

引用格式:苗安琪,张健,王新阳,等.具有Beddington-DeAngelis发生率的随机SIS传染病模型的定性分析[J].山东科技大学学报(自然科学版),2018,37(2):39-46.

MIAO Anqi, ZHANG Jian, WANG Xinyang, et al. Qualitative analysis of stochastic SIS epidemic model with Beddington-DeAngelis incidence rate[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science), 2018, 37(2): 39-46.

具有Beddington-DeAngelis发生率的随机SIS传染病模型的定性分析

苗安琪,张健,王新阳,张同迁

(山东科技大学 数学与系统科学学院,山东 青岛 266590)

摘要:建立并研究了一类具有Beddington-DeAngelis发生率的随机SIS传染病动力学模型。首先对于对应的确定性模型,研究了模型平衡点的稳定性,得到了决定疾病消除或者流行的基本再生数。然后针对随机SIS传染病模型,利用随机微分方程的比较定理和伊藤公式,研究了疾病的传播动力学,在噪声较小的情况下得到类似于确定性模型的决定疾病消除或者流行的阈值。结果显示,大的随机噪声能抑制疾病的流行。最后,给出了数值模拟去验证理论结果。

关键词:随机SIS传染病模型; Beddington-DeAngelis发生率; 稳定性; 灭绝性; 持久性

中图分类号:O175

文献标志码:A

文章编号:1672-3767(2018)02-0039-08

DOI: 10.16452/j.cnki.sdkjzk.2018.02.006

Qualitative Analysis of Stochastic SIS Epidemic Model with Beddington-DeAngelis Incidence Rate

MIAO Anqi, ZHANG Jian, WANG Xinyang, ZHANG Tongqian

(College of Mathematics and Systems Science, Shandong University of Science and Technology,
Qingdao, Shandong 266590, China)

Abstract: In this paper, a stochastic SIS epidemic model with Beddington-DeAngelis incidence rate was proposed and investigated. Firstly, for the deterministic model, the stability of the equilibrium points was studied and the basic reproduction number which determines the extinction or persistence of the epidemic disease was obtained. Then for the stochastic model, the transmission dynamics of the disease was investigated by using the comparison theorem of stochastic differential equation and Itô formula, and the threshold which determines the extinction or persistence of the epidemic disease was got when the noise was small. The results show that large stochastic noise will suppress the spread of the epidemic. Lastly, numerical simulations were carried out to illustrate the theoretical results.

Key words: stochastic SIS epidemic model; Beddington-DeAngelis incidence rate; stability; extinction; persistence

收稿日期:2017-03-05

基金项目:国家自然科学基金项目(11371230);山东省自然科学基金项目(ZR2015AQ001);山东科技大学科研创新团队支持计划项目(2014TDJH102);山东科技大学研究生科技创新项目(SDKDYC180348)

作者简介:苗安琪(1994—),女,山东青岛人,硕士研究生,主要从事生物数学研究. E-mail: miaoanqi2016@163.com

张同迁(1980—),男,山东泰安人,讲师,博士,主要从事生物数学研究,本文通信作者.

E-mail: zhangtongqian@sdu.edu.cn

1 引言与模型建立

传染病是人类的宿敌,人类的历史充斥着与传染病的斗争。传染病给人类造成了巨大的灾难,天花、霍乱、艾滋病等让人闻之色变^[1]。为了控制传染病,研究者建立了很多数学模型去研究传染病的传播动力学^[2-6]。在传染病动力学中,重要的数学模型是 KERMACK 和 MCKENDRICK 在 1927 年提出的仓室模型^[7]。在这个仓室模型中,人们被分为三个相互隔离的仓室:易感者仓室“S”,染病者仓室“I”,以及恢复者或移出者仓室“R”。在模型中,易感者可以通过与染病者接触而转化为染病者,而染病者可以通过治疗转化为恢复者或移出者,并获得永久的免疫能力,这个模型被称之为 SIR 模型。然而有些疾病并不符合 SIR 模型,比如流行感冒,患者经过治疗后,不能获得永久免疫力,还有再次感染该种疾病的可能。这样建立的模型被称为 SIS 模型^[8]。文献[7-8]中采用了常见的非线性传染率-双线性传染率 βSI 。研究者还研究了很多其他类型的非线性传染率^[9-11]。

众所周知,随机噪声因素在传染病的传播中起着重要作用,因此,许多学者对传染病模型随机性的影响进行了研究^[12-13],不同的随机干扰方法被引入到传染病模型当中,并取得了很好的结果^[14-23]。基于以上文献分析,考虑传染率受到随机白噪声干扰即 $\beta \rightarrow \sigma dB(t)$ 及人口输入、因病死亡率等因素,建立了一类具有 Beddington-DeAngelis 发生率的随机型 SIS 传染病动力学模型:

$$\begin{cases} dS(t) = \left(A - \mu S(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + aS(t) + bI(t)} + rI(t) \right) dt - \frac{\sigma S(t)I(t)}{1 + aS(t) + bI(t)} dB(t), \\ dI(t) = \left(\frac{\beta S(t)I(t)}{1 + aS(t) + bI(t)} - (\mu + \alpha + r)I(t) \right) dt + \frac{\sigma S(t)I(t)}{1 + aS(t) + bI(t)} dB(t). \end{cases} \quad (1.1)$$

这里 A 表示人口的输入率(包括人口的出生和迁入), a 和 b 是测量抑制效果的参数, α 表示因病死亡率, σ^2 是噪声强度, $B(t)$ 是标准布朗运动。

2 预备知识

设 $(\Omega, F, \{F\}_{t \geq 0}, P)$ 是带有滤子 $\{F\}_{t \geq 0}$ 的完备概率空间,满足通常条件如递增右连续且 F_0 包含所有的零测集, $B(t)$ 代表定义在完备概率空间 Ω 上的标准布朗运动。记 $R_+^3 = \{x_i > 0, i = 1, 2, 3\}$ 。设 f 是连续函数,定义为 $[f(t)] = \frac{1}{t} \int_0^t f(\tau) d\tau$ 。

定义 2.1 对于模型(1.1),

- 1) 如果 $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$, 那么疾病 $I(t)$ 被称为是灭绝的;
- 2) 如果存在一个正常数 λ 使得 $\liminf_{t \rightarrow +\infty} [I(t)] \geq \lambda$, 那么疾病 $I(t)$ 被称为是持久的。

引理 2.1 对任意的初值 $(S(0), I(0)) \in R_+^2$, 模型(1.1)在 $t \geq 0$ 上存在惟一的解 $(S(t), I(t))$ 并且以概率 1 停留 R_+^2 中,也就是说对于所有的 $t \geq 0$, $(S(t), I(t)) \in R_+^2$ 几乎处处成立。

引理 2.2 区域 $\Omega = \{S, I: S > 0, I \geq 0, S + I \leq \frac{A}{\mu}\}$ 是模型(1.1)的正向不变集。

引理 2.3 设 $(S(t), I(t))$ 为模型(1.1)满足初始条件 $(S(0), I(0)) \in R_+^2$ 的解,则 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M_1}{t} = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M_2}{t} = 0$ 几乎处处成立,其中 $M_1(t) = \int_0^t \frac{\sigma S(\tau)}{1 + aS(\tau) + bI(\tau)} dB(\tau)$, $M_2(t) = \int_0^t \sigma S(\tau) dB(\tau)$ 是局部连通的鞅,且有 $M_1(0) = 0, M_2(0) = 0$ 。

引理 2.4 (伊藤公式) 设 $x(t), t \geq 0$ 是方程 $dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dB(t), 0 \leq t < \infty$ 的解, $V \in C^{2,1}(R^n \times R_+; R)$ 。则函数 $V(x(t), t)$ 仍是一伊藤过程,具有如下随机微分:

$$\begin{aligned} dV(x(t), t) &= [V_t(x(t), t) + V_x(x(t), t)f(x(t), t) \\ &+ \frac{1}{2} \text{trace}(g^T(x(t), t)V_{xx}(x(t), t)g(x(t), t))] dt + V_x(x(t), t)g(x(t), t)dB(t), \text{a.s.} \end{aligned}$$

上式称为伊藤公式。

3 模型的分析

3.1 确定型SIS传染病模型的定性分析

首先我们考虑确定性SIS传染病模型:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = A - \mu S(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + aS(t) + bI(t)} + rI(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + aS(t) + bI(t)} - (\mu + \alpha + r)I(t). \end{cases} \quad (3.1)$$

根据生物意义模型(3.1)的研究区域限定为 $\{(S, I) | (S, I) \in R_+^2 : S + I \leq \frac{A}{\mu}\}$ 。

定义基本再生数 $R = \frac{A\beta}{(Aa + \mu)(\mu + \alpha + r)}$ 。

定理3.1.1 模型(3.1)总有一个疾病消除平衡点,记为 $E_0 : (S_0, 0)$, 其中 $S_0 = \frac{A}{\mu}$ 。若 $R > 1$, 模型

(3.1)还存在一个疾病平衡点 $E : (S^*, I^*)$ 。这里

$$S^* = \frac{(\mu + \alpha + r)(1 + bI^*)}{\beta - (\mu + \alpha + r)a}, I^* = \frac{A\beta - (Aa + \mu)(\mu + \alpha + r)}{\mu(\mu + \alpha + r)b + (\mu + \alpha)(\beta - (\mu + \alpha + r)a)}.$$

下面考虑模型(3.1)的平衡点的稳定性。

模型在疾病消除平衡点 $E_0 : (S_0, 0)$ 处的雅可比矩阵为

$$J_0 = \begin{bmatrix} -\mu & r - \beta S_0 \\ 0 & \beta S_0 - (\mu + \alpha + r) \end{bmatrix},$$

显然,若 $R < 1$, 则疾病消除平衡点 $E_0 : (S_0, 0)$ 是局部稳定的;若 $R > 1$, 则疾病消除平衡点 $E_0 : (S_0, 0)$ 是不稳定的。

模型在疾病平衡点 $E^* : (S^*, I^*)$ 处的雅可比矩阵为

$$J_1 = \begin{pmatrix} -\mu - \frac{\beta(I^* + bI^{*2})}{(1 + aS^* + bI^*)^2} & r - \frac{\beta(S^* + bS^{*2})}{(1 + aS^* + bI^*)^2} \\ \frac{\beta(I^* + bI^{*2})}{(1 + aS^* + bI^*)^2} & \frac{\beta(S^* + bS^{*2})}{(1 + aS^* + bI^*)^2} - (\mu + \alpha + r) \end{pmatrix},$$

其特征方程为

$$\lambda^2 + (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0,$$

其中

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\beta(I^* + bI^{*2})}{(1 + aS^* + bI^*)^2} + \mu, a_{12} = r - \frac{\beta(S^* + bS^{*2})}{(1 + aS^* + bI^*)^2}, \\ a_{21} &= \frac{\beta(I^* + bI^{*2})}{(1 + aS^* + bI^*)^2}, a_{22} = (\mu + \alpha + r) - \frac{\beta(S^* + bS^{*2})}{(1 + aS^* + bI^*)^2}. \end{aligned}$$

显然

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{22} &= \frac{\beta(I^* + bI^{*2})}{(1 + aS^* + bI^*)^2} + \mu + (\mu + \alpha + r) - \frac{\beta(S^* + bS^{*2})}{(1 + aS^* + bI^*)^2} \\ &= \frac{\beta(I^* + bI^{*2})}{(1 + aS^* + bI^*)^2} + \mu + \frac{\beta b S^* I^*}{(1 + aS^* + bI^*)^2} > 0. \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= \frac{\beta(I^* + bI^{*2})(\mu + \alpha)}{(1 + aS^* + bI^*)^2} + \mu(\mu + \alpha + r) - \frac{\mu\beta(S^* + bS^{*2})}{(1 + aS^* + bI^*)^2} \\ &= \frac{\beta(I^* + bI^{*2})(\mu + \alpha)}{(1 + aS^* + bI^*)^2} + \frac{\mu\beta S^* b I^*}{(1 + aS^* + bI^*)^2} > 0. \end{aligned}$$

从而特征根总有负实部,故若存在疾病平衡点 $E: (S^*, I^*)$, 则疾病平衡点必是局部稳定的。因此得到如下定理。

定理 3.1.2 对于模型(3.1),

- 1) $\mathcal{R} < 1$, 疾病消除平衡点 $E_0: (S_0, 0)$ 是局部稳定的;
- 2) $\mathcal{R} > 1$, 疾病平衡点 $E^*: (S^*, I^*)$ 是局部稳定的; 疾病消除平衡点 $E_0: (S_0, 0)$ 是不稳定的。

3.2 随机 SIS 传染病模型(1.3)的定性分析

定义

$$\mathcal{R}^* = R - \frac{\sigma^2 A^2}{2(\mu + aA)^2(\mu + \alpha + r)}.$$

定理 3.2.1 若条件(1) $\sigma > \max\left\{\frac{\beta}{\sqrt{2(\mu + \alpha + r)}}, \sqrt{\frac{\beta(\mu + aA)}{A}}\right\}$, 或(2) $\sigma < \sqrt{\frac{\beta(\mu + aA)}{A}}$ 且 $\mathcal{R}^* < 1$

中的一个成立,则模型(1.1)中疾病是几乎处处灭绝的,并且有 $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \frac{A}{\mu}$ 几乎处处成立。

证明: 设初值为 $(S(0), I(0)) \in \Omega$ 。设 $(S(t), I(t))$ 是模型(1.1)的具有初值的解。在模型(1.1)的第二个方程中应用伊藤公式得

$$d\ln I(t) = \left(\frac{\beta S(t)}{1 + aS(t) + bI(t)} - (\mu + \alpha + r) - \frac{\sigma^2 S^2(t)}{2(1 + aS(t) + bI(t))^2} \right) dt + \frac{\sigma S(t) dB(t)}{1 + aS(t) + bI(t)}, \quad (3.2)$$

两边在 $[0, t]$ 上积分得

$$\ln I(t) = \int_0^t \left(\frac{\beta S(\tau)}{1 + aS(\tau) + bI(\tau)} - \frac{\sigma^2 S^2(\tau)}{2(1 + aS(\tau) + bI(\tau))^2} \right) d\tau - (\mu + \alpha + r)t + M_1(t) + \ln I(0). \quad (3.3)$$

考虑二次函数

$$g(z) = \beta z - \frac{\sigma^2}{2} z^2, z \in \left[0, \frac{A}{\mu + aA}\right]. \quad (3.4)$$

显然当 $\sigma \geqslant \sqrt{\frac{\beta(\mu + aA)}{A}}$ 时, 函数 $g(z)$ 在 $z = \frac{\beta}{\sigma^2}$ 处取得最大值 $g_{\max} = \frac{\beta^2}{2\sigma^2}$ 。若 $\sigma < \sqrt{\frac{\beta(\mu + aA)}{A}}$, 函数 $g(z)$ 在 $z = \frac{A}{\mu + aA}$ 处取得最大值 $g_{\max} = \frac{\beta A}{\mu + aA} - \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{A}{\mu + aA}\right)^2$ 。注意到 $\frac{S(t)}{1 + aS(t) + bI(t)} \in \left[0, \frac{A}{\mu + aA}\right]$, 有两种情况需要讨论。

情形 1: $\sigma^2 \geqslant \frac{\beta(\mu + aA)}{A}$

从式子(3.3)可得

$$\ln I(t) \leqslant \frac{\beta^2}{2\sigma^2} t - (\mu + \alpha + r)t + M_1(t) + \ln I(0), \quad (3.5)$$

(3.5)式两边同时除以 t ($t > 0$), 得

$$\frac{\ln I(t)}{t} \leqslant -\left(\mu + \alpha + r - \frac{\beta^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{M_1(t)}{t} + \frac{\ln I(0)}{t}, \quad (3.6)$$

由引理 2.3 知

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M_1(t)}{t} = 0.$$

式子(3.6)两边同时取上极限得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln I(t)}{t} \leqslant -\left(\mu + \alpha + r - \frac{\beta^2}{2\sigma^2}\right) < 0,$$

当 $\sigma > \frac{\beta}{\sqrt{2(\mu + \alpha + r)}}$ 时, 显然有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$ 。

情形 2: $\sigma^2 < \frac{\beta(\mu + aA)}{A}$

$$\begin{aligned} \frac{\ln I(t)}{t} &\leqslant \frac{\beta A}{\mu + aA} - \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{A}{\mu + aA} \right)^2 - (\mu + \alpha + r) + \frac{M_1(t)}{t} + \frac{\ln I(0)}{t} \\ &= (\mu + \alpha + r) \left(\frac{\beta A}{(\mu + aA)(\mu + \alpha + r)} - \frac{A^2 \sigma^2}{2(\mu + aA)^2(\mu + \alpha + r)} - 1 \right) + \frac{M_1(t)}{t} + \frac{\ln I(0)}{t}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

(3.7)式两边同时取上极限得

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln I(t)}{t} \leqslant (\mu + \alpha + r)(R^* - 1),$$

若 $R^* < 1$ 则有 $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln I(t)}{t} < 0$ 几乎处处成立, 从而有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$ 几乎处处成立。

接下来, 证明 $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \frac{A}{\mu}$ 。设 $0 < \epsilon \leqslant 1$, 由 $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$, 当 t 足够大的时候, 可以得到 $0 < I(t) < \epsilon$ 。

通过系统(1.1)的第一个方程式, 得到:

$$\frac{dS(t)}{dt} \geqslant \mu - (\mu + \beta \epsilon + \sigma \epsilon |B(t)|) S(t), \quad (3.8)$$

在上式中令 $\epsilon \rightarrow 0$, 得到

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} S(t) \geqslant \frac{A}{\mu}, \quad (3.9)$$

另一方面, 由引理 2.2, 可以得到

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} S(t) \leqslant \frac{A}{\mu}, \quad (3.10)$$

从而由方程(3.9)与(3.10)知

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \frac{A}{\mu}$$

几乎处处成立, 证毕。

定理 3.2.2 若 $R^* > 1$, 则模型的疾病 $I(t)$ 是持久的, 并且有

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \langle I(t) \rangle = \frac{(\mu + aA)(\mu + \alpha + r)}{\beta(\mu + \alpha) + b\mu(\mu + \alpha + r)} (R^* - 1).$$

证明: 对式(1.1)两端同时求从 0 到 t 求积分, 并两边同时除以 $t (> 0)$, 可以得到

$$\begin{aligned} \Theta(t) &= \frac{S(t) - S(0)}{t} + \frac{I(t) - I(0)}{t} \\ &= A - \mu \langle S(t) \rangle - (\mu + \alpha) \langle I(t) \rangle, \end{aligned}$$

接着可以得到

$$\langle S(t) \rangle = \frac{A}{\mu} - \frac{\mu + \alpha}{\mu} \langle I(t) \rangle - \frac{\Theta(t)}{\mu}, \quad (3.11)$$

应用 Itô 公式得

$$\begin{aligned} &d \left(\left(1 + a \frac{A}{\mu} \right) \ln I(t) + bI(t) \right) \\ &\geqslant \left\{ \left(1 + a \frac{A}{\mu} \right) \beta S(t) - \left(1 + a \frac{A}{\mu} \right) (\mu + \alpha + r) - \frac{1}{2} \left(1 + a \frac{A}{\mu} \right) \sigma^2 \left(\frac{A}{\mu + aA} \right)^2 \right\} dt \\ &+ b \left[\frac{\beta S(t) I(t)}{1 + a \frac{A}{\mu} + bI(t)} - (\mu + \alpha + r) I(t) \right] dt + \frac{\left(1 + a \frac{A}{\mu} \right) \sigma S(t) dB(t)}{1 + a \frac{A}{\mu} + bI(t)} + \frac{b \sigma S(t) I(t) dB(t)}{1 + a \frac{A}{\mu} + bI(t)} \end{aligned}$$

$$\geq \left[\beta S(t) - \left(1 + a \frac{A}{\mu} \right) (\mu + \alpha + r) - b(\mu + \alpha + r) I(t) - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\left(\frac{A}{\mu} \right)^2}{1 + a \frac{A}{\mu}} \right] dt + \sigma S(t) dB(t). \quad (3.12)$$

上式从 0 到 t 求积分, 然后方程两边同时除以 $t (> 0)$ 得

$$\begin{aligned} & \left(1 + a \frac{A}{\mu} \right) \frac{\ln I(t) - \ln I(0)}{t} + b \frac{I(t) - I(0)}{t} \\ & \geq \beta \langle S(t) \rangle - \left(1 + a \frac{A}{\mu} \right) (\mu + \alpha + r) - b(\mu + \alpha + r) \langle I(t) \rangle - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\left(\frac{A}{\mu} \right)^2}{1 + a \frac{A}{\mu}} + \frac{M_2(t)}{t} \\ & = \left(1 + a \frac{A}{\mu} \right) (\mu + \alpha + r) \left[\frac{\beta \frac{A}{\mu}}{\left(1 + a \frac{A}{\mu} \right) (\mu + \alpha + r)} - \frac{\frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{A}{\mu} \right)^2}{\left(1 + a \frac{A}{\mu} \right)^2 (\mu + \alpha + r)} - 1 \right] \\ & \quad - \left(\beta \frac{\mu + \alpha}{\mu} + b(\mu + \alpha + r) \right) \langle I(t) \rangle - \beta \frac{\Theta(t)}{\mu} + \frac{M_2(t)}{t}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

不等式(3.13)可以写成

$$\begin{aligned} \langle I(t) \rangle & \geq \frac{\left(1 + a \frac{A}{\mu} \right) (\mu + \alpha + r)}{\beta \frac{\mu + \alpha}{\mu} + b(\mu + \alpha + r)} \left[\frac{\beta \frac{A}{\mu}}{\left(1 + a \frac{A}{\mu} \right) (\mu + \alpha + r)} - \frac{\frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{A}{\mu} \right)^2}{\left(1 + a \frac{A}{\mu} \right)^2 (\mu + \alpha + r)} - 1 \right] \\ & + \frac{1}{\beta \frac{\mu + \alpha}{\mu} + b(\mu + \alpha + r)} \left(\frac{M_2(t)}{t} - \beta \frac{\Theta(t)}{\mu} - \left(1 + a \frac{A}{\mu} \right) \frac{\ln I(t) - \ln I(0)}{t} + b \frac{I(t) - I(0)}{t} \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

由引理 2.3, 可以得到 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M_2(t)}{t} = 0$ 。因为 $S(t) + I(t) \leq \frac{A}{\mu}$, 因此 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{S(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I(t)}{t} = 0$, 从而

有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln I(t)}{t} = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\Theta(t)}{t} = 0$ 。

对(3.14)式两端取下极限:

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow +\infty} \langle I(t) \rangle & \geq \frac{(\mu + aA)(\mu + \alpha + r)}{\beta(\mu + \alpha) + b\mu(\mu + \alpha + r)} \left(\frac{\beta A}{(\mu + aA)(\mu + \alpha + r)} - \frac{A^2 \sigma^2}{2(\mu + aA)^2 (\mu + \alpha + r)} - 1 \right) \\ & = \frac{(\mu + aA)(\mu + \alpha + r)}{\beta(\mu + \alpha) + b\mu(\mu + \alpha + r)} (\mathcal{R}^* - 1). \end{aligned}$$

证毕。

4 数值模拟

为了验证得到的理论结果, 给出一些数值模拟。取基本参数为

$$A = 0.2, \mu = 0.4, \beta = 2, r = 0.2, \alpha = 0.1, a = 1, b = 1.$$

计算知 $\mathcal{R} = 0.9524 < 1$, 根据定理 3.2.1, 模型的疾病消除平衡点 $E_0 : (0.5, 0)$ 是局部稳定的(图 1)。若增大人口的输入率 $A = 0.5$, 此时 $\mathcal{R} = 1.5873 > 1$, 根据定理 3.2.2 知, 模型的疾病平衡点 $E^* : (0.7527, 0.3978)$ 是局部稳定的(图 2)。

下面在持久的系统上考虑随机干扰的影

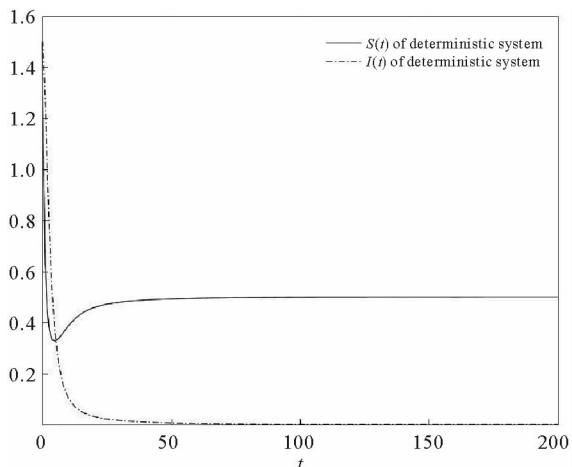


图 1 模型(1.3)的时间序列图

Fig. 1 Time series of model (1.3)

响。首先,令 $\sigma = 1.9$,满足定理 3.2.1 的第一个条件,于是疾病最终消除(图 3)。其次,令 $\sigma = 1.7$,此时, $\mathcal{R}^* = 0.9502 < 1$,满足定理 3.2.1 的第二个条件,由定理 3.2.1 知,疾病最终消除(图 4)。若令 $\sigma = 0.3$,经过计算, $\mathcal{R}^* = 1.5675 > 1$,由定理 3.2.2 知,疾病是持久的(图 5)。

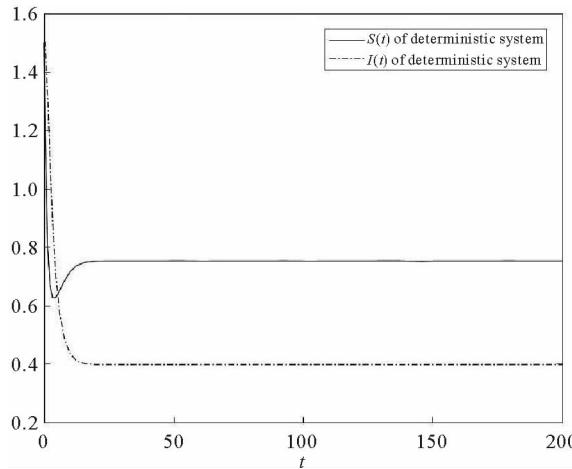


图 2 模型(1.3)的时间序列图

Fig. 2 Time series of model (1.3)

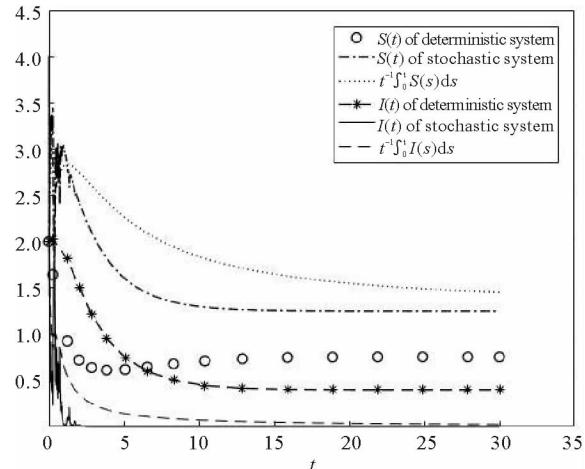


图 3 确定性模型和随机模型动力学行为对比

Fig. 3 Comparison of dynamic behavior between the deterministic model and the stochastic model

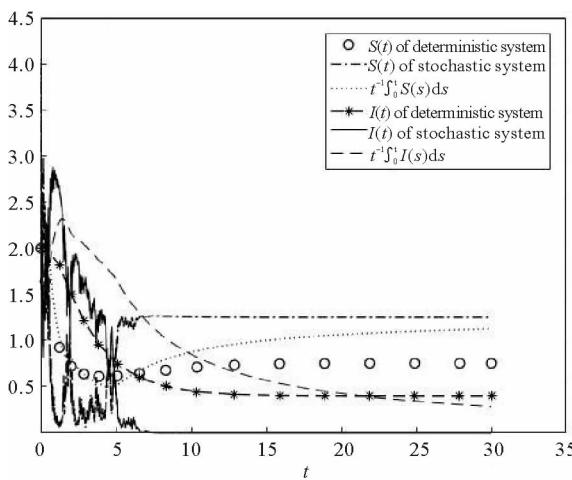


图 4 确定性模型和随机模型动力学行为对比

Fig. 4 Comparison of dynamic behavior between the deterministic model and the stochastic model

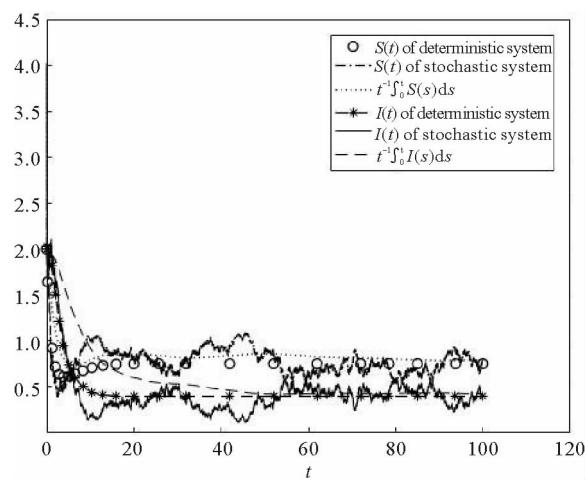


图 5 确定性模型和随机模型动力学行为对比

Fig. 5 Comparison of dynamic behavior between the deterministic model and the stochastic model

5 结论

首先综合考虑人口输入,因病死亡率等因素,建立了一类具有 Beddington-DeAngelis 型传染率的确定 SIS 传染病动力学模型,得到了疾病的基本再生数,并研究了模型平衡点的局部稳定性。接着在确定性模型的基础上考虑随机环境白噪声对传染率的影响,建立了一类具有 Beddington-DeAngelis 型传染率的随机 SIS 传染病模型,研究了该随机 SIS 传染病动力学模型的阈值动力学。结果表明,大的随机干扰($\sigma > \max\left\{\frac{\beta}{\sqrt{2}(\mu + \alpha + r)}, \sqrt{\frac{\beta(\mu + \alpha A)}{A}}\right\}$)会导致传染病的消除,当随机噪声干扰较小且阈值 $\mathcal{R}^* < 1$ 时疾病最终消除,而当阈值 $\mathcal{R}^* > 1$ 时,疾病是持久的。另外,研究发现确定性模型的基本再生数和随机模型的阈值有显著的差异,即 $\mathcal{R}^* = \mathcal{R} - \frac{\sigma^2 A^2}{2(\mu + \alpha A)^2(\mu + \alpha + r)}$, 表明随机模型灭绝的条件要比确定性模型疾病的弱,这

意味着在确定性模型中持久的疾病在环境白噪声的干扰下可能会最终消除。

参考文献:

- [1] HAMER W H. Epidemic disease in England, Lancet [M]. Bedford: Bedford Press, 1906; 733-739.
- [2] BRAUER F, CASTILLO-CHAVEZ C. Mathematical models in population biology and epidemiology [M]. 2nd Edition. New York: Springer, 2012.
- [3] MINCHIN E A. The prevention of malaria [J]. Indian Medical Gazette, 1911, 46(2): 64-66.
- [4] MAY R M, ANDERSON R M, MCLEAN A R. Possible demographic consequences of HIV/AIDS epidemics: I. Assuming HIV infection always leads to AIDS [J]. Mathematical Biosciences, 1988, 90(1): 475-505.
- [5] ANDERSON R M, MAY R M. Infectious diseases of humans: Dynamics and control [M]. Oxford: Oxford University Press, 1992.
- [6] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 等. 传染病动力学的数学建模与研究 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [7] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. A contribution to the mathematical theory of epidemics [J]. Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1927, 115: 700-721.
- [8] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. Contributions to the mathematical theory of epidemics: III. Further studies of the problem of endemicity [J]. Bulletin of Mathematical Biology, 1991, 53(1): 57-87.
- [9] XU R, MA Z E. Global stability of a SIR epidemic model with nonlinear incidence rate and time delay [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2009, 10(5): 3175-3189.
- [10] LIU W M, LEVIN S A, IWASA Y. Influence of nonlinear incidence rates upon the behavior of SIRS epidemiological models [J]. Journal of Mathematical Biology, 1986, 23(2): 187-204.
- [11] RUAN S, WANG W. Dynamical behavior of an epidemic model with a nonlinear incidence rate [J]. Journal of Differential Equations, 2003, 188(1): 135-163.
- [12] MAO X R. Stochastic differential equations and applications [M]. 2nd ed. Chichester: Horwood Publishing, 2007.
- [13] 冯涛, 孟新柱. 一类捕食者染病的捕食者-食饵系统的随机动力学行为 [J]. 山东科技大学学报(自然科学版), 2017, 36(1): 99-110.
FENG Tao, MENG Xinzhu. Stochastic dynamics of a predator-prey system with disease in predator [J]. Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science), 2017, 36(1): 99-110.
- [14] ZHAO W C, LI J, ZHANG T Q, et al. Persistence and ergodicity of plant disease model with Markov conversion and impulsive toxicant input [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2017, 48: 70-84.
- [15] MENG X Z, ZHAO S N, FENG T, et al. Dynamics of a novel nonlinear stochastic SIS epidemic model with double epidemic hypothesis [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015, 433(1): 227-242.
- [16] CHANG Z B, MENG X Z, LU X. Analysis of a novel stochastic SIRS epidemic model with two different saturated incidence rates [J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2017, 472: 103-116.
- [17] MIAO A Q, ZHANG J, ZHANG T Q, et al. Threshold dynamics of a stochastic SIR model with vertical transmission and vaccination [J]. Computational and Mathematical Methods in Medicine, 2017: 4820183.
- [18] MIAO A, WANG X, ZHANG T, et al. Dynamical analysis of a stochastic SIS epidemic model with nonlinear incidence rate and double epidemic hypothesis [J]. Advances in Difference Equations, 2017(1): 226.
- [19] LIU Q, JIANG D Q, SHI N Z, et al. Stationary distribution and extinction of a stochastic SIRS epidemic model with standard incidence [J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2017, 469: 510-517.
- [20] DU N H, NHU N N. Permanence and extinction of certain stochastic SIR models perturbed by a complex type of noises [J]. Applied Mathematics Letters, 2017, 64: 223-230.
- [21] LI C G, PEI Y Z, LIANG X Y, et al. A stochastic toxoplasmosis spread model between cat and oocyst with jumps process [J]. Communications in Mathematical Biology and Neuroscience, 2016, Article ID 18.
- [22] BERETTA E, KOLMANOVSKII V, SHAIKHET L. Stability of epidemic model with time delays influenced by stochastic perturbations [J]. Mathematics and Computers in Simulation, 1998, 45(3/4): 269-277.
- [23] LIU M, BAI C Z, WANG K. Asymptotic stability of a two-group stochastic SEIR model with infinite delays [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014, 19(10): 3444-3453.