引用格式:董梅，刘汉泽. G'/G 展开法在(3+1)维 KP 方程中的应用[J]. 山东科技大学学报(自然科学版)，2018，37(2):47-52.

DONG Mei，LIU Hanze. Application of (G'/G)-expansion method for (3+1)-dimensional KP equation[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science)，2018，37(2):47-52.

G'/G 展开法在(3+1)维 KP 方程中的应用

董　梅，刘汉泽

(聊城大学 数学科学学院，山东 聊城 252059)

摘　要:运用行波变换、齐次平衡原理和 G'/G 展开法研究 Kadomtsev-Petviashvili (KP)方程，讨论了 KP 方程的 G'/G 解的存在性及其求解过程，得到了 KP 方程所有的 G'/G 解。

关键词:KP 方程；行波变换；齐次平衡原理；G'/G 展开法；精确解

中图分类号:O175.2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-3767(2018)02-0047-06

DOI: 10.16452/j.cnki.sdkjzk.2018.02.007

Application of (G'/G)-expansion Method for (3+1)-dimensional KP Equation

DONG Mei，LIU Hanze

(School of Mathematical Sciences，Liaocheng University，Liaocheng，Shandong 252059，China)

Abstract: This paper studies the (3+1)-dimensional KP equation by applying traveling wave transformation，the homogeneous balance principle and (G'/G)-expansion method. It also discusses the existence of the possible (G'/G)-expansion solutions to the (3+1)-dimensional KP equation and obtains all the (G'/G) solutions to the equations.

Key words: KP equation; traveling wave transformation; homogeneous balance principle; (G'/G)-expansion method; exact solution

在数学物理、工程力学等许多领域中，存在着大量的模型可以用偏微分方程来描述。例如，热流动、波的传播、大部分人口统计模型以及化学反应性材料的色散现象等。另外，流体动力学、量子力学、电力学、离子体物理浅水波的传播等都需要偏微分方程来刻画。因此，非线性发展方程得到人们的广泛关注[1]，许多学者也在非线性方程求解这一领域取得了巨大的成就[1]。在非线性波及孤立子理论的物理问题中，KP 方程占有重要的位置[2,3]，本文研究(3+1)维 KP 方程

$$(u_t+6u^n u_x+ru_{xxx})_x+\alpha u_{yy}+\beta u_{zz}=0$$

其中，$u=u(t,x,y,z)$为未知函数，r、α、β 为任意常数，n 为待定常数。

关于求解非线性偏微分方程精确解已经有很多方法，如齐次平衡法[4,5,6,11]、双曲函数法[7]、Hirota 方法[10]和 Jacobi 椭圆函数展开法[4,8]等。本文将运用 G'/G 展开法[11-19]和齐次平衡原理[4-6]求解 KP 方程精确行波解。

收稿日期:2017-04-07

基金项目:国家自然科学基金项目(11171041)

作者简介:董　梅(1991—)，女，山东聊城人，硕士研究生，主要从事微分方程理论方面的研究. E-mail:834322815@qq.com

刘汉泽(1962—)，男，山东滨州人，教授，博士，主要从事微分方程理论与应用方面的研究，本文通信作者. E-mail: hnz_liu@aliyun.com

1 (3+1)维 KP 方程

对于方程

$$(u_t+6u^n u_x+ru_{xxx})_x+\alpha u_{yy}+\beta u_{zz}=0, \tag{1.1}$$

首先作行波变换

$$u(x,t)=u(\xi),\xi=x+y+z-Ct, \tag{1.2}$$

其中 C 为波速。

将式(1.2)代入(1.1),化简可得到关于 $u=u(\xi)$的方程

$$-Cu''+6nu^{n+1}u'^2+6uu''+ru^{(4)}+\alpha u''+\beta u''=0。 \tag{1.3}$$

对(1.3)求一次积分,得

$$-Cu'+6u^n u'+ru^m+\alpha u'+\beta u'=A, \tag{1.4}$$

其中,A 为积分常数。

假设方程(1.4)的解能够表示成如下形式:

$$u(\xi)=\alpha_m\left(\frac{G'}{G}\right)^m+\cdots, \tag{1.5}$$

这里 $G=G(\xi)$,并且满足二阶线性常微分方程

$$G''+\lambda G'+\mu G=0。 \tag{1.6}$$

由(1.4)式和(1.5)式求得

$$u(\xi)=\alpha_m\left(\frac{G'}{G}\right)^m+\cdots, \tag{1.7}$$

$$u'=-m\alpha_m\left(\frac{G'}{G}\right)^{m+1}+\cdots, \tag{1.8}$$

$$u^n u'=-m\alpha_m^{n+1}\left(\frac{G'}{G}\right)^{mn+m+1}+\cdots, \tag{1.9}$$

$$u^m=-m(m+1)(m+2)\alpha_m\left(\frac{G'}{G}\right)^{m+3}+\cdots, \tag{1.10}$$

把式(1.5)~(1.9)代入式(1.4)后,平衡最高阶导数项 u^m 和非线性项 $u^n u'$的指数,即 $mn+m+1=m+3$,$mn=2$。

1) 当 $n=1$ 时,

$$(u_t+6uu_x+ru_{xxx})_x+\alpha u_{yy}+\beta u_{zz}=0, \tag{1.11}$$

平衡最高阶导数项 u^m 和非线性项 uu'的指数,即 $m=2$,故方程(1.1)可能存在 G'/G 解。

2) 当 $n=2$ 时,

$$(u_t+6u^2u_x+ru_{xxx})_x+\alpha u_{yy}+\beta u_{zz}=0, \tag{1.12}$$

平衡最高阶导数项 u^m 和非线性项 u^2u'的指数,即 $m=1$,故方程(1.1)可能存在 G'/G 解。

综上所述,当 $n=1,2$ 时方程(1.1)可能有 G'/G 解。

2 KP 方程的 G'/G 解

1) 当 $n=1,m=2$ 时,形式解为

$$u(\xi)=\alpha_2\left(\frac{G'}{G}\right)^2+\alpha_1\left(\frac{G'}{G}\right)+\alpha_0,\alpha_2\neq 0。 \tag{2.1}$$

同样求得

$$uu' = -2\alpha_2^2\left(\frac{G'}{G}\right)^5 - (2\lambda\alpha_2^2 + 3\alpha_1\alpha_2)\left(\frac{G'}{G}\right)^4 - (3\lambda\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_0\alpha_2 + 2\mu\alpha_2^2 + \alpha_1^2)\left(\frac{G'}{G}\right)^3$$
$$-(3\alpha_1\alpha_2\mu + \alpha_1\lambda + 2\alpha_1\alpha_2\lambda + \alpha_0\alpha_1)\left(\frac{G'}{G}\right)^2 - (\alpha_1^2\mu + \alpha_0\alpha_1\lambda + 2\alpha_0\alpha_2\mu)\left(\frac{G'}{G}\right) - \alpha_0\alpha_1\mu, \tag{2.2}$$

$$u^m = -24\alpha_2\left(\frac{G'}{G}\right)^5 - (54\lambda\alpha_2 + 6\alpha_1)\left(\frac{G'}{G}\right)^4 - (40\mu\alpha_2 + 38\lambda^2\alpha_2 + 12\lambda\alpha_1)\left(\frac{G'}{G}\right)^3$$
$$-(52\lambda\mu\alpha_2 + 8\mu\alpha_1 + 7\lambda^2\alpha_1 + 8\lambda^3\alpha_2)\left(\frac{G'}{G}\right)^2 - (16\mu^2\alpha_2 + 8\lambda\mu\alpha_1 + 14\lambda^2\mu\alpha_2 + \lambda^3\alpha_1)\left(\frac{G'}{G}\right)$$
$$-6\lambda\mu^2\alpha_2 - 2\mu^2\alpha_1 - \alpha_1\mu\lambda^2, \tag{2.3}$$

把式(2.1)～(2.3)代入式(1.4)中，求得

$$(-12\alpha_2^2 - 24\alpha_2)\left(\frac{G'}{G}\right)^5 - (12\lambda\alpha_2^2 + 54\lambda\alpha_2 + 18\alpha_1\alpha_2 + 6\alpha_1)\left(\frac{G'}{G}\right)^4$$
$$-(12\mu\alpha_2^2 + 38\lambda^2\alpha_2 + 18\lambda\alpha_1\alpha_2 - 2C\alpha_2 + 40\mu\alpha_2 + 2\alpha\alpha_2 + 2\beta\alpha_2 + 12\lambda\alpha_1 + 12\alpha_0\alpha_2 + 6\alpha_1^2)\left(\frac{G'}{G}\right)^3$$
$$-(8\lambda^3\alpha_2 - 2C\lambda\alpha_2 + 52\mu\lambda\alpha_2 + 18\mu\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha\lambda\alpha_2 + 2\beta\lambda\alpha_2 + 7\lambda^2\alpha_1$$
$$+ 12\lambda\alpha_0\alpha_2 + 6\lambda\alpha_1^2 - C\alpha_1 + 8\mu\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \beta\alpha_1 + 6\alpha_0\alpha_1)\left(\frac{G'}{G}\right)^2$$
$$+(14\mu\lambda^2\alpha_2 + \lambda^3\alpha_1 - 2C\mu\alpha_2 - C\lambda\alpha_1 + 16\mu^2\alpha_2 + 2\mu\alpha\alpha_2 + 8\mu\lambda\alpha_1 + 12\mu\alpha_0\alpha_2 + 6\mu\alpha_1^2 + \alpha\lambda\alpha_1 + \beta\lambda\alpha_1 + 6\lambda\alpha_0\alpha_1)\left(\frac{G'}{G}\right)$$
$$-6\alpha_2\mu^2\lambda - \alpha_1\mu\lambda^2 + C\mu\alpha_1 - 2\alpha_1\mu^2 - \alpha\mu\alpha_1 - \beta\mu\alpha_1 - 6\mu\alpha_1\alpha_0 + A。 \tag{2.4}$$

令(2.4)式中$\frac{G'}{G}$各次项的系数为 0，就可得到关于未知量 $\alpha_2,\alpha_1,\alpha_0,A$ 的方程组：

$$\begin{cases} -12\alpha_2^2 - 24\alpha_2 = 0, & (2.5)\\ -(12\lambda\alpha_2^2 + 54\lambda\alpha_2 + 18\alpha_1\alpha_2 + 6\alpha_1) = 0, & (2.6)\\ -(12\mu\alpha_2^2 + 38\lambda^2\alpha_2 + 18\lambda\alpha_1\alpha_2 - 2C\alpha_2 + 40\mu\alpha_2 + 2\alpha\alpha_2 + 2\beta\alpha_2 + 12\lambda\alpha_1 + 12\alpha_0\alpha_2 + 6\alpha_1^2) = 0, & (2.7)\\ -(8\lambda^3\alpha_2 - 2C\lambda\alpha_2 + 52\mu\lambda\alpha_2 + 18\mu\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha\lambda\alpha_2 + 2\beta\lambda\alpha_2 + 7\lambda^2\alpha_1 & \\ \quad + 12\lambda\alpha_0\alpha_2 + 6\lambda\alpha_1^2 - C\alpha_1 + 8\mu\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \beta\alpha_1 + 6\alpha_0\alpha_1) = 0, & (2.8)\\ 14\mu\lambda^2\alpha_2 + \lambda^3\alpha_1 - 2C\mu\alpha_2 - C\lambda\alpha_1 + 16\mu^2\alpha_2 + 2\mu\alpha\alpha_2 + 8\mu\lambda\alpha_1 + 12\mu\alpha_0\alpha_2 + 6\mu\alpha_1^2 + \alpha\lambda\alpha_1 + \beta\lambda\alpha_1 + 6\lambda\alpha_0\alpha_1) = 0, & (2.9)\\ -6\alpha_2\mu^2\lambda - \alpha_1\mu\lambda^2 + C\mu\alpha_1 - 2\alpha_1\mu^2 - \alpha\mu\alpha_1 - \beta\mu\alpha_1 - 6\mu\alpha_1\alpha_0 + A = 0。 & (2.10) \end{cases}$$

求解方程组(2.5)～(2.10)，可得

$$A = 0, \tag{2.11}$$
$$\alpha_1 = -2\lambda, \tag{2.12}$$
$$\alpha_2 = -2, \tag{2.13}$$
$$C = \lambda^2 + 8\mu + \alpha + \beta + 6\alpha_0。 \tag{2.14}$$

将式(2.11)～(2.14)代入式(2.1)，求得

$$u(\xi) = -2\left(\frac{G'}{G}\right)^2 - 2\lambda\left(\frac{G'}{G}\right) + \alpha_0, \tag{2.15}$$

其中，$C = x + y + z - (\lambda^2 + 8\mu + \alpha + \beta + 6\alpha_0)t$。 (2.16)

把(1.5)式代入(2.15)式，可以得到以下三种形式的解：

当 $\lambda^2 - 4\mu > 0$ 时，

$$u_1(\xi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \times \frac{\left(C_1\sinh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\xi + C_2\cosh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\xi\right)}{\alpha\left(C_1\cosh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\xi + C_2\sinh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\xi\right)} + \frac{\lambda^2}{2} + \alpha_0,$$

其中，$\xi = x + y + z - (\lambda^2 + 8\mu + \alpha + \beta + 6\alpha_0)t$，$C_1$，$C_2$ 均为任意常数。

当 $\lambda^2-4\mu<0$ 时,

$$u_1(\xi)=-\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\times\frac{(C_1\sin\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi+C_2\cos\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi)}{\alpha(C_1\cos\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi+C_2\sin\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi)}+\frac{\lambda^2}{2}+\alpha_0,$$

其中,$\xi=x+y+z-(\lambda^2+8\mu+\alpha+\beta+6\alpha_0)t$,$\alpha_0$,$C_1$,$C_2$ 均为任意常数。

当 $\lambda^2-4\mu=0$ 时,$u_3(\xi)=-\frac{2C_2}{(C_1+C_2\xi)}+\frac{\lambda^2}{2}+\alpha_0$,

其中,$\xi=x+y+z-(\lambda^2+8\mu+\alpha+\beta+6\alpha_0)t$,$\alpha_0$、$C_1$、$C_2$ 均为任意常数。

2) 当 $n=2$,$m=1$ 时,根据讨论,得到

$$u(\xi)=\beta_1\left(\frac{G'}{G}\right)+\beta_0,\beta_1\neq0。\tag{2.17}$$

同样地求得:

$$u'(\xi)=-\beta_1\left(\frac{G'}{G}\right)^2-\lambda\beta_1\left(\frac{G'}{G}\right)-\mu\beta_1,\tag{2.18}$$

$$u''(\xi)=2\beta_1\left(\frac{G'}{G}\right)^3+3\lambda\beta_1\left(\frac{G'}{G}\right)^2+(2\mu\beta_1+\lambda^2\beta_1)\left(\frac{G'}{G}\right)+\lambda\mu\beta_1,\tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}uu''(\xi)=&\ 2\beta_1^2\left(\frac{G'}{G}\right)^4+(3\lambda\beta_1^2+2\beta_0\beta_1)\left(\frac{G'}{G}\right)^3+(2\mu\beta_1^2+\lambda^2\beta_1^2+3\lambda\beta_0\beta_1)\left(\frac{G'}{G}\right)^2+\lambda\mu\beta_1^2\\&+2\mu\beta_0\beta_1+\lambda^2\beta_0\beta_1)\left(\frac{G'}{G}\right)+\lambda\mu\beta_0\beta_1,\end{aligned}\tag{2.20}$$

$$\vdots$$

把式(2.17)~(2.20)代入式(1.12)中,得到关于$\left(\frac{G'}{G}\right)^i(i=1,2,3,4,5)$的超定代数方程:

$$\begin{aligned}&(24\beta_1^3+24\beta_1)\left(\frac{G'}{G}\right)^5+(42\lambda_1^3+36\beta_1\beta_2^2+60\lambda\beta_1)\left(\frac{G'}{G}\right)^4\\&+(60\lambda\beta_0\beta_1^2+36\mu\beta_1^3+40\mu\beta_1-2C\beta_1+2\beta\beta_1+50\lambda^2\alpha_1+2\alpha\beta_1+50\lambda^2\beta_1+2\alpha\beta_1+18\lambda^2\beta_1^3+12\beta_0^2\beta_1)\left(\frac{G'}{G}\right)^3\\&+(60\mu\lambda\beta_1+48\mu\beta_0\beta_1^2+3\alpha\lambda\beta_1+24\lambda^2\beta_0\beta_1+3\beta\lambda\beta_1+15\lambda^3\beta_1+30\mu\lambda\beta_1^3-3c\lambda\beta_1+18\lambda\alpha_0^2\beta_1)\left(\frac{G'}{G}\right)^2\\&+(36\mu\lambda\beta_0\beta_1^2+6\lambda^2\beta_0^2\alpha_1-c\lambda^2\beta_1+22\mu\lambda^2\beta_1+2\mu\alpha\beta_1-2c\mu\beta_1\\&+2\mu\beta\beta_1+12\mu^2\beta_1^3+12\mu\beta_0^2\beta_1+\lambda^4\beta_1+16\mu^2\beta_1+\beta\lambda^2\beta_1+\alpha\beta_1\lambda^2)\left(\frac{G'}{G}\right)+\mu\lambda^3\beta_1+8\mu^2\lambda\beta_1\\&+6\mu\lambda\beta_0^2\beta_1+\mu\alpha\lambda\beta_1-c\mu\lambda\beta_1+12\mu^2\beta_0\beta_1^2+\mu\beta\lambda\beta_1。\end{aligned}\tag{2.21}$$

令(2.21)式中$\frac{G'}{G}$各次项的系数为 0,就可得到关于未知量 β_1 和 C 的一个方程组:

$$\begin{cases}24\beta_1^3+24\beta_1=0, & (2.22)\\42\lambda_1^3+36\beta_1\beta_2^2+60\lambda\beta_1=0, & (2.23)\\60\lambda\beta_0\beta_1^2+36\mu\beta_1^3+40\mu\beta_1-2C\beta_1+2\beta\beta_1+50\lambda^2\alpha_1+2\alpha\beta_1+50\lambda^2\beta_1+2\alpha\beta_1+18\lambda^2\beta_1^3+12\beta_0^2\beta_1=0, & (2.24)\\60\mu\lambda\beta_1+48\mu\beta_0\beta_1^2+3\alpha\lambda\beta_1+24\lambda^2\beta_0\beta_1+3\beta\lambda\beta_1+15\lambda^3\beta_1+30\mu\lambda\beta_1^3-3c\lambda\beta_1 18\lambda\beta_0^2\beta_1=0, & (2.25)\\36\mu\lambda\beta_0\beta_1^2+6\lambda^2\beta_0^2\alpha_1-c\lambda^2\beta_1+22\mu\lambda^2\beta_1+2\mu\alpha\beta_1-2c\mu\beta_1+2\mu\beta\beta_1+12\mu^2\beta_1^3+12\mu\beta_0^2\beta_1 & \\+\lambda^4\beta_1+16\mu^2\beta_1+\beta\lambda^2\beta_1+\alpha\beta_1\lambda^2=0, & (2.26)\\\mu\lambda^3\beta_1+8\mu^2\lambda\beta_1=0, & (2.27)\end{cases}$$

解以上超定方程组得 $\beta_1=0$,$C=0$,与假定条件 $\beta_1\neq0$ 矛盾,故当 $n=2$ 时,方程(1.1)不存在$\frac{G'}{G}$形式的解。

3　结论

本文探讨了 G'/G 展开法在求 KP 方程精确解中的应用。由上述讨论，得到了新的周期函数解、指数函数解以及包含更多参数的精确解。推广的 KP 方程有多种形式的精确解，应用范围广泛，应用本文的方法，不仅能够求出推广的 KP 方程的 G'/G 解，也可以求出其他非线性方程的精确解。

参考文献：

[1]刘睿. 相容性方法在求解变系数发展方程中的应用[J]. 河北师范大学学报(自然科学版)，2011，35(5)：442-447.
LIU Rui. Applications of the compatible method to solving variable coefficient evolution equation[J]. Journal of Heibei Normal University (Natural Science)，2011，35(5)：442-447.

[2]范恩贵，张鸿庆. 非线性波动方程的孤波解[J]. 物理学报，1997，46(7)：1254-1258.
FAN Engui，ZHANG Hongqing. The solitary wave solutions for a class of nonlinear wave equations[J]. Journal of Physics，1997，46(7)：1254-1258.

[3]郝瑞宇. 可变参量光纤系统中光脉冲的传播的特征研究[D]. 太原：山西大学，2007：44-71.

[4]王明亮，李志斌，周宇斌. 齐次平衡原则及其应用[J]. 兰州大学学报(自然科学版)，1999，35(3)：8-16.
WANG Mingliang，LI Zhibin，ZHOU Yubin. Homogeneous balance principle and its application[J]. Journal of Lanzhou University (Natural Science)，1999，35(3)：8-16.

[5]刘式适，傅遵涛，刘式达，等. Jacobi 椭圆函数展开法及其在求解非线性波动方程中的应用[J]. 物理学报，2001，50(11)：2068-2073.
LIU Shikuo，FU Zuntao，LIU Shida，et al. Expansion method about the Jacobi elliptic function and its applications to nonlinear ware equations[J]. Journal of Physics，2001，50(11)：2068-2073.

[6]张辉群. 齐次平衡方法的扩展及应用[J]. 数学物理学报，2001，21(3)：321-325.
ZHANG Huiqun. Extension and applications of the homogeneous balance method[J]. Journal of Mathematical Physics，2001，21(3)：321-325.

[7]扎其劳. 修正双曲函数与非线性发展方程的精确解[J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学版)，2007，36(1)：15-21.
ZHA Qilao. Modified hyperbolic function method and exact solutions to nonlinear evolution equations[J]. Journal of Inner Mongolia Normal University (Natural Science)，2007，36(1)：15-21.

[8]赵云梅，芮伟国. Equal Width 波方程的各种椭圆函数周期解和孤子解[J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2008，31(2)：190-193.
ZHAO Yunmei，RUI Weiguo. All kinds of the periodic solutions of Jacobian elliptic function type and the solutions for Equal Width wave equation[J]. Journal of Sichuan Normal University (Natural Science)，2008，31(2)：190-193.

[9]韩家骅，陈良，徐勇，等. 组合及二维 KdV 方程的显式精确解[J]. 安徽大学学报(自然科学版)2004，28(1)：35-41.
HAN Jiahua，CHEN Liang，XU Yong，et al. Explicit exact solutions to the combined KdV equation and two-dimensional KdV equation[J]. Journal of Anhui University (Natural Science)，2004，28(1)：35-41.

[10]林麦麦，段文山，吕克璞. Hirota 方法求解 KP 方程的多孤子解[J]. 西北师范大学学报(自然科学版)，2004，40(3)：26-34.
LIN Maimai，DUAN Wenshan，LÜ Kepu. The muliti-soliton solution of KP equation by Hirota method[J]. Journal of Northwest Normal University (Natural Science)，2004，40(3)：26-34.

[11]张国栋，秦清锋. 齐次平衡法在微分方程中的应用[J]. 中国新技术新产品，2010(21)：243-244.
ZHANG Guodong，QIN Qingfeng. Application of homogeneous balance method in differential equation[J]. Journal of New Technology and New Products in China，2010(21)：243-244.

[12]施业琼. 应用(G'/G)-展开法求解高阶非线性薛定谔方程[J]. 广西工学院学报，2009，20(3)：45-49.

SHI Yeqiong. Solving the higher-order nonlinear Schrodinger equation by the $(G')/(G)$-expansion method[J]. Journal of Guangxi Institute of Technology,2009,20(3):45-49.

[13]牛艳霞,李二强,张金良. 利用(G'/G)-展开法求解 2+1 维破裂孤子方程组[J]. 河南科技大学学报(自然科学版),2008,29(5):73-76.

NIU Yanxia,LI Erqiang,ZHANG Jinliang. (G'/G)-expansion method to solve the 2+1 dimensional breaking solition equations[J]. Journal of Henan University of Science and Technology (Natural Science),2008,29(5):73-76.

[14]李帮庆,马玉兰. (G'/G)展开法和(2+1)维非对称 Nizhnik-Novikov-Veselov 系统的新精确解[J]. 物理学报,2009,58(7):4373-4378.

LI Bangqing,MA Yulan. (G'/G)-expansion method and new exact solutions for (2+1)-dimensional asymmetrical Nizhnik-Novikov-Veselov system[J]. Journal of physics,2009,58(7):4373-4378.

[15]WANG M L, LI X Z,ZHANG J L. The (G'/G)-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics[J]. Physics Letters A,2008,372(4):417-423.

[16]郭冠平,周国中,何宝钢. G'/G 展开法对非线性耦合 Klein-Gordon 方程组的精确解磁[J]. 浙江师范大学学报(自然科学版),2010,33(3):286-290.

GUO Guanping,ZHOU Guozhong,HE Baogang. G'/G expansion method for nonlinear exact solutions of magnetic coupling Klein-Gordon equation set[J]. Journal of Zhejiang Normal University (Natural Science),2010,33(3):286-290.

[17]魏帅帅,李凯辉,刘汉泽. G'/G 展开法在 Riccati 方程中的应用[J]. 河南科技大学版(自然科学版),2015,36(5):92-96.

WEI Shuaishuai,LI Kaihui,LIU Hanze. G'/G expansion method in the application of Riccati equation [J]. Journal of Henan University of Science and Technology (Natural Science),2015,36(5):92-96.

[18]LIU Hanze,XIN Xiangpeng. Symmetries,integrability and exact solutions to the (2+1)-dimensional Benney types of equations[J]. Communications in Theoretic at Physics,2016,66(8):155-162.

[19]张丽香,刘汉泽,辛祥鹏. 广义(3+1)维 Zakharov-Kuznetsov 方程的对称、约化、精确解和守恒率[J]. 物理学报,2017,66(8):1-7.

ZHANG Lixiang,LIU Hanze,XIN Xiangpeng. Symmetry reductions,exact equation and the conservation laws of the generalized (3+1) dimensional Zakharov-Kuznetsov equation[J]. Journal of Physics,2017,66(8):1-7.

(责任编辑:傅　游)