引用格式: 郭琳,斯仁道尔吉.非线性分数阶KdV-mKdV方程和mCH方程的孤波解[J].山东科技大学学报(自然科学版),2019,38(1):68-73.
GUO Lin,Sirendaoerji. Solitary wave solutions of the nonlinear fractional KdV-mKdV equation and modified Camassa-Holm equation[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology(Natural Science),2019,38(1):68-73.

非线性分数阶KdV-mKdV方程和mCH方程的孤波解

郭　琳,斯仁道尔吉
(内蒙古师范大学 数学科学学院,内蒙古 呼和浩特 010022)

摘　要: 利用修正的黎曼-刘维尔导数及其性质,借助拟设法求解时空分数阶KdV-mKdV方程和时间分数阶Modified Camassa-Holm方程的孤波解。该方法也适用于求解数学物理领域中出现的其他类型的非线性分数阶微分方程。

关键词: 修正的黎曼-刘维尔导数;拟设法;孤波解;亮孤子解
中图分类号: O175.29　**文献标志码:** A　**文章编号:** 1672-3767(2019)01-0068-06
DOI: 10.16452/j.cnki.sdkjzk.2019.01.008

Solitary wave solutions to nonlinear fractional KdV-mKdV equation and modified Camassa-Holm equation

GUO Lin, Sirendaoerji
(College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University,
Hohhot, Inner Mongolia 010022, China)

Abstract: With the aid of the modified Riemann-Liouville derivative and its properties, the solitary wave solutions to nonlinear fractional differential KdV-mKdV equation and modified Camassa-Holm equation are obtained by using the ansatz method. This method can also be used to solve other types of nonlinear fractional differential equations in mathematical physics.

Key words: modified Riemann-Liouville derivative; the ansatz method; solitary wave solution; bright soliton solution

分数阶微分方程是广义的整数阶微分方程的经典形式。非线性分数阶偏微分方程在力学、工程学、电学、等离子体物理、生物学、控制论、经济学和金融等许多科学和工程领域中有着重要应用,受到极大关注,其研究工作日趋活跃[1]。首次积分法[2]、G'/G-展开法[3]、exp函数法[4]、扩展双曲正切函数法[5]、F-展开法[6]等诸多方法被先后应用于求解非线性分数阶偏微分方程。2008年至2009年,Biswas、Triki和Wazwaz[7]提出了求解非线性分数阶偏微分方程另一种方法——拟设法,并用该方法给出KdV和mKdV等方程的亮孤

收稿日期: 2018-03-20
基金项目: 国家自然科学基金项目(11261037,10461006);内蒙古自然科学基金项目(2014MSO111);内蒙古高等学校"青年科技英才支持计划青年科技领军人才"项目(NJYT14A04);内蒙古自治区研究生教育创新计划基金项目(CXJJS17073)
作者简介: 郭　琳(1993—),女,河南南阳人,硕士研究生,主要从事孤立子与可积系统理论及其应用方面的研究.
E-mail:44352325@qq.com
斯仁道尔吉(1954—),男,内蒙古锡林浩特人,教授,博士生导师,主要从事孤立子与可积系统理论及应用的研究,本文通信作者.E-mail:siren@imnu.edu.cn

子解和暗孤子解。2015 年，Guner 等[8]求解了时空分数阶 Boussinesq 方程的亮孤子解和单孤子解。2016 年，Guner 和 Bekir[9]利用拟设法求解了时空分数阶 mBBM 方程的亮孤子解和暗孤子解，同一年，Korkmaz[10]利用拟设法求解了时空分数阶 EW 和 mEW 方程的单孤子解。2017 年，Guner 和 Bekir[11]利用拟设法求解了时空分数阶 mEW 方程的暗孤子解。但他们只处理了包含单独的 sech 函数或 tanh 函数的情形，未考虑包含 sech 和 tanh 函数的乘积项的情形。本研究把拟设法推广应用到出现 sech 函数与 tanh 函数的乘积项的情形，并借助修正的黎曼-刘维尔导数给出时空分数阶 KdV-mKdV[12]方程和 Modified Camassa-Holm 方程的精确孤波解。

修正的 α 阶黎曼-刘维尔定义为[13]

$$D_x^\alpha f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int_0^x(x-\xi)^{-\alpha-1}[f(\xi)-f(0)]\mathrm{d}\xi,\alpha<0\\ \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^x(x-\xi)^{-\alpha}[f(\xi)-f(0)]\mathrm{d}\xi,0<\alpha<1。\\ [f^{(\alpha-n)}(x)]^{(n)},n\leqslant\alpha<n+1,n\geqslant 1\end{cases}\tag{1}$$

其中 $f(x)$ 表示连续函数，$\Gamma(\alpha)$ 表示 Gamma 函数，具有以下形式[14]

$$\Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}\ ,\tag{2}$$

或者

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}x\ 。\tag{3}$$

修正的黎曼-刘维尔导数具有许多有用的性质，如

$$D_x^\alpha x^\gamma=\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)}x^{\gamma-\alpha},\gamma>0\ ,\tag{4}$$

$$D_x^\alpha(cf(x))=cD_x^\alpha f(x)\ ,c\text{ 是常数},\tag{5}$$

$$D_x^\alpha(f(x)g(x))=g(x)D_x^\alpha f(x)+f(x)D_x^\alpha g(x)\ ,\tag{6}$$

$$D_x^\alpha f(x)[g(x)]=f'_g[g(x)]D_x^\alpha g(x)=D_g^\alpha g(x)(g'_x)^\alpha\ 。\tag{7}$$

考虑具有以下形式的非线性时空分数阶偏微分方程

$$P(u,D_t^\alpha u,D_x^\beta u,D_t^\alpha D_t^\alpha u,D_t^\alpha D_x^\beta u,D_x^\beta D_x^\beta u,\cdots)=0,0<\alpha,\beta<1\ ,\tag{8}$$

其中，$D_t^\alpha u$ 和 $D_x^\alpha u$ 是修正的黎曼-刘维尔导数，P 是关于 $u=u(x,t)$ 及其分数阶导数的多项式。

分数阶微分方程可以通过变换

$$u(x,t)=U(\xi)\ ,\xi=\frac{kx^\beta}{\Gamma(1+\alpha)}-\frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\ ,\tag{9}$$

转化为整数阶微分方程，这里 k 和 c 为非零常数。在计算过程中使用分数阶导数的链法则

$$D_t^\alpha u=\sigma'_t\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi}D_t^\alpha\xi\ ,D_x^\alpha u=\sigma'_x\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi}D_x^\alpha\xi\ ,\tag{10}$$

其中，σ'_t 和 σ'_x 称为 sigma 指标[15]，不失一般性可令 $\sigma'_t=\sigma'_x=l$，l 是常数。

把式(4)、(9)和(10)代入式(8)中，可以把式(8)转化为以下形式的非线性常微分方程

$$Q(U,U',U'',U''',\cdots)=0\ ,\tag{11}$$

其中，Q 是关于 $U(\xi)$ 及其各阶导数的多项式。

本研究旨在利用拟设法研究时空分数阶 KdV-mKdV 方程和 Modified Camassa-Holm 方程的孤波解。

1　时空分数阶 KdV-mKdV 方程的孤波解

考虑方程时空分数阶 KdV-mKdV 方程

$$D_t^\alpha u+\mu uD_x^\alpha u+\delta u^2D_x^\alpha u+D_x^{3\alpha}u=0\ ,\tag{12}$$

其中，μ 和 δ 为任意常数。

为了求解方程(12)的亮孤子解，将使用以下形式变形：

$$u(x,t)=U(\xi)\ , \tag{13}$$

$$\xi=\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}-\frac{ct^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\ , \tag{14}$$

其中,c 为非零任意常数。

将式(4)、(10)和(14)代入方程(12),方程(12)可化为以下形式常微分方程

$$-cU'+\mu UU'+\delta U^2U'+U'''=0\ , \tag{15}$$

其中,$U'=\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi}$ 。

作以下假设

$$U(\xi)=A\mathrm{sech}^{p}\xi\ , \tag{16}$$

其中,A 为任意非零常数。在求解方程(12)的亮孤子解的过程中将确定 p 的取值。

通过方程(14)和(16)可以得到

$$\frac{\mathrm{d}^3U}{\mathrm{d}\xi^3}=-Ap^3\tanh\xi\mathrm{sech}^{p}\xi+Ap(p+1)(p+2)\tanh\xi\mathrm{sech}^{p+2}\xi\ , \tag{17}$$

$$U^2(\xi)=A^2\mathrm{sech}^{2p}\xi\ 。 \tag{18}$$

把方程(16)～(18)代入方程(15)中,则得到

$$\begin{aligned}&cAp\,\mathrm{sech}^{p}\xi\tanh\xi-Ap^3\mathrm{sech}^{p}\xi\tanh\xi-\mu A^2p\mathrm{sech}^{2p}\xi\tanh\xi\\&-\delta A^3p\mathrm{sech}^{3p}\xi\tanh\xi+Ap(p+1)(p+2)\mathrm{sech}^{p+2}\xi\tanh\xi=0\ 。\end{aligned} \tag{19}$$

进一步化简得到

$$cAp-Ap^3-\mu A^2p\mathrm{sech}^{p}\xi-\delta A^3p\mathrm{sech}^{2p}\xi+Ap(p+1)(p+2)\mathrm{sech}^{2}\xi=0\ 。 \tag{20}$$

平衡方程(20)中的 $\mathrm{sech}^{2p}\xi$ 项与 $\mathrm{sech}^{2}\xi$ 项,则得 $2p=2$,即

$$p=1\ 。 \tag{21}$$

将 $p=1$ 代入方程(20)后,令 $\mathrm{sech}^{2}\xi$ 的系数和为零,则得到

$$Ap(p+1)(p+2)-\delta A^3=0\ , \tag{22}$$

由此解出 $A=\pm\sqrt{\dfrac{6}{\delta}}$,其中 $\delta>0$ 。

在方程(20)中,令 $\mathrm{sech}\xi$ 的系数为零,则得到 $\mu=0$;令常数项为零,则有

$$cAp-Ap^3=0\ , \tag{23}$$

由此解出 $c=1$ 。

因此,得到方程(12)的如下形式的亮孤子解

$$u(x,t)=A\mathrm{sech}\left(\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}-\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\ , \tag{24}$$

其中 $A=\pm\sqrt{\dfrac{6}{\delta}}$,$\delta>0$ 。

再假设方程(12)有以下形式的孤波解

$$U(\xi)=A\mathrm{csch}^{p}\xi\ , \tag{25}$$

其中 A 为任意非零常数。在求解方程(12)的孤子解的过程中将会确定 p 的取值。

因此,通过方程(14)和(25)可以得到:

$$\frac{\mathrm{d}^3U}{\mathrm{d}\xi^3}=-Ap^3\coth\xi\mathrm{csch}^{p}\xi-Ap(p+1)(p+2)\coth\xi\mathrm{csch}^{p+2}\xi\ , \tag{26}$$

$$U^2(\xi)=A^2\mathrm{csch}^{2p}\xi\ 。 \tag{27}$$

把方程(25)至(27)代入方程(15)中,得到

$$\begin{aligned}&-cApc\,\mathrm{sch}^{p}\xi\coth\xi-\mu A^2p\mathrm{csch}^{2p}\xi\coth\xi-\delta A^3p\mathrm{csch}^{3p}\xi\coth\xi\\&-Ap^3\mathrm{csch}^{p}\xi\coth\xi-Ap(p+1)(p+2)\mathrm{csch}^{p+2}\xi\coth\xi=0\ ,\end{aligned} \tag{28}$$

进一步化简得到

$$-(c+p^2)\operatorname{csch}^p\xi-\mu A\operatorname{csch}^{2p}\xi-\delta A^2\operatorname{csch}^{3p}\xi-(p+1)(p+2)\operatorname{csch}^{p+2}\xi=0\ 。\tag{29}$$

平衡(29)中 $\operatorname{csch}^{3p}\xi$ 项与 $\operatorname{csch}^{p+2}\xi$ 项，则得 $3p=p+2$，即

$$p=1\ 。\tag{30}$$

将 $p=1$ 代入方程(29)后令 $\operatorname{csch}^3\xi$ 的系数和为零，则得到

$$(p+1)(p+2)+\delta A^2=0\ ,\tag{31}$$

并由此解出 $A=\pm\sqrt{-\frac{6}{\delta}}$，其中 $\delta<0$ 。

在方程(29)中，令 $\operatorname{csch}^2\xi$ 的系数为零，则得到 $\mu=0$；令 $\operatorname{csch}\xi$ 为零，则有

$$-(c+p^2)=0\ ,\tag{32}$$

并由此解出 $c=-1$ 。

因此，方程(12)具有下面的奇异孤波解

$$u(x,t)=A\operatorname{csch}\left(\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}+\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\ ,\tag{33}$$

其中，$A=\pm\sqrt{-\frac{6}{\delta}}$，$\delta<0$ 。

2　时间分数阶 Modified Camassa-Holm 方程的孤波解

考虑方程时间分数阶 Modified Camassa-Holm(mCH)方程

$$D_t^\alpha u+2ku_x-D_t^\alpha(u_{xx})+\beta u^2u_x=0\ ,\tag{34}$$

其中，$0<\alpha<1$，$\beta>0$，$k\in\mathbf{R}$ 。

为了求解方程(34)的亮孤子解，将使用以下形式变形：

$$u(x,t)=U(\xi)\ ,\tag{35}$$

$$\xi=x-\frac{ct^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\ ,\tag{36}$$

其中，c 为非零任意常数。

将式(4)和方程(10)、式(36)代入方程(34)，方程(34)可化为以下形式常微分方程：

$$-clU'+2kU'+\beta U^2U'+clU'''=0\ ,\tag{37}$$

其中，$\sigma'_t=l$，$U'=\frac{dU}{d\xi}$ 。

作以下假设

$$U(\xi)=A\operatorname{sech}^p\xi\ ,\tag{38}$$

其中，A 为任意非零常数。在求解方程(34)的亮孤子解的过程中将确定 p 的取值。

因此，通过方程(38)可以得到：

$$\frac{d^3U}{d\xi^3}=-Ap^3\tanh\xi\operatorname{sech}^p\xi+Ap(p+1)(p+2)\tanh\xi\operatorname{sech}^{p+2}\xi\ ,\tag{39}$$

$$U^2(\xi)=A^2\operatorname{sech}^{2p}\xi\ 。\tag{40}$$

把方程(38)～(40)代入方程(37)中，则得到：

$$\begin{aligned}&-Ap\operatorname{sech}^p\xi\tanh\xi(-cl+2k+\beta A^2\operatorname{sech}^{2p}\xi)-Aclp^3\operatorname{sech}^p\xi\tanh\xi+\\&Aclp(p+1)(p+2)\operatorname{sech}^{p+2}\xi\tanh\xi=0\ ,\end{aligned}\tag{41}$$

进一步化简得到：

$$-(2k-cl+clp^2)\operatorname{sech}^p\xi-\beta A^2\operatorname{sech}^{3p}\xi+cl(p+1)(p+2)\operatorname{sech}^{p+2}\xi=0\ ,\tag{42}$$

平衡方程(42)中的 $\operatorname{sech}^{3p}\xi$ 项与 $\operatorname{sech}^{p+2}\xi$ 项，得 $3p=p+2$，即

$$p=1\ 。\tag{43}$$

将 $p=1$ 代入方程(42),令 $\operatorname{sech}^3\xi$ 的系数和为零,则得

$$6cl-\beta A^2=0\text{ 。}\tag{44}$$

由此解出 $A=\pm\sqrt{\dfrac{6cl}{\beta}}$ 。

在方程(42)中令 $\operatorname{sech}\xi$ 的系数为零,则得到 $k=0$ 。

因此,得到方程(34)的如下形式的亮孤子解

$$u(x,t)=A\operatorname{sech}\left(x-\frac{ct^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\text{ ,}\tag{45}$$

其中,$A=\pm\sqrt{\dfrac{6cl}{\beta}}$ 。

再假设方程(34)有以下形式的孤波解

$$U(\xi)=A\operatorname{csch}^{p}\xi\text{ ,}\tag{46}$$

其中,A 为任意非零常数。在求解方程(34)的孤子解的过程中将确定 p 的取值。

因此,通过方程(36)和(46)可以得到:

$$\frac{\mathrm{d}^3U}{\mathrm{d}\xi^3}=-Ap^3\coth\xi\operatorname{csch}^{p}\xi-Ap(p+1)(p+2)\coth\xi\operatorname{csch}^{p+2}\xi\text{ ,}\tag{47}$$

$$U^2(\xi)=A^2\operatorname{csch}^{2p}\xi\text{ 。}\tag{48}$$

把方程(46)～(48)代入方程(34)中,得到

$$\begin{aligned}&-Ap\operatorname{csch}^{p}\xi\coth\xi(-cl+2k+\beta A^2\operatorname{csch}^{2p}\xi)-Aclp^3\operatorname{csch}^{p}\xi\coth\xi\\&-Aclp(p+1)(p+2)\operatorname{csch}^{p+2}\xi\coth\xi=0\text{ ,}\end{aligned}\tag{49}$$

进一步化简得到

$$(cl-2k-clp^2)\operatorname{csch}^{p}\xi-\beta A^2\operatorname{csch}^{3p}\xi-cl(p+1)(p+2)\operatorname{csch}^{p+2}\xi=0\text{ ,}\tag{50}$$

平衡(50)中 $\operatorname{csch}^{3p}\xi$ 项与 $\operatorname{csch}^{p+2}\xi$ 项,则得 $3p=p+2$ 即

$$p=1\text{ 。}\tag{51}$$

将 $p=1$ 代入方程(50),令 $\operatorname{csch}^3\xi$ 的系数和为零,则得到

$$\beta A^2+6cl=0\text{ 。}\tag{52}$$

由此解出 $A=\pm\sqrt{\dfrac{-6cl}{\beta}}$ 。

在方程(50)中令 $\operatorname{csch}\xi$ 的系数为零,则得到 $k=0$ 。

因此,方程(34)具有下面的奇异孤波解

$$u(x,t)=A\operatorname{csch}\left(x-\frac{ct^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\text{ ,}\tag{33}$$

其中,$A=\pm\sqrt{\dfrac{-6cl}{\beta}}$ 。

3 结论

利用拟设法求解时空分数阶 KdV-mKdV 方程和时间分数阶 mCH 方程的孤波解,包括亮孤子解和奇异孤波解,表明拟设法是求解时空分数阶偏微分方程的有效方法。拟设法也适用于求其他分数阶偏微分方程的孤波解,且当拟设法中设 $U(\xi)=A\tanh^{p}\xi$ 时能够给出某些分数阶非线性方程的暗孤子解。

参考文献:

[1]PODLUBNY I. Fractional differential equations[M]. San Diego:Academic Press,1999.

[2]FENG Z S. On explicit exact solutions to the compound Burgers-KdV equation[J]. Physics Letters A,2002,293(1):57-66.

[3]FAN E G. Extend tanh-function method and its applications to nonlinear equations[J]. Physics Letters A,2000,277(4/5):212-218.

[4]BEKIR A,CÜNER O. CEVIKEL A C. Fractional complex transform and exp-function methods for fractional differential equations[J]. Abstract and Applied Analysis,2013(1):1085-3375.

[5]WAZWAZ A M. The extended tanh method for new soliton solutions for many forms of the fifth-order KdV equations[J]. Applied Mathematics and Computation,2007,184(2):1002-1014.

[6]ZHANG J L,WANG M L,WANG Y M,et al. The improved F-expansion method and its applications[J]. Physics Letters A,2006,350(1-2):103-109.

[7]MIRZAZADEH M. Topological and non-topological soliton solutions to some time-fractional differential equations[J]. Pramana,2015,85(1):17-29.

[8]GUNER O,BEKIR A. Exact solutions of some factional differential equations arising in mathematical biology[J]. International Journal of Biomathematics,2015,8(1):29-45.

[9]GUNER O, BEKIR A. Bright and dark soliton solutions for some nonlinear fractional differential equations[J]. Chinese Physics. B,2016,25(3):0302031-0302038.

[10]KORKMAI A. Exphcit exact solutions to some one-climensional conformable time fractional equations[J]. Waves in Random and Complex Media,2016,11(1):124-137.

[11]GUNER O,BEKIR A. The exp-function method for solving nonlinear space-time fractional differential equations in mathematical physics[J]. Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences,2017(1):277-282.

[12]ABDEL-SALAM E A B,AL-MUHIAMEED Z I A. Analytic solutions of the space-time fractional combined KdV-mKdV equation[M]. Mathematical Problems in Engineering,2015.

[13]JUMARIE G. Table of some basic fractional calculus formulae derived from a modified Riemann-Liouville derivative for non-differentiable functions[J]. Applied Mathematics Letters,2009,22(3):378-385.

[14]HARTLEY T T,LORENZO C F. Dynamics and control of initialized fractional-order systems[J]. Nonlinear Dynamics,2002,29(1/2/3/4):201-233.

[15]HUSSEIN S S,YOUSSIF A,GHOUZ H H M. Performance analysis and evaluation of UWB wireless computer network for multi-users and dynamic channel environment[J]. Journal of Applied Sciences,2013,13(24):5723-5728.

(责任编辑:傅　游)