计及剪切变形的复合材料薄壁梁的阻尼分析模型

任勇生，朱　帅，张玉环，田继爽
（山东科技大学 机械电子工程学院，山东 青岛 266590）

摘　要：为精确描述阻尼对复合材料薄壁结构动力学特性的影响，提出一个计及剪切变形的复合材料薄壁梁的结构阻尼分析模型。基于改进的变分渐进法（VAM）描述复合材料薄壁梁的位移和应变，采用 Hamilton 原理导出 Timoshenko 梁的自由振动偏微分方程，采用 Galerkin 法将偏微分方程化为常微分方程，通过求解复特征值问题得到梁的模态阻尼。将阻尼计算结果与现有文献的有限元阻尼计算结果进行比对，验证了本文模型的有效性。通过算例分析得到圆截面薄壁复合材料梁的阻尼数值计算结果。研究表明，不考虑剪切变形将会得到偏高的阻尼预测结果。此外，采用的铺层方式不同，产生最大阻尼的纤维铺层角也将有所不同。

关键词：模态阻尼；复合材料薄壁梁；剪切变形；伽辽金法；纤维铺层角

中图分类号：TK83　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-3767(2017)05-0097-10

DOI：10.16452/j.cnki.sdkjzk.2017.05.014

Analytic Model of Modal Damping for Thin-walled Composite Beams with Shear Deformation

REN Yongsheng, ZHU Shuai, ZHANG Yuhuan, TIAN Jishuang
(College of Mechanical and Electronic Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

Abstract: In order to accurately predict the effect of damping on the dynamical behavior of composite thin-walled beams, this paper presents an analytic model of modal damping for thin-walled composite beams with shear deformation. The displacement and strain of the beams were firstly described by using a modified variational asymptotically method (VAM) and the partial differential equations of Timoshenko beam's free motion were derived by using Hamilton's principle. Then the partial differential equations were transformed into ordinary differential equations by using Galerkin method and the modal damping was obtained by solving the complex eigenvalues of the system. The effectiveness of the model was verified by comparing the damping computation results with those available in current literature and the numerical results of damping were presented for circular cross-section composite thin-walled beams by analysis of examples. The study shows that higher damping will be predicted without taking shear deformation into consideration and that different laminate configurations yield different fiber laminate angles for the largest damping.

Key words: modal damping; composite thin-walled beam; shear deformation; Galerkin method; fiber orientation

复合材料在风力机和汽车部件的轻量化设计中有着广阔的应用前景[1-2]，而性能优良的风力机叶片和汽车传动轴通常具有复合材料薄壁梁或轴的结构形式[3-4]，建立精确的复合材料薄壁结构的阻尼预测模型，对于揭示阻尼对复合材料薄壁结构动力学特性的作用机理和影响规律，具有重要的指导意义。

为研究复合材料薄壁结构的阻尼，人们采用不同理论与计算方法进行结构动力学建模。Suresh 等[5]基

收稿日期：2017-01-07
基金项目：国家自然科学基金项目(11272190)；山东科技大学研究生科技创新基金项目(SDKDYC170220)
作者简介：任勇生(1956—)，男，山西太原人，教授，博士生导师，主要从事机械系统动力学、非线性振动、复合材料力学、振动控制的研究. E-mail：renys@sdust.edu.cn

于经典层合薄板有限单元法对复合材料薄壁箱形梁进行离散化，采用弹性-黏弹性对应原理对复合材料阻尼进行描述。Saravanos 等[6]建立了一个复合材料空心梁的阻尼分析有限元模型。Chortis 等[7]研究了弹性耦合对复合材料阻尼的影响。任勇生等[8]基于变分渐进法(variational asymptotically method，VAM)[9]复合材料薄壁梁理论，考虑了扭转翘曲、轴向拉伸和横向弯曲翘曲等耦合变形的影响，建立了复合材料薄壁梁的结构阻尼分析模型。

迄今为止，基于传统的 VAM 复合材料薄壁梁理论的振动特性研究，绝大多数均未考虑横向剪切效应[8, 10-11]。为更准确地揭示复合材料薄壁梁的动力学和阻尼特性，将横向剪切变形引入传统的 VAM 复合材料薄壁梁理论显得尤为重要。为此，任勇生等[12]以旋转复合材料薄壁梁为研究对象，通过考虑横向剪切变形，对传统的 VAM 的复合材料薄壁梁理论进行改进，建立了具有剪切变形的旋转复合材料薄壁梁的动力学模型，研究了剪切变形对旋转复合材料薄壁梁的固有振动特性的影响。

本文在现有工作基础上，进一步提出具有剪切变形的复合材料薄壁梁的结构阻尼分析模型。采用改进的 VAM[12]复合材料薄壁梁理论描述结构的位移和应变，分别导出薄壁梁的应变能、耗散能和动能表达式。基于 Hamilton 原理建立 Timoshenko 梁的运动方程。联合采用 Galerkin 法和复特征值法确定复合材料薄壁梁的模态阻尼。并将阻尼预测结果与现有文献的有限元计算结果[6]以及不计剪切变形的阻尼计算结果进行对比，验证了本文模型的正确性。采用本文模型与方法获得两端固支、简支和悬臂圆形截面复合材料薄壁梁，在两种不同截面铺层方式下的阻尼计算结果，揭示了纤维铺层角、铺层方式、边界条件、薄壁梁长径比以及剪切变形对阻尼性能的影响。

1 薄壁梁动力学模型

1.1 位移场和应变场

基于改进的 VAM 复合材料薄壁梁理论[10]描述位移场和应变场。复合材料薄壁梁如图 1 所示，其中 L、h 和 r 分别表示梁的长、壁厚和中面曲率半径。取下列坐标系：整体坐标系 (x,y,z)，原点在梁的固定端；局部坐标系 (x,s,ξ)，s 指向梁中面切线方向，逆时针为正，ξ 指向梁中面法线方向，局部坐标系和横截面如图 2 所示。

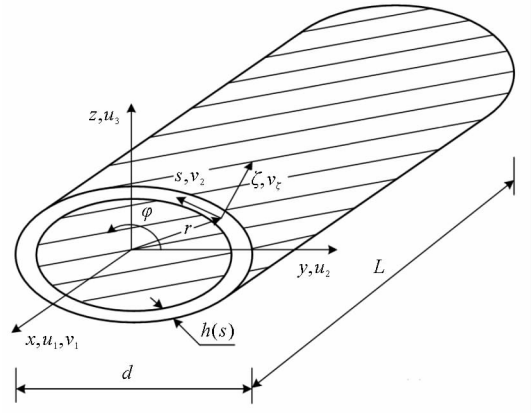

图 1 坐标系与薄壁梁

Fig. 1 Schematic of the thin-walled beam and coordinate systems

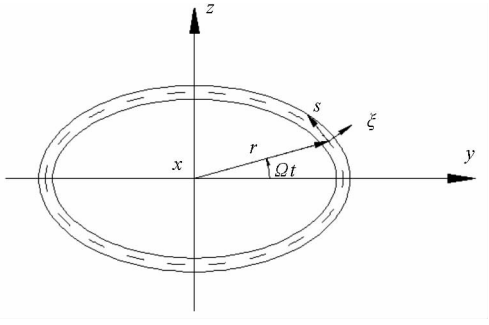

图 2 局部坐标系与横截面

Fig. 2 Partial coordinates systems and cross section

薄壁梁的位移场为[12]

$$
\begin{aligned}
u_1(x,y,z,t)&=U_1(x,t)-y(s)\theta_y(x,t)-z(s)\theta_z(x,t)+g(s,x,t),\\
u_2(x,y,z,t)&=U_2(x,t)-z\varphi(x,t),\\
u_3(x,y,z,t)&=U_3(x,t)+y\varphi(x,t),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其中：$U_1(x,t)$，$U_2(x,t)$，$U_3(x,t)$为横截面沿 x，y，z 的刚体位移；$\theta_y(x,t)$，$\theta_z(x,t)$，$\phi(x,t)$为横截面绕 y、z 和 x 轴的转角。$g(s,x,t)$为薄壁梁的翘曲函数，表示如下：

$$g(s,x,t)=G(s)\phi'(x,t)+g_1(s)U_1'(x,t)+g_2(s)\theta_y'(x,t)+g_3(s)\theta_z'(x,t), \tag{2}$$

等号右端的函数分别代表扭转、拉伸、绕 z 和 y 轴弯曲翘曲函数。

横截面绕 y、z 轴的转角为

$$\begin{aligned}\theta_y(x,t)&=U_2'(x,t)-2\gamma_{zx},\\ \theta_z(x,t)&=U_3'(x,t)-2\gamma_{yx},\end{aligned} \tag{3}$$

与位移场(1)相对应的应变场如下

$$\begin{aligned}\gamma_{xx}&=U_1'(x,t)-y\theta_y'(x,t)-z\theta_z'(x,t),\\ 2\gamma_{xs}&=\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}s}+r_n\phi'+(U_2'(x,t)-\theta_y(x,t))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}+(U_3'(x,t)-\theta_z(x,t))\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s},\\ 2\gamma_{x\xi}&=(U_2'(x,t)-\theta_y(x,t))\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}-(U_3'(x,t)-\theta_z(x,t))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}。\end{aligned} \tag{4}$$

1.2 复合材料薄壁梁的应变能

复合材料薄壁梁横截面应变能为

$$\varphi=\frac{1}{2}\oint\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_{11}\gamma_{11}+\sigma_{ss}\gamma_{ss}+2\tau_{1s}\gamma_{12}+2\tau_{\xi 1}\gamma_{\xi 1}+2\tau_{\xi s}\gamma_{\xi s})\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s, \tag{5}$$

其中：

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{ss}\\ \tau_{1s}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16}\\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26}\\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_{11}\\ \gamma_{ss}\\ 2\gamma_{12}\end{bmatrix},\\ \begin{bmatrix}\tau_{\xi 1}\\ \tau_{\xi s}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\kappa\bar{Q}_{44} & \kappa\bar{Q}_{45}\\ \kappa\bar{Q}_{45} & \kappa\bar{Q}_{55}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\gamma_{\xi 1}\\ 2\gamma_{\xi s}\end{bmatrix}。\end{aligned} \tag{6}$$

其中：$[\bar{Q}_{ij}]$是缩减的偏轴刚度矩阵，κ 是 Timoshenko 剪切系数[13]。

将式(6)代入(5)，沿厚度积分，可得

$$\begin{aligned}2\varphi=\oint(&A_{11}\gamma_{11}^2+A_{22}\gamma_{ss}^2+4A_{66}\gamma_{12}^2+2A_{12}\gamma_{11}\gamma_{ss}+4A_{16}\gamma_{11}\gamma_{12}+4A_{26}\gamma_{12}\gamma_{ss}\\ &+4A_{44}\gamma_{\xi 1}^2+4A_{55}\gamma_{\xi s}^2+8A_{45}\gamma_{\xi 1}\gamma_{\xi s})\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{7}$$

其中：

$$\begin{aligned}A_{ij}&=\int_{-h/2}^{h/2}\bar{Q}_{ij}\,\mathrm{d}\xi=2\sum_{k=1}^{N/2}\bar{Q}_{ij}^k(h_k-h_{k-1})\quad(i,j=1,2,6),\\ A_{ij}&=\int_{-h/2}^{h/2}\bar{Q}_{ij}\,\mathrm{d}\xi=2\sum_{k=1}^{N/2}\bar{Q}_{ij}^k(h_k-h_{k-1})\quad(i,j=4,5)。\end{aligned} \tag{8}$$

h_k、h_{k-1}分别为第 k 层的上、下表面坐标，N 为总层数。

假设薄壁梁的环向正应力和剪应力很小，可以忽略不计，即

$$N_{ss}=0,\quad N_{\xi s}=0, \tag{9}$$

可得

$$\begin{aligned}\gamma_{ss}&=-(1/A_{22})(A_{12}\gamma_{11}+2A_{26}\gamma_{12}),\\ \gamma_{\xi s}&=-(A_{45}/A_{55})\gamma_{\xi 1},\end{aligned} \tag{10}$$

将式(10)代入(7)消去 γ_{ss} 和 $\gamma_{\xi s}$，得

$$2\varphi_1=\oint(A(s)\gamma_{11}^2+2B(s)\gamma_{11}\gamma_{12}+C(s)\gamma_{12}^2+D(s)\gamma_{\xi 1}^2)\mathrm{d}s, \tag{11}$$

其中：

$$A(s)=A_{11}-\frac{A_{12}^2}{A_{22}},B(s)=2\left[A_{16}-\frac{A_{12}A_{26}}{A_{22}}\right],C(s)=4\left[A_{66}-\frac{A_{26}^2}{A_{22}}\right],D(s)=(A_{44}-\frac{A_{45}^2}{A_{55}}),$$
$$A_{ij}=\sum_{k=1}^{N}\overline{Q}_{ij}^{(k)}(z_k-z_{k-1}),(i,j=1,2,6;ij=4,5)。\tag{12}$$

复合材料薄壁梁的应变能为

$$U=\int_0^L\varphi_1\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^L\oint\{\gamma_{11}\quad\gamma_{12}\quad\gamma_{\xi1}\}\begin{bmatrix}A&B&0\\B&C&0\\0&0&D\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma_{11}\\\gamma_{12}\\\gamma_{\xi1}\end{Bmatrix}\mathrm{d}s\mathrm{d}x。\tag{13}$$

利用应变-位移关系(4),得位移和扭转角表示应变能为

$$U=\frac{1}{2}\int_0^L\{\delta\}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\{\delta\}\mathrm{d}x。\tag{14}$$

其中:$\{\delta\}^{\mathrm{T}}=\{U_1'\quad\varphi'\quad\theta_z'\quad\theta_y'\quad U_2'-\theta_y\quad U_3'-\theta_z\}$,$\boldsymbol{K}$ 为计及剪切的复合材料薄壁梁横截面的 6×6 对称刚度矩阵,矩阵元素 $k_{ij}(i,j=1,\cdots,6)$是复合材料薄壁梁横截面的刚度系数,$k_{ij}(i,j=1,\cdots,4)$见文献[10-11],横向剪切变形引起的刚度系数 $k_{ij}(i=1,\cdots,6;j=5,6)$,$k_{ji}(i=1,\cdots,4;j=5,6)$见文献[12],在引入剪切系数 κ 的基础上,可对横向剪切变形引起的刚度系数做如下修正

$$\begin{aligned}
&k_{15}=\frac{1}{2}\kappa\oint_\Gamma B\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s,k_{16}=\frac{1}{2}\kappa\oint_\Gamma B\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s,\\
&k_{25}=\frac{1}{4}\kappa\oint_\Gamma r_nC\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s,k_{26}=\frac{1}{4}\kappa\oint_\Gamma r_nC\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s,\\
&k_{35}=-\frac{1}{2}\kappa\oint_\Gamma Bz\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s,k_{36}=-\frac{1}{2}\kappa\oint_\Gamma Bz\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s,\\
&k_{45}=-\frac{1}{2}\kappa\oint_\Gamma By\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s,k_{46}=-\frac{1}{2}\kappa\oint_\Gamma By\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s,\\
&k_{55}=\kappa\oint_\Gamma\left[\frac{1}{4}C\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2+\mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)^2\right]\mathrm{d}s,k_{56}=\kappa\oint_\Gamma(\frac{1}{4}C-\mathrm{D})\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s,\\
&k_{66}=\kappa\oint_\Gamma\left[\frac{1}{4}C\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)^2+\mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2\right]\mathrm{d}s。
\end{aligned}\tag{15}$$

1.3 复合材料薄壁梁的耗散能

复合材料薄壁梁横截面耗散能表示为

$$\Delta\varphi=\frac{1}{2}\oint\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_{11}\eta_{11}\gamma_{11}+\sigma_{ss}\eta_{ss}\gamma_{ss}+2\tau_{1s}\eta_{1s}\gamma_{12}+2\tau_{\xi1}\eta_{\xi1}\gamma_{\xi1}+2\tau_{\xi s}\eta_{\xi s}\gamma_{\xi s})\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s,\tag{16}$$

其中:η_{ij}是偏轴阻尼系数。

由式(16)积分,得

$$\begin{aligned}2\Delta\varphi=\oint(&A_{d11}\gamma_{11}^2+A_{d22}\gamma_{ss}^2+4A_{d66}\gamma_{12}^2+(A_{d12}+A_{d21})\gamma_{11}\gamma_{ss}+2(A_{d16}+A_{d61})\gamma_{11}\gamma_{12}+\\&2(A_{d26}+A_{d62})\gamma_{12}\gamma_{ss}+4A_{d44}\gamma_{\xi1}^2+4A_{d55}\gamma_{\xi s}^2+4(A_{d45}+A_{d54})\gamma_{\xi1}\gamma_{\xi s})\mathrm{d}s。\end{aligned}\tag{17}$$

其中:

$$\begin{aligned}
&A_{dij}=\int_{-h/2}^{h/2}\eta_{il}\overline{Q}_{lj}\,\mathrm{d}\xi=2\sum_{k=1}^{N/2}\eta_{il}^k\overline{Q}_{lj}^k(h_k-h_{k-1})\quad(i,j,l=1,2,6),\\
&A_{dij}=\int_{-h/2}^{h/2}\eta_{il}\overline{Q}_{lj}\,\mathrm{d}\xi=2\sum_{k=1}^{N/2}\eta_{il}^k\overline{Q}_{lj}^k(h_k-h_{k-1})\quad(i,j,l=4,5)。
\end{aligned}\tag{18}$$

其中:$[\eta_{ij}]=[R]^{\mathrm{T}}[\eta_l][R]$。$[R]$表示坐标变换矩阵,$[\eta_l]=\mathrm{diag}(\eta_{l1},\eta_{l2},\eta_{l4},\eta_{l5},\eta_{l6})$表示正轴阻尼矩阵。

类似地,利用式(10)对上式进行简化,得

$$2\Delta\varphi_1=\oint(A_d(s)\gamma_{11}^2+2B_d(s)\gamma_{11}\gamma_{12}+C_d(s)\gamma_{12}^2+D_d(s)\gamma_{\xi1}^2)\mathrm{d}s。\tag{19}$$

其中:

$$
\begin{aligned}
&A_d(s)=A_{d11}+(A_{12}^2/A_{22}^2)A_{d22}-(A_{12}/A_{22})(A_{d12}+A_{d21}),\\
&B_d(s)=A_{d16}+A_{d61}+2(A_{12}A_{26}/A_{22}^2)A_{d22}-(A_{26}/A_{22})(A_{d12}+A_{d21})-(A_{12}/A_{22})(A_{d26}+A_{d62}),\\
&C_d(s)=4[A_{d66}+(A_{26}^2/A_{22}^2)A_{d22}-(A_{26}/A_{22})(A_{d26}+A_{d62})],\\
&D_d(s)=4[A_{d44}+(A_{45}^2/A_{55}^2)A_{d55}-(A_{45}/A_{55})(A_{d45}+A_{d54})]。
\end{aligned}
\tag{20}
$$

复合材料薄壁梁的耗散能为

$$
W_d=\int_0^L\varphi_1\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^L\oint\{\gamma_{11}\quad\gamma_{12}\quad\gamma_{\xi1}\}\begin{bmatrix}A_d & B_d & 0\\ B_d & C_d & 0\\ 0 & 0 & D_d\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma_{11}\\ \gamma_{12}\\ \gamma_{\xi1}\end{Bmatrix}\mathrm{d}s\mathrm{d}x\ 。\tag{21}
$$

利用应变-位移关系(4),得位移和扭转角表示耗散能为

$$
W_d=\frac{1}{2}\int_0^L\{\delta\}^{\mathrm{T}}C\{\delta\}\mathrm{d}x\ 。\tag{22}
$$

其中:$\boldsymbol{C}$ 为复合材料薄壁梁横截面的 6×6 阻尼矩阵,其矩阵元素表达式类似于式(14)中刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$,只要将 $A(s)$、$B(s)$、$C(s)$、$D(s)$替换为 $A_d(s)$、$B_d(s)$、$C_d(s)$、$D_d(s)$即可得到具体表达式。

1.4 复合材料薄壁梁的动能

复合材料薄壁梁动能可由式(23)确定

$$
T=\frac{1}{2}\int_0^L\oint\int_{-h/2}^{h/2}\rho(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V})\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\mathrm{d}x\ 。\tag{23}
$$

其中:ρ 表示密度;$\boldsymbol{V}$ 表示梁在变形之后任意点的速度矢量,与任意点的位置矢量 $\boldsymbol{r}=(x+u_1)\boldsymbol{i}+(y+u_2)\boldsymbol{j}+(z+u_3)\boldsymbol{k}$ 之间,满足关系 $\boldsymbol{V}=\dot{\boldsymbol{r}}$;“·”表示对时间 t 求偏导。

2 复合材料薄壁梁的自由振动方程及模态阻尼求解

按照 Hamilton 原理,有

$$
\int_{t_0}^{t_1}(\delta U-\delta T)\mathrm{d}t=0,\tag{24}
$$

由此推导出不计阻尼梁的自由振动方程

$$
\begin{aligned}
&F_x'=I_1,\\
&Q_y'=I_2,\\
&Q_z'=I_3,\\
&M_x'=I_4,\\
&M_z'+Q_y=I_5,\\
&M_y'+Q_z=I_6。
\end{aligned}
\tag{25}
$$

其中:F_x 是轴向力,Q_y、Q_z 是横向剪力,M_y、M_z 是弯矩,M_x 是扭矩。具体表达式见文献[12],$I_i(i=1,\cdots,6)$由动能变分得到,具体表达式可由文献[12]中的公式,令转速 $\Omega=0$ 得到。

将复合材料薄壁梁内力表达式代入方程(24),可得到位移表示的运动方程组,为了节省篇幅,此处不再列出。

假设位移具有如下形式

$$
\begin{aligned}
&U_2(x,t)=\sum_{j=1}^N U_j(t)\alpha_j(x),U_3(x,t)=\sum_{j=1}^N U_j(t)\alpha_j(x),\\
&\theta_y(x,t)=\sum_{j=1}^N \Theta_j(t)\psi_j(x),\theta_z(x,t)=\sum_{j=1}^N \Theta_j(t)\psi_j(x),\\
&U_1(x,t)=\sum_{j=1}^N U_j(t)\beta_j(x),\varphi(x,t)=\sum_{j=1}^N \Psi_j(t)\theta_j(x),
\end{aligned}
\tag{26}
$$

其中：$\alpha_j(x)$、$\psi_j(x)$、$\theta_j(x)$表示轴的振型函数，满足给定的位移边界条件。

由 Galerkin 法，可得

$$\overline{\boldsymbol{M}}\{\ddot{X}\}+\overline{\boldsymbol{K}}\{X\}=0, \tag{27}$$

$$\overline{\boldsymbol{K}}=\begin{bmatrix} -k_{11}N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{12}D_{ij} \\ 0 & -k_{55}I_{ij} & 0 & k_{55}J_{ij} & -k_{35}K_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{66}I_{ij} & -k_{46}K_{ij} & k_{66}J_{ij} & 0 \\ 0 & -k_{55}O_{ij} & -k_{46}P_{ij} & -k_{44}Q_{ij}+k_{55}F_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{35}P_{ij} & -k_{66}O_{ij} & 0 & -k_{33}Q_{ij}+k_{66}F_{ij} & 0 \\ -k_{12}H_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{22}L_{ij} \end{bmatrix}, \tag{28}$$

$$\overline{\boldsymbol{M}}=\begin{bmatrix} b_1B_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1E_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1E_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4F_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_5F_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (b_4+b_5)G_{ij} \end{bmatrix}, \tag{29}$$

$$\begin{aligned} &E_{ij}=\int_0^L \alpha_i\alpha_j\,\mathrm{d}x, F_{ij}=\int_0^L \psi_i\psi_j\,\mathrm{d}x, I_{ij}=\int_0^L \alpha_i\alpha_j''\,\mathrm{d}x, J_{ij}=\int_0^L \alpha_i\psi_j'\,\mathrm{d}x, \\ &K_{ij}=\int_0^L \alpha_i\psi_j''\,\mathrm{d}x, O_{ij}=\int_0^L \psi_i\alpha_j'\,\mathrm{d}x, P_{ij}=\int_0^L \psi_i\alpha_j''\,\mathrm{d}x, Q_{ij}=\int_0^L \psi_i\psi_j''\,\mathrm{d}x, \\ &B_{ij}=\int_0^L \beta_i\beta_j\,\mathrm{d}x, N_{ij}=\int_0^L \beta_i\beta_j''\,\mathrm{d}x, \mathrm{d}_{ij}=\int_0^L \beta_i\theta_j''\,\mathrm{d}x, G_{ij}=\int_0^L \theta_i\theta_j\,\mathrm{d}x, \\ &H_{ij}=\int_0^L \theta_i\beta_j''\,\mathrm{d}x, L_{ij}=\int_0^L \theta_i\theta_j''\,\mathrm{d}x。 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\{x\}=[U_{1j}\quad U_{2j}\quad U_{3j}\quad \theta_{yj}\quad \theta_{zj}\quad \varphi_j]^{\mathrm{T}}, \tag{31}$$

$$\{\ddot{x}\}=[\ddot{U}_{1j}\quad \ddot{U}_{2j}\quad \ddot{U}_{3j}\quad \ddot{\theta}_{yj}\quad \ddot{\theta}_{zj}\quad \ddot{\varphi}_j]^{\mathrm{T}}。 \tag{32}$$

由方程(27)导出复合材料薄壁梁的特征方程

$$(\overline{\boldsymbol{K}}-\omega^2\,\overline{\boldsymbol{M}})\{X_m\}=0, \tag{33}$$

其中：$\{X_m\}$是复合材料薄壁梁的振型向量。

考虑复合材料薄壁梁的阻尼，则有

$$(\overline{\boldsymbol{K}}+j\overline{C}-\omega^2\overline{\boldsymbol{M}})\{X_m\}=0。 \tag{34}$$

其中：$j=\sqrt{-1}$，$\overline{\boldsymbol{C}}$表示复合材料薄壁梁的阻尼矩阵，形式如下

$$\overline{\boldsymbol{C}}=\begin{bmatrix} -c_{11}N_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{12}D_{ij} \\ 0 & -c_{55}I_{ij} & 0 & c_{55}J_{ij} & -c_{35}K_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & -c_{66}I_{ij} & -c_{46}K_{ij} & c_{66}J_{ij} & 0 \\ 0 & -c_{55}O_{ij} & -c_{46}P_{ij} & -c_{44}Q_{ij}+c_{55}F_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & -c_{35}P_{ij} & -c_{66}O_{ij} & 0 & -c_{33}Q_{ij}+c_{66}F_{ij} & 0 \\ -c_{12}H_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{22}L_{ij} \end{bmatrix}。 \tag{35}$$

通过求解方程(34)得到复特征值，从而得到复合材料薄壁梁的模态阻尼。

3 数值结果与讨论

首先检验本文提出的计及剪切变形的复合材料薄壁梁的阻尼模型结果的正确性。表 1 和表 2 分别表示圆形和箱形截面悬臂复合材料梁，截面铺层分别为$[0_2/90_2/45_2/-45_2]_8$ 和$[45/-45]_8$ 的结构阻尼预测结果，并与文献[6]的有限元以及不考虑剪切变形的结果进行比较，圆形和箱形截面复合材料薄壁梁的几何尺寸和

材料性能见文献[6]。表1所示为复合材料圆管型梁不同铺层方式的模态频率,其中包括了考虑剪切变形、不考虑剪切变形以及文献[6]中求解的固有频率值和损耗系数值。在截面铺层方式为$[0_2/90_2/45_2/-45_2]_8$条件下,考虑剪切变形模型结果与文献[6]计算结果的差值要小于不考虑剪切变形的模型结果与文献[6]中计算结果的差值。以一阶挥舞模态为例,考虑剪切变形模型的固有频率为2.488 8 Hz,不考虑剪切变形模型的固有频率为2.539 1 Hz,与文献[6]中的固有频率值2.4 Hz相比,考虑剪切变形的模型与其差值0.088 8 Hz小于不考虑剪切变形模型与其差值0.139 1 Hz。同样地,考虑剪切变形的模型损耗系数1.457 6%与不考虑剪切变形的模型损耗系数1.527 7%相比较,也更接近文献[6]中的损耗系数1.44%。在

表1 复合材料圆管型梁不同铺层方式的模态频率($L/d=26$)

Tab.1 Modal frequency of various laminated tubular circular beams ($L/d=26$)

铺层方式	模态	固有频率/Hz			损耗系数/%		
		文献[6]解	考虑剪切	不计剪切	文献[6]解	考虑剪切	不计剪切
$[0_2/90_2/45_2/-45_2]_8$	一阶挥舞	2.4	2.488 8	2.539 1	1.44	1.457 6	1.527 7
	二阶挥舞	15.0	15.354 2	15.531 2	1.44	1.457 6	1.527 7
	一阶摆振	2.4	2.488 8	2.539 1	1.44	1.457 6	1.527 7
	二阶摆振	15.0	15.354 2	15.531 2	1.44	1.457 6	1.527 7
	一阶扭转	49.2	48.126 1	49.402 1	1.60	1.639 1	1.820 3
	二阶扭转	148.0	149.856 2	152.023 5	1.60	1.639 1	1.820 3
$[45/-45]_8$	一阶挥舞	2.0	2.070 4	2.302 5	2.45	2.471 2	2.609 1
	二阶挥舞	13.0	13.798 4	13.854 1	2.44	2.459 3	2.512 5
	一阶摆振	2.0	2.070 4	2.3025	2.45	2.471 2	2.609 1
	二阶摆振	13.0	13.798 4	13.854 1	2.44	2.459 3	2.512 5
	一阶扭转	57.0	56.865 2	58.965 2	1.00	1.104 7	1.394 3
	二阶扭转	172.0	173.524 1	175.635 2	1.00	1.104 7	1.394 3

表2 复合材料箱型梁不同铺层方式的模态($L/a=14.36$, $a/b=5$)

Tab.2 Modal frequencies of a box-section beam for various skin laminate configurations ($L/a=14.36$, $a/b=5$)

铺层方式	模态	固有频率/Hz			损耗系数/%		
		文献[5]解	考虑剪切	不计剪切	文献[5]解	考虑剪切	不计剪切
$[0_2/90_2/45_2/-45_2]_8$	一阶挥舞	2.4	2.239 2	2.653 2	1.44	1.452 3	1.613 4
	二阶挥舞	14.8	15.580 9	16.058 3	1.44	1.452 3	1.613 4
	一阶摆振	8.3	8.336 8	8.598 1	1.44	1.452 3	1.613 4
	二阶摆振	50.9	49.048 0	51.568 9	1.45	1.473 1	1.624 3
	一阶扭转	46.9	47.333 5	48.652 3	1.61	1.627 9	1.975 6
	二阶扭转	140.9	142.006 5	145.256 3	1.61	1.627 9	1.975 6
$[45/-45]_8$	一阶挥舞	2.0	1.905 8	2.223 0	2.45	2.471 5	2.793 2
	二阶挥舞	12.7	13.436 9	13.524 6	2.45	2.471 5	2.793 2
	一阶摆振	7.1	7.286 0	7.290 6	2.45	2.471 5	2.793 2
	二阶摆振	44.1	43.416 9	45.883 2	2.41	2.443 7	2.641 7
	一阶扭转	54.6	55.200 3	56.526 3	0.99	1.075 2	1.257 8
	二阶扭转	164.2	165.600 8	167.432 0	0.99	1.075 2	1.257 8

截面铺层方式为$[45/-45]_8$条件下，同样以一阶挥舞模态为例，考虑剪切变形模型的固有频率 2.070 4 Hz 与文献[6]中的固有频率 2.0 Hz 差值为 0.070 4 Hz，不考虑剪切变形模型的固有频率 2.302 5 Hz 与文献中的固有频率 2.0 Hz 差值为 0.102 5 Hz。考虑剪切变形模型的损耗系数 2.471 2%与文献[6]中的损耗系数 2.45%差值为 0.021 2%，不考虑剪切变形模型的损耗系数 2.609 1%与文献中的损耗系数 2.45%差值为 0.159 1%。经过对比分析，无论固有频率还是损耗系数，考虑剪切变形模型都比不考虑剪切变形模型的结果更为精确，更接近文献[6]中的计算结果。表 2 所示为复合材料圆管型梁不同铺层方式的模态频率，采取和表 1 同样的对比分析方法，对各铺层方式、各阶模态的固有频率、损耗系数一一对比，发现考虑剪切变形模型的结果更精确，更接近文献[6]中的计算结果。

在圆截面薄壁复合材料的模态阻尼数值计算中，分别考虑$[\theta]_{16}$（铺层方式一）和$[\theta/-\theta]_8$（铺层方式二），2 种复合材料铺层方式，铺层数为 16 层。选取 3 种支承条件的梁：两端固支梁，简支梁和悬臂梁。梁的几何尺寸为：圆截面直径 $d=0.352$ m，单层厚度为 0.000 635 m，复合材料性能参数如表 3 所示。

表 3　复合材料性能参数

Tab. 3　Mechanical properties of composite material

Ply thickness t_l/mm	ρ/(kg/m^3)	E_{11}/GPa	E_{22}/GP	G_{12}/GP	G_{23}/GP	ν_{12}	η_1/%	η_2/%	η_3/%	η_4/%
0.635	1 672	25.8	8.7	3.5	3.5	0.34	0.65	2.34	2.89	2.89

图 3 和图 4 分别表示对应于铺层方式一和铺层方式二的圆截面薄壁复合材料梁在 3 种边界条件下的第一阶弯曲模态阻尼随铺层角的变化曲线，其中显示出长径比的影响，同时还给出不考虑剪切变形的模态阻尼计算结果。结果表明，对于铺层方式一，最大阻尼出现在 $\theta=40°$附近；对于铺层方式二，最大阻尼出现在 $\theta=50°$ 附近。两种铺层方式下，铺层角为 90°对应的阻尼均大于铺层角 0°对应的阻尼。剪切变形对弯曲阻尼的大小有重要影响，这种影响主要体现在出现最大模态阻尼的铺层角范围内。如图 3(a)中两端固支梁中，考虑剪切变形的长径比不同，3 种梁的最大模态阻尼分别为 10%、10.7%、11.7%，不考虑剪切变形梁的最大模态阻尼为 12.2%。与不考虑剪切变形的结果相比，剪切变形的引入使得模态阻尼降低，而且随着长径比的减小，两者之间的差别也在进一步扩大。边界条件对弯曲模态阻尼也会带来显著影响，结果表明，无论在哪一种铺层方式下，考虑剪切与不考虑剪切的模态阻尼结果之间的差别，悬臂梁最小，简支梁次之，两端固支梁最大。并且还注意到，在几何尺寸与铺层方式相同的条件下，悬臂梁的模态阻尼最小，两端固支梁的模态阻尼最大，简支梁的模态阻尼介于上述二者之间。

4　结论

通过与现有文献的有限元模型进行结果对比，验证了本模型的正确性。针对具有 2 种不同铺层方式以及 3 种不同边界条件的圆截面薄壁复合材料梁，进行阻尼计算。结果表明：

1）计及剪切变形的阻尼模型能更加准确地预测复合材料薄壁梁的阻尼，不计剪切变形将导致对梁阻尼的估计偏高，考虑剪切变形的影响对模态阻尼的预测则更为准确和精确。

2）铺层角对阻尼具有明显的影响，在$[\theta]_{16}$和$[\theta/-\theta]_8$ 2 种铺层方式下的弯曲模态阻尼分别发生在铺层角 $\theta=40°$和 $\theta=50°$的附近。

3）在几何尺寸与铺层方式不变的前提下，悬臂梁的阻尼最小，两端固支梁的阻尼最大，简支梁的阻尼大小介于悬臂梁和两端固支梁的阻尼之间。

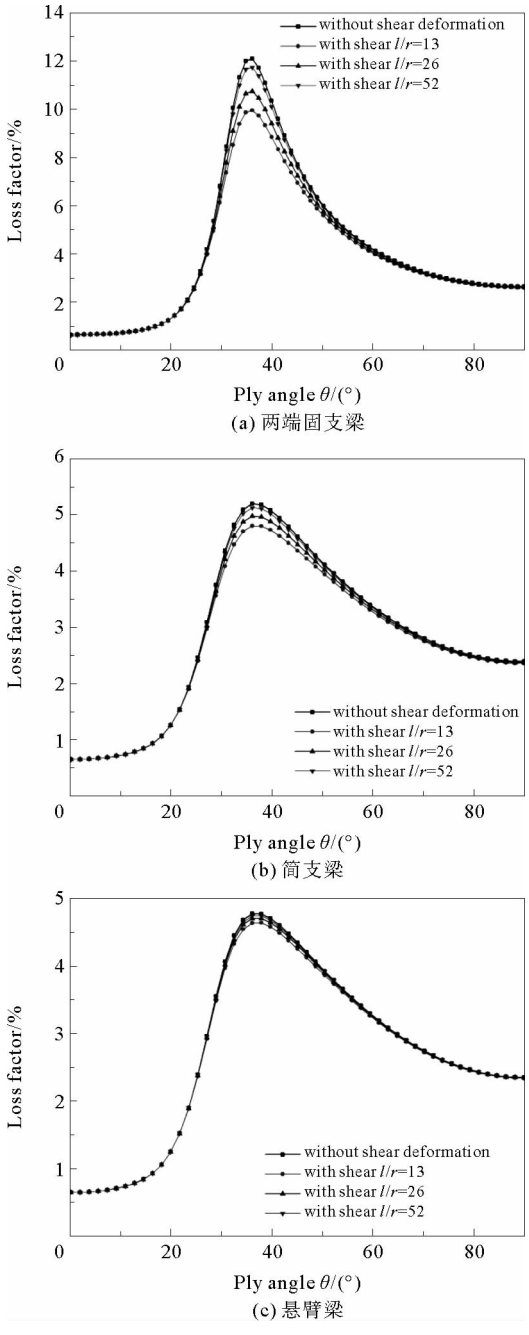

图 3　具有铺层方式$[\theta]_{16}$和三种边界条件的圆截面复合材料薄壁梁的模态阻尼

Fig. 3　Modal damping of circular section of composite materials beam for a laminate $[\theta]_{16}$ with different boundary conditions

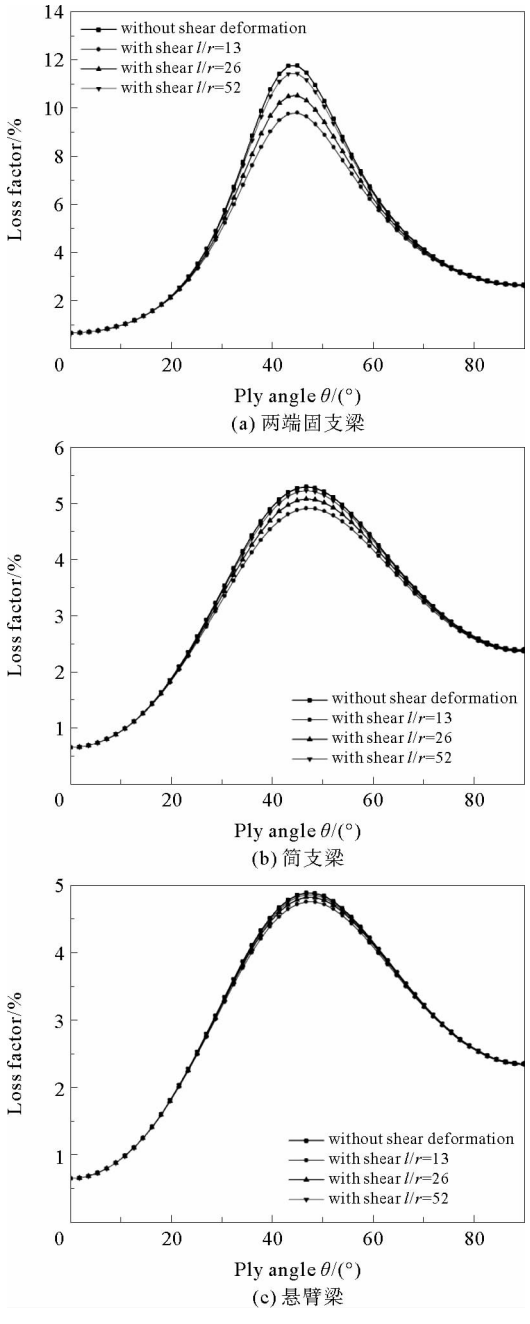

图 4　具有铺层方式$[\theta/-\theta]_8$和三种边界条件的圆截面复合材料薄壁梁的模态阻尼

Fig. 4　Modal damping of circular section of composite materials beam for a laminate $[\theta/-\theta]_8$ with different boundary conditions

参考文献：

[1]王震鸣，杜善义，张衡，等. 复合材料及其结构的力学、设计、应用和评价(第二册)[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，1998.

[2]HETHERINGTON E L，KRAUS R E，DARLOW M S. Demonstration of a super critical composite helicopter power transmission shaft[J]. Journal of American Helicopter Society，1990，35(1)：23-28.

[3]VEER P S，ASHWILL T D，SUTHERL H J，et al. Trends in the design，manufacture and evaluation of wind turbine blades [J]. Wind Energy，2003，6(3)：245-259.

[4]YATES D N，REZIN D B. Carbon fiber reinforced composite drive shaft：US，US 4171626[P]. 1979-10-23.

[5]SURESH R，MALHOTRA S K. Vibration and damping analysis of thin-walled box beams[J]. Journal of Sound and Vibration，1998，215(2)：201-210.

[6]SARAVANOS D A，VARELIS D. A shear beam finite element for the damping analysis of tubular laminated composite beams[J]. Journal of Sound & Vibration，2006，291(3)：802-823.

[7]CHORTIS D I，CHRYSOCHOIDIS N A，SARAVANOS D A. Damped structural dynamics models of large wind-turbine blades including material and structural damping[J]. Journal of Physics：Conference Series，2007，75(1)：1-11.

[8]任勇生，杜向红，孙双双，等. 单闭室复合材料薄壁梁的结构阻尼[J]. 振动与冲击，2012，31(3)：141-146.
REN Yongsheng，DU Xianghong，SUN Shuangshuang，et al. Structural damping of thin-walled composite one-cell beams[J]. Journal of Vibration and Shock，2012，31(3)：141-146.

[9]BERDICHEVSKY V，ARMANIOS E，BADIR A. Theory of anisotropic thin-walled closed-cross-section beams[J]. Composites Engineering，1992，2(5-7)：411-432.

[10]ARMANIOS E，BADIR A. Free vibration analysis of anisotropic thin-walled closed-section beams[J]. AIAA Journal，2013，33(10)：1905-1910.

[11]DANCILA D S，ARMANIOS E A. The influence of coupling on the free vibration of anisotropic thin-walled closed-section beams[J]. International Journal Solids Structures，1998，35(23)：3105-19.

[12]任勇生，代其义. 考虑剪切变形旋转运动复合材料薄壁梁的动力学特性[J]. 工程力学，2014，31(7)：215-222.
REN Yongsheng，DAI Qiyi. Dynamic analysis of rotating composite thin-walled beams with shear deformation[J]. Engineering Mechanics，2014，31(7)：215-222.

[13]DHARMARAJAN S，MCCUTCHEN H. Shear coefficients for orthotropic beams[J]. Journal of Composite Materials，1973，7(4)：530-535.

[14]仲惟燕，任勇生，高峰，等. 复合材料薄壁轴转子系统动力学特性的有限元分析[J]. 山东科技大学学报(自然科学版)，2016，35(5)：87-95.
ZHONG Weiyan，REN Yongsheng，GAO Feng，et al. Finite element simulation of dynamic characteristics of composite thin-walled shaft rotor system[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science)，2016，35(5)：87-95.

[15]吕楠，丁鸿昌，刘鲁伟，等. 基于磁流变阻尼器的磁悬浮转子系统的振动特性研究[J]. 山东科技大学学报(自然科学版)，2016，35(5)：109-113.
LÜ Nan，DING Hongchang，LIU Luwei，et al. Research on vibration characteristics of magnetic suspension rotor-bearing system based on magnetorheological damper[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology(Natural Science)，2016，35(5)：109-113.

(责任编辑：高丽华)

[16]康小宁,屈亚军,焦在滨,等. 基于最小二乘矩阵束算法的工频分量提取方法[J]. 电力系统自动化,2014,38(21):66-70.
KANG Xiaoning,QU Yajun,JIAO Zaibin,et al. Power-frequency phasor extraction based on least-square matrix pencil algorithm[J]. Automation of Electric Power Systems,2014,38(21):66-70.
[17]索南加乐,王斌,宋国兵,等. 电力系统快速相量提取算法的性能探究[J]. 电力科学与技术学报,2013,28(1):25-30.
SUONAN Jiale,WANG Bin,SONG Guobing,et al. Performance study of fast phasor calculating method for power systems [J]. Journal of Electric Power Science and Technology,2013,28(1):25-30.
[18]王晨清,宋国兵,汤海雁,等. 距离保护在风电接入系统中的适应性分析[J]. 电力系统自动化,2015,39(22):10-15.
WANG Chenqing,SONG Guobing,TANG Haiyan,et al. Adaptability analysis of distance protection in power systems with wind farms [J]. Automation of Electric Power Systems,2015,39(22):10-15.

(责任编辑:吕海亮)

(上接第 90 页)

[9]BALASUBRAMANYAM C,SHETTY A B,SPANDANA K R,et al. Analysis and optimization of an 8 bar mechanism[J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics,2015,6(4):655-666.
[10]KIRECCI A,DULGER L C. A study on a hybrid actuator[J]. Mechanism & Machine Theory,2000,35(8):1141-1149.
[11]DU R,GUO W Z. The Design of a new metal forming press with controllable mechanism[J]. Journal of Mechanical Design,2003,125(3):582-592.
[12]GUO W Z,HE K,YEUNG K,et al. A new type of controllable mechanical press:Motion control and experiment validation [J]. Journal of Manufacturing Science & Engineering,2005,127(4):731-742.
[13]LI H,ZHANG C,MENG C. Hybrid-driven nine-bar press for precision drawing[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering,2004,17(S):197-200.
[14]ZHOU Y. Type synthesis and optimization of main driving mechanism for servo-punch press[J]. Journal of Mechanical Engineering,2015,51(11):1-7.

(责任编辑:李 磊)

(上接第 96 页)

[13]孙正龙,王雨薇. 浅谈互联电网低频振荡的分析与控制方法[J]. 黑龙江科技信息,2015(36):180-181.
SUN Zhenglong,WANG Yuwei. Analysis and control of low frequency oscillation in interconnected power system[J]. Heilongjiang Science and Technology Information,2015(36):180-181.
[14]宋鹏程,甄宏宁,王震泉,等. UPFC 附加阻尼控制器设计研究[J]. 江苏电机工程,2015,34(6):10-13.
SONG Pengcheng,ZHEN Hongning,WANG Zhenquan,et al. Parameters tuning for UPFC auxiliary damping controller design of additional damping controller[J]. Jiangsu Electrical Engineering,2015,34(6):10-13.
[15]KHODABAKHSHIAN A,ESMAILI M R,BORNAPOUR M. Optimal coordinated design of UPFC and PSS for improving power system performance by using multi-objective water cycle algorithm[J]. International Journal of Electrical Power and Energy Systems,2016,83:124-133.

(责任编辑:李 磊)