Systems & Signal Processing,2014,33(6):1997-2008.

[26]HUANG L,ZHANG K,CHAI Y,et al. Uncertainty principle and orthogonal condition for the short-time linear canonical transform[J]. Signal Image & Video Processing,2016,10(6):1-5.

[27]XU S,CHAI Y,HU Y. Spectral analysis of sampled band-limited signals in the offset linear canonical transform domain [J]. Circuits Systems & Signal Processing,2015,34(12):3979-3997.

[28]XU S,CHAI Y,HU Y,et al. Reconstruction of digital spectrum from periodic nonuniformly sampled signals in offset linear canonical transform domain[J]. Optics Communications,2015,348:59-65.

[29]XU S,CHAI Y,HU Y,et al. The analysis of decimation and interpolation in the linear canonical transform domain[J]. Springerplus,2016,5(1):1795.

[30]XU S,CHAI Y,HU Y,et al. The properties of generalized offset linear canonical Hilbert transform and its applications[J]. International Journal of Wavelets,Multiresolution and Information Processing,2017,DOI:http://dx. doi. org/10. 1142/S021969131750031X.

[31]DENG B,TAO R,WANG Y. Convolution theorems for the linear canonical transform and their applications[J]. Science in China,2006,49(5):592-603.

[32]WEI D,RAN Q,LI Y,et al. A convolution and product theorem for the linear canonical transform[J]. IEEE Signal Processing Letters,2009,16(10):853-856.

[33]ZHANG Z C. New convolution and product theorem for the linear canonical transform and its applications[J]. Optik-International Journal for Light and Electron Optics,2016,127(11):4894-4902.

[34]FU Y,LI L. Generalized analytic signal associated with linear canonical transform[J]. Optics Communications,2008,281(6):1468-1472.

[35]BAI R F,LI B Z,CHENG Q Y. Wigner-ville distribution associated with the linear canonical transform[J]. Journal of Applied Mathematics,2012,2012(10):1-9.

[36]TAO R,SONG Y E,WANG Z J,et al. Ambiguity function based on the linear canonical transform[J]. IET Signal Processing,2012,6(6):568-576.

[37]PEI S C,DING J J. Fractional,canonical,and simplified fractional cosine,sine and Hartley transforms[J]. IEEE Transactions on Signal Processing,2002,50(7):1661-1680.

[38]WEI D,LI Y M. Generalized Gabor expansion associated with linear canonical transform series[J]. Optik-International Journal for Light and Electron Optics,2014,125(16):4394-4397.

[39]WEI D,LI Y M. Generalized wavelet transform based on the convolution operator in the linear canonical transform domain [J]. Optik-International Journal for Light and Electron Optics,2014,125(16):4491-4496.

[40]KOU K I,XU R H. Windowed linear canonical transform and its applications[J]. Signal Processing,2012,92(1):179-188.

[41]ZHAO J,TAO R,WANG Y. Sampling rate conversion for linear canonical transform. [J]. Signal Processing,2008,88(11):2825-2832.

[42]PEI S C,DING J J. Closed-form discrete fractional and affine Fourier transforms[J]. IEEE Transactions on Signal Processing,2000,48(5):1338-1353.

[43]KOC A,OZAKTAS H M,CANDAN C,et al. Digital computation of linear canonical transforms[J]. IEEE Transactions on Signal Processing,2008,56(6):2383-2394.

[44]HENNELLY B M,SHERIDAN J T. Generalizing,optimizing,and inventing numerical algorithms for the fractional Fourier,Fresnel,and linear canonical transforms[J]. Journal of the Optical Society of America A,2005,22(5):917-27.

[45]KOC A,OZAKTAS H M,HESSELINK L. Fast and accurate algorithm for the computation of complex linear canonical transforms[J]. Journal of the Optical Society of America A Optics Image Science and Vision 2010,27(9):1896-1908.

[46]HEALY J J,KUTAY M A,et al. Linear canonical transforms-theory and applications[M]. New York:Springer New York,2016.

[47]ZHANG W L,LI B Z,CHENG Q Y. A new discretization algorithm of linear canonical transform[J]. Procedia Engineering,2012,29(4):930-934.

[48]CAMPOS R G,FIGUEROA J. A fast algorithm for the linear canonical transform[J]. Signal Processing,2009,91(6):1444-1447.

[49]PEI S C,DING J J. Saving the bandwidth in the fractional domain by generalized Hilbert transform pair relations[C]//International Symposium on Circuits and Systems. 2003:89-92.

[50]XU X N,LI B Z,MA X L. Instantaneous frequency estimation based on the linear canonical transform [J]. Journal of the Franklin Institute,2012,349(10):3185-3193.

[51]SCHARF L L,THOMAS J K. Wiener filters in canonical coordinates for transform coding,filtering,and quantizing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing,1998,46(3):647-654.

[52]FAN S S,LI B Z,XU T Z. A two-channel perfect reconstruction filter bank associated with the linear canonical transform [J]. International Journal of Electronics Letters,2014,2(2):72-82.

[53]PELLAT-FINET P,BONNET G. Fractional order Fourier transform and Fourier optics[J]. Optics Communications,1994,111(1/2):141-154.

[54]YU Y X,WANG C Y,CHEN Y,et al. A fast algorithm of linear canonical transformation for radar signal processing system[J]. Advanced Materials Research,2014,1049:1245-1248.

[55]SINGH N,SINHA A. Chaos based multiple image encryption using multiple canonical transforms[J]. Optics & Laser Technology,2010,42(5):724-731.

[56]PEI S C,DING J J. The generalized radial Hilbert transform and its applications to 2D edge detection (any direction or specified directions)[C]//IEEE International Conference on Acoustics,Speech and Signal Processing,2003:357-360.

[57]QIU W,LI B Z,LI X W. Speech recovery based on the linear canonical transform [J]. Speech Communication,2013,55(1):40-50.

[58]BROWNING J. Approximating signals from nonuniform continuous time samples at unknown locations[J]. IEEE Transactions on Signal Processing,2007,55(4):1549-1554.

[59]荆双喜,华伟. 基于小波-支持向量机的齿轮故障诊断研究[J]. 山东科技大学学报(自然科学版),2008,27(4):31-36.
JIN Shuangxi,HUA Wei. Study on the gear fault diagnosis based on wavelet-support vector machine[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology(Natural Science),2008,27(4):31-36.

[60]程学珍,林晓晓,朱春华,等. 基于加权模糊 Petri 网的电网分层故障诊断方法[J]. 山东科技大学学报(自然科学版),2017,36(1):86-93.
CHENG Xuezhen,LIN Xiaoxiao,ZHU Chunhua,et al. Hierarchy fault diagnosis method for power system based on weighted fuzzy petri net[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology(Natural Science),2017,36(1):86-93.

(责任编辑:吕海亮)