

引用格式:朱香梗,李玉霞,武波.分数阶 Langford 系统的稳定性分析[J].山东科技大学学报(自然科学版),2019,38(3):65-71.

ZHU Xianggeng, LI Yuxia, WU Bo. Stability analysis of fractional-order Langford systems[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science), 2019, 38(3): 65-71.

分数阶 Langford 系统的稳定性分析

朱香梗¹, 李玉霞², 武波¹

(1. 山东科技大学 数学与系统科学学院, 山东 青岛 266590; 2. 山东科技大学 电气与自动化工程学院, 山东 青岛 266590)

摘要:研究一类分数阶 Langford 系统的稳定性问题。基于分数阶线性系统的稳定性理论,研究了具有 5 个参数的三维分数阶 Langford 系统的平衡点的稳定性,确定了系统稳定条件下分数阶的临界值,并给出多种情形下系统稳定性的判别条件。最后,利用数值仿真验证了结论的正确性。

关键词:分数阶 Langford 系统;稳定性;不稳定性;数值仿真

中图分类号:O231.2

文献标志码:A

文章编号:1672-3767(2019)03-0065-07

DOI:10.16452/j.cnki.sdkjzk.2019.03.008

Stability analysis of fractional-order Langford systems

ZHU Xianggeng¹, LI Yuxia², WU Bo¹

(1. College of Mathematics and Systems Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China;

2. College of Electrical Engineering and Automation, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

Abstract: A study on stability of a class of fractional-order Langford systems is presented in this paper. The stability of equilibrium point of three-dimensional fractional-order Langford systems with five parameters was first analyzed based on linear fractional-order systems. The critical values of fractional order were then identified for system stability, and the determining conditions for various cases were given. Finally, the validity of assessments made were verified by numerical simulation.

Key words: fractional-order Langford systems; stability; instability; numerical simulation

分数阶微积分是对整数阶微积分的推广,整数阶微积分可以看成是分数阶微积分的特例,因此研究分数阶微积分更具有普遍意义^[1]。在描述复杂物理学问题时,与非线性模型相比较,分数阶模型的物理意义更清晰,表述更简洁^[2]。分数阶控制随着分数阶导数的不同可以增大控制的自由度,从而可获得更优良的控制性能;另一方面,分数阶微积分具有记忆功能,这种记忆功能确保历史信息对现在和未来的影响,有利于改善控制的品质^[3-4]。

三维动力系统在非线性电路、生物网络以及信息安全等领域有着巨大的应用潜力,现已成为非线性科学理论与应用研究的热点^[5-7]。随着现代数学研究的不断发展,分数阶系统动力学的研究引起了广泛关注,产

收稿日期:2018-05-08

基金项目:国家自然科学基金项目(61473177,61573008)

作者简介:朱香梗(1993—),男,山东菏泽人,硕士研究生,主要从事非线性系统理论研究。

李玉霞(1968—),女,山东滨州人,教授,博士生导师,主要从事非线性电路与系统理论及应用研究,本文通信作者。

E-mail: yuxiali2004@sdust.edu.cn

生了一系列重要的研究成果,包括稳定性分析、分岔与混沌等^[8-10]。近年来,分数阶系统在系统控制、粘弹性阻尼、电解质极化、分形与混沌和机器人等领域得到了广泛推广和应用,这一推广在跨学科领域的应用中表现尤为普遍^[11-12]。

Langford 系统是 Langford W. F. 根据 Hopf 建立的湍流模型演变而来的,研究表明,该系统具有丰富的非线性动力学行为。文献[13]对 Langford 系统中的规则运动进行定性分析,研究了 Langford 系统的混沌特性、Hopf 分岔以及极限环的稳定性,并给出了全局分岔图。Nikolov 等^[14]给出了 Langford 系统的第一个 Lyapunov 值的具体表达式,并首次得到一个混沌解^[14]。目前,对于 Langford 系统的研究结果仅限于整数阶,对分数阶 Langford 系统的研究较少。本研究基于 Lyapunov 稳定性定理,着重分析分数阶 Langford 系统的稳定性,给出系统保持稳定的条件。研究结果将有助于丰富 Langford 系统的稳定性理论,为进一步讨论分数阶 Langford 系统的控制问题提供参考意义。

1 分数阶 Langford 系统的数学模型

分数阶微积分有多种定义,常用的定义有三种,即:Caputo 定义、Grunwald-Letnikov 定义和 Riemann-Liouville 定义。由于 Caputo 导数只需根据整数阶导数给出的初始条件即可表示实际情况中良好的特性,更适用于工程问题,因此本研究基于 Caputo 导数定义。

定义^[15] 对于满足 $\frac{df(t)}{dt} \in L^1(\mathbf{R}^+)$ 的连续函数 $f(\cdot)$,且分数阶导数 $\alpha \in (0, 1]$,Caputo 分数阶微分定义如下:

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{df(\tau)}{d\tau} d\tau. \tag{1}$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 是伽马函数,即 $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$ 。

首先引入分数阶线性系统的稳定性定理。

引理 1^[16] 对于下面的分数阶自治系统:

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = \mathbf{A}x, x(0) = x_0 \tag{2}$$

其中 $0 < \alpha < 1, x \in \mathbf{R}^n$ 且 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$,如果矩阵 \mathbf{A} 的所有特征值 λ 满足 $|\arg(\lambda)| > \alpha\pi/2$,则系统 (2) 的零解是渐近稳定的。

文献[17]考虑了如下 Langford 系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + xz, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + yz, \\ \frac{dz}{dt} = ez - (x^2 + y^2 + z^2). \end{cases} \tag{3}$$

其中 a, b, c, d, e 表示系统参数。易见,系统 (3) 具有两个平衡点 $O(0, 0, 0)$ 和 $E(0, 0, e)$ 。

利用分数阶 Caputo 微分定义将上述系统转化为分数阶,得到分数阶 Langford 系统数学模型如下:

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = ax + by + xz, \\ \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = cx + dy + yz, \\ \frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} = ez - (x^2 + y^2 + z^2). \end{cases} \tag{4}$$

其中 $\alpha \in (0, 1]$ 。

2 Langford 系统在平衡点处的稳定性

2.1 系统在平衡点 $O(0,0,0)$ 处的稳定性

易见系统 (4) 对应的雅可比矩阵为:

$$J = \begin{pmatrix} a+z & b & x \\ c & d+z & y \\ -2x & -2y & e-2z \end{pmatrix}.$$

将平衡点 O 代入, 可得此时雅可比矩阵为:

$$J_1 = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}.$$

J_1 对应的特征方程为:

$$p_1(\lambda) = (\lambda - e)[\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)]. \quad (5)$$

记

$$\Delta_1 = (a+d)^2 - 4(ad - bc).$$

则特征方程 (5) 的特征根分别为:

$$\lambda_1 = e, \lambda_2 = \frac{a+d - \sqrt{\Delta_1}}{2}, \lambda_3 = \frac{a+d + \sqrt{\Delta_1}}{2}.$$

下面, 通过讨论参数 a, b, c, d, e 的取值范围来分析特征方程 (5) 根的正负性。

引理 2 对于特征方程 (5), 可知:

1) 当 $\Delta_1 > 0$ 且 $ad - bc \neq 0$ 时, 特征方程 (5) 的所有根都为实数:

- ① 如果 $e > 0, ad - bc > 0$ 且 $a + d > 0$, 则特征方程 (5) 有三个正实根;
- ② 如果 $e > 0, ad - bc > 0$ 且 $a + d < 0$, 则特征方程 (5) 有一个正实根, 两个负实根;
- ③ 如果 $e > 0$ 且 $ad - bc < 0$, 则特征方程 (5) 有两个正实根, 一个负实根;
- ④ 如果 $e < 0, ad - bc > 0$ 且 $a + d > 0$, 则特征方程 (5) 有两个正实根, 一个负实根;
- ⑤ 如果 $e < 0, ad - bc > 0$ 且 $a + d < 0$, 则特征方程 (5) 有三个负实根;
- ⑥ 如果 $e < 0$ 且 $ad - bc < 0$,

则特征方程 (5) 有两个负实根, 一个正实根。

2) 当 $\Delta_1 < 0$ 且 $ad - bc \neq 0$ 时, 特征方程 (5) 有一个实数根和一对复共轭根: ① 如果 $e > 0$ 且 $a + d > 0$, 则特征方程 (5) 有一个正实根和一对复共轭根, 其中复根的实部均为正数; ② 如果 $e > 0$ 且 $a + d < 0$, 则特征方程 (5) 有一个正实根和一对复共轭根, 其中复根的实部均为负数; ③ 如果 $e < 0$ 且 $a + d > 0$, 则特征方程 (5) 有一个负实根和一对复共轭根, 其中复根的实部均为正数; ④ 如果 $e < 0$ 且 $a + d < 0$, 则特征方程 (5) 有一个负实根和一对复共轭根, 其中复根的实部均为负数。

表 1 特征方程 (5) 的根在空间 (a, b, c, d, e) 中的分布

Tab. 1 Distribution of roots of Eq. (5) in (a, b, c, d, e) -space

	(a, b, c, d, e)	$\lambda_{1,2,3}$
Ω_1	$\Delta_1 > 0, e > 0, ad - bc > 0, a + d > 0$	$\lambda_{1,2,3} > 0$
Ω_2	$\Delta_1 > 0, e > 0, ad - bc > 0, a + d < 0$	$\lambda_1 > 0, \lambda_{2,3} < 0$
Ω_3	$\Delta_1 > 0, e > 0, ad - bc < 0$	$\lambda_{1,3} > 0, \lambda_2 < 0$
Ω_4	$\Delta_1 > 0, e < 0, ad - bc > 0, a + d > 0$	$\lambda_1 < 0, \lambda_{2,3} > 0$
Ω_5	$\Delta_1 > 0, e < 0, ad - bc > 0, a + d < 0$	$\lambda_{1,2,3} < 0$
Ω_6	$\Delta_1 > 0, e < 0, ad - bc < 0$	$\lambda_{1,2} < 0, \lambda_3 > 0$
Ω_7	$\Delta_1 < 0, e > 0, a + d > 0$	$\lambda_1 > 0, \lambda_{2,3} = \delta_1 \pm ik_1 (\delta_1 > 0)$
Ω_8	$\Delta_1 < 0, e > 0, a + d < 0$	$\lambda_1 > 0, \lambda_{2,3} = \delta_1 \pm ik_1 (\delta_1 < 0)$
Ω_9	$\Delta_1 < 0, e < 0, a + d > 0$	$\lambda_1 < 0, \lambda_{2,3} = \delta_1 \pm ik_1 (\delta_1 > 0)$
Ω_{10}	$\Delta_1 < 0, e < 0, a + d < 0$	$\lambda_1 < 0, \lambda_{2,3} = \delta_1 \pm ik_1 (\delta_1 < 0)$

由引理 2 可以看出曲线 $\Delta_1 = 0, e = 0, ad - bc = 0, a + d = 0$ 将空间 (a, b, c, d, e) 分成了如表 1 中的 10 个区域。易得:

定理 1 分数阶 Langford 系统在平衡点 $O(0,0,0)$ 处的稳定性结论如下:

1) 如果 $(a,b,c,d,e) \in \Omega_5 \cup \Omega_{10}$, 则系统(4)在平衡点 $O(0,0,0)$ 处对任意的 $\alpha \in (0,1]$ 都是局部渐近稳定的;

2) 如果 $(a,b,c,d,e) \in \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4 \cup \Omega_6 \cup \Omega_7 \cup \Omega_8$, 则系统(4)在平衡点 $O(0,0,0)$ 处对任意的 $\alpha \in (0,1]$ 都是不稳定的;

3) 如果 $(a,b,c,d,e) \in \Omega_9$ 且 α 满足下面的不等式

$$\alpha < \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\sqrt{4(ad-bc)-(a+d)^2}}{a+d}, \tag{6}$$

则系统(4)在平衡点 $O(0,0,0)$ 处是局部渐近稳定的;

4) 如果 $(a,b,c,d,e) \in \Omega_9$ 且 α 满足下面的不等式

$$\alpha > \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\sqrt{4(ad-bc)-(a+d)^2}}{a+d}, \tag{7}$$

则系统(4)在平衡点 $O(0,0,0)$ 处是不稳定的。

证明: 由引理 1, 易得如下结论

1) 如果 $(a,b,c,d,e) \in \Omega_5 \cup \Omega_{10}$, 则式(5)的所有实特征根和共轭特征根的实部都为负数。这意味着方程(5)的所有特征根都在稳定域内。因此, 系统(4)在平衡点 $O(0,0,0)$ 处是局部渐近稳定的。

2) 如果 $(a,b,c,d,e) \in \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4 \cup \Omega_6 \cup \Omega_7 \cup \Omega_8$, 则方程(5)至少有一个正实根。因此系统(4)在平衡点 $O(0,0,0)$ 处是不稳定的。

3) 如果 $(a,b,c,d,e) \in \Omega_9$, 则特征方程(5)有一对具有正实部的复共轭特征根 $\lambda_{2,3}$ 以及一个负实根 λ_1 , 分别为:

$$\lambda_1 = e, \lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(a+d \pm i \sqrt{4(ad-bc)-(a+d)^2}).$$

进而有

$$|\arg(\lambda_1)| = \pi > \frac{\alpha\pi}{2},$$

$$|\arg(\lambda_{2,3})| = \arctan \frac{\sqrt{4(ad-bc)-(a+d)^2}}{a+d}.$$

因此, 若满足式(6), 则系统(4)在平衡点 $O(0,0,0)$ 处是局部渐近稳定的。

4) 由 3) 中的推论可知, 若满足式(7), 则系统(4)在平衡点 $O(0,0,0)$ 处是不稳定的。

2.2 系统在平衡点 $E(0,0,e)$ 处的稳定性

系统在平衡点 $E(0,0,e)$ 处的雅可比矩阵为:

$$J_2 = \begin{pmatrix} a+e & b & 0 \\ c & d+e & 0 \\ 0 & 0 & -e \end{pmatrix}.$$

J_2 对应的特征方程为:

$$p_2(\lambda) = (\lambda+e)[\lambda^2 - (a+d+2e)\lambda + (a+e)(d+e) - bc]. \tag{8}$$

记

$$\Delta_2 = (a+d+2e)^2 - 4[(a+e)(d+e) - bc], \mu_0 = (a+e)(d+e) - bc.$$

特征方程(8)的特征根分别记为:

$$\lambda_1 = -e, \lambda_2 = \frac{a+d+2e-\sqrt{\Delta_2}}{2}, \lambda_3 = \frac{a+d+2e+\sqrt{\Delta_2}}{2}.$$

下面通过讨论参数 a, b, c, d, e 的取值范围来分析特征方程(8)的根的特性。

引理 3 对于特征方程(8), 有如下结果:

1) 当 $\Delta_2 > 0$ 且 $\mu_0 \neq 0$ 时, 特征方程(8)的所有特征根都为实数:

- ① 如果 $e > 0, \mu_0 > 0$ 且 $a+d+2e > 0$, 则特征方程(8)有两个正实根, 一个负实根;
- ② 如果 $e > 0, \mu_0 > 0$ 且 $a+d+2e < 0$, 则特征方程(8)有三个负实根;

- ③ 如果 $e > 0, \mu_0 < 0$, 则特征方程(8)有两个负实根, 一个正实根;
- ④ 如果 $e < 0, \mu_0 > 0$ 且 $a + d + 2e > 0$, 则特征方程(8)有三个正实根;
- ⑤ 如果 $e < 0, \mu_0 > 0$ 且 $a + d + 2e < 0$, 则特征方程(8)有两个负实根, 一个正实根;
- ⑥ 如果 $e < 0, \mu_0 < 0$, 则特征方程(8)有两个正实根, 一个负实根;

2) 当 $\Delta_2 < 0$ 且 $\mu_0 \neq 0$ 时, 特征方程(8)有一个实数根和一对复共轭根:

- ① 如果 $e > 0$ 且 $a + d + 2e > 0$, 则特征方程(8)有一个负实根和一对实部为正的复共轭特征根;
- ② 如果 $e > 0$ 且 $a + d + 2e < 0$, 则特征方程(8)有一个负实根和一对实部为负的复共轭特征根;
- ③ 如果 $e < 0$ 且 $a + d + 2e$

> 0 , 则特征方程(8)有一个正实根和一对实部为正的复共轭特征根;

④ 如果 $e < 0$ 且 $a + d + 2e < 0$, 则特征方程(8)有一个正实根和一对实部为负的复共轭特征根。

由引理 3 可以看出曲线 $\Delta_2 = 0, e = 0, \mu_0 = 0, a + d + 2e = 0$ 将空间 (a, b, c, d, e) 分成了如表 2 所示的 10 个区域。

由引理 3, 可得系统(4)在平衡点 $E(0, 0, e)$ 处的稳定性结果。

定理 2

- 1) 如果 $(a, b, c, d, e) \in S_2 \cup S_8$, 则系统(4)在平衡点 $E(0, 0, e)$ 处对所有的 $\alpha \in (0, 1]$ 都是局部渐近稳定的。
- 2) 如果 $(a, b, c, d, e) \in S_1 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6 \cup S_9 \cup S_{10}$, 则系统(4)在平衡点 $E(0, 0, e)$ 处对所有的 $\alpha \in (0, 1]$ 都是不稳定的。
- 3) 如果 $(a, b, c, d, e) \in S_7$ 且 α 满足下列不等式

$$\alpha < \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\sqrt{[4(a+e)(d+e) - bc] - (a+d+2e)^2}}{a+d+2e}$$

则系统(4)在平衡点 $E(0, 0, e)$ 处是局部渐近稳定的。

- 4) 如果 $(a, b, c, d, e) \in S_7$ 且 α 满足下列不等式

$$\alpha > \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\sqrt{[4(a+e)(d+e) - bc] - (a+d+2e)^2}}{a+d+2e}$$

则系统(4)在平衡点 $E(0, 0, e)$ 处是不稳定的。

证明: 同定理 1 的证明, 此处不再赘述。

3 数值仿真

为验证定理, 本节给出系统(4)在平衡点 $O(0, 0, 0)$ 处的 Matlab 数值仿真结果。如图 1 所示, 其中图 1(a)~(h)初始条件都是 $(x^0, y^0, z^0) = (0.3, -0.2, 0.2)$, 而图 1(a)、1(b)、1(c)表明系统(4)由初始状态 (x^0, y^0, z^0) 渐近地趋向于平衡点 $O(0, 0, 0)$ 。图 1(a)的系统参数取值为 $(a, b, c, d, e) = (-1, 1, 1, -2, -2) \in \Omega_5$, 阶数取值为 $\alpha = 0.8$; 图 1(b)的系统参数取值为 $(a, b, c, d, e) = (-2, -2, 1, -3, -2) \in \Omega_{10}$, 阶数取值为 $\alpha = 0.7$; 当在区域 Ω_9 上选取参数时, 由定理 1 可知, 根据式子 $\alpha^* = \frac{2}{\pi} \arctan$

$\frac{\sqrt{4(ad-bc) - (a+d)^2}}{a+d}$ 可计算临界值 α^* , 图 1(c)的系统参数取值为 $(a, b, c, d, e) = (4, 3, -5, -2, -1) \in \Omega_9$, 则临界值 $\alpha^* \approx 0.75$, 为了得到稳定性结果, 选取 $\alpha = 0.7 < \alpha^*$ 。

表 2 特征方程(8)的根在空间 (a, b, c, d, e) 中的分布
Tab. 2 Distribution of roots of Eq. (8) in (a, b, c, d, e) -space

(a, b, c, d, e)		$\lambda_{1,2,3}$
S_1	$\Delta_2 > 0, e > 0, \mu_0 > 0, a + d + 2e > 0$	$\lambda_1 < 0, \lambda_{2,3} > 0$
S_2	$\Delta_2 > 0, e > 0, \mu_0 < 0$	$\lambda_{1,2,3} < 0$
S_3	$\Delta_2 > 0, e > 0, \mu_0 > 0, a + d + 2e < 0$	$\lambda_{1,2} < 0, \lambda_3 > 0$
S_4	$\Delta_2 > 0, e < 0, \mu_0 > 0, a + d + 2e > 0$	$\lambda_{1,2,3} > 0$
S_5	$\Delta_2 > 0, e < 0, \mu_0 > 0, a + d + 2e < 0$	$\lambda_1 > 0, \lambda_{2,3} < 0$
S_6	$\Delta_2 > 0, e < 0, \mu_0 < 0$	$\lambda_{1,3} > 0, \lambda_2 < 0$
S_7	$\Delta_2 < 0, e > 0, a + d + 2e > 0$	$\lambda_1 < 0, \lambda_{2,3} = \delta_2 \pm ik_2 (\delta_2 > 0)$
S_8	$\Delta_2 < 0, e > 0, a + d + 2e < 0$	$\lambda_1 < 0, \lambda_{2,3} = \delta_2 \pm ik_2 (\delta_2 < 0)$
S_9	$\Delta_2 < 0, e < 0, a + d + 2e > 0$	$\lambda_1 > 0, \lambda_{2,3} = \delta_2 \pm ik_2 (\delta_2 > 0)$
S_{10}	$\Delta_2 < 0, e < 0, a + d + 2e < 0$	$\lambda_1 > 0, \lambda_{2,3} = \delta_2 \pm ik_2 (\delta_2 < 0)$

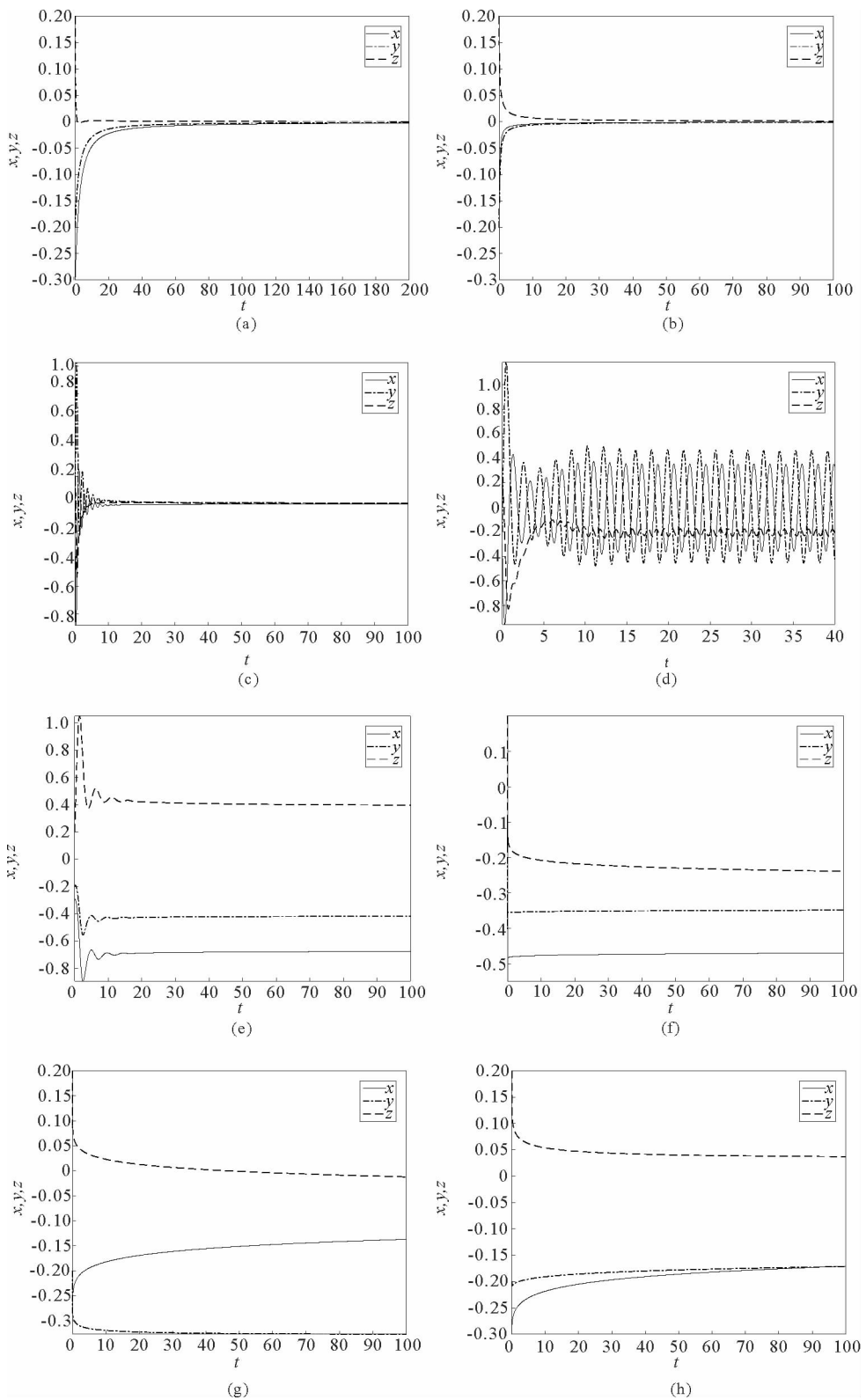


图 1 Langford 系统在平衡点处的稳定性

Fig. 1 Stability of Langford system at equilibrium point

图 1(d)~1(h)表明系统(4)在平衡点 $O(0,0,0)$ 处是不稳定的,其中图 1(d)与 1(c)的系统参数值相同,只改变阶数 α ,图(d)的阶数取值为 $\alpha = 0.8 > \alpha^*$;图 1(e)的系统参数取值为 $(a,b,c,d,e) = (-1,1,1,-2,2) \in \Omega_2$,阶数取值为 $\alpha = 0.6$;图 1(f)的系统参数取值为 $(a,b,c,d,e) = (0.4,0.2,0.3,0.2,-0.1) \in \Omega_4$,阶数取值为 $\alpha = 0.03$;图 1(g)的系统参数取值为 $(a,b,c,d,e) = (0.01,-0.3,0.1,0.2,0.1) \in \Omega_7$,阶数取值为 $\alpha = 0.1$;图 1(h)的系统参数取值为 $(a,b,c,d,e) = (-0.01,-0.3,0.1,-0.2,0.1) \in \Omega_8$,阶数取值为 $\alpha = 0.2$ 。

4 结论

分数阶非线性系统的稳定性对实际应用问题有着十分重要的作用,本研究利用 Caputo 分数阶微分定义将三维整数阶 Langford 系统推广到分数阶上,并通过对系统参数的讨论判断了系统的稳定性,最后用 Matlab 进行数值仿真验证所得定理的正确性。

参考文献:

- [1]胡建兵,赵灵冬.分数阶系统稳定性理论与控制研究[J].物理学报,2013,62(24):31-37.
HU Jianbing,ZHAO Lingdong. Stability theorem and control of fractional systems[J]. Acta Physica Sinica,2013,62(24):31-37.
- [2]BHALEKAR S,DAFTARDAR-GEJJI V. Synchronization of different fractional order chaotic systems using active control [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,2010,15(11):3536-3546.
- [3]KILBAS A A,SRIVASTAVA H M,TRUJILLO J J. Theory and application of fractional differential equations[M]. Amsterdam;Elsevier,2006.
- [4]马知恩,常微分方程稳定性与稳定性理论[M].北京:科学出版社,2001.
- [5]YANG Q G,CHEN Y M. Complex dynamics in the unified Lorenz-type system[J/OL]. International Journal of Bifurcation and Chaos,2014,24(4):1450055.
- [6]CARDIN P T,LLIBRE J. Transcritical and zero-Hopf bifurcations in the Genesis system[J]. Nonlinear Dynamics,2017,88(1):547-553.
- [7]BUICÁ A,GARCÍA I A,MAZA S. Multiple Hopf bifurcation in R^3 and inverse Jacobi multipliers[J]. Journal of Differential Equations,2014,256(1):310-325.
- [8]ABDELOUAHAB M S,HAMRI N E,WANG J. Hopf bifurcation and chaos in fractional-order modified hybrid optical system[J]. Nonlinear Dynamics,2012,69(1/2):275-284.
- [9]LEUNG A Y T,YANG H X,ZHU P. Periodic bifurcation of Duffing-van der Pol oscillators having fractional derivatives and time delay[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,2014,19(4):1142-1155.
- [10]LEUNG A Y T,YANG H X,ZHU P. Bifurcation of a Duffing oscillator having nonlinear fractional derivative feedback [J/OL]. International Journal of Bifurcation and Chaos,2014,24(3):1450028.
- [11]WANG Z,WANG X H,LI Y X,et al. Stability and Hopf bifurcation of fractional-order complex-valued single Neuron with time delay[J/OL]. International Journal of Bifurcation and Chaos,2017,27(13):1750209.
- [12]CHENG Z S,LI D H,CAO J D. Stability and Hopf bifurcation of a three-layer neural network model with delays[J]. Neurocomputing,2016,175:355-370.
- [13]HASSARD B,KAZARINOFF N,WAN Y H. Theory and applications of Hopf bifurcation[M]. Cambridge;Cambridge University Press,1981:105-149.
- [14]NIKOLO S,BOZHKOVA B. Bifurcations and chaotic behavior on the Langford systems[J]. Chaos,Solutions and Fractionals,2004,21(4):803-808.
- [15]PODLUBNY I. Fractional differential equations[M]. San Diego;Academic Press,1999.
- [16]MATIGNON D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing[J]. Computational Engineering in Systems Applications,1996,2:963-968.
- [17]YANG Q G,YANG T. Complex dynamics in a generalized Langford system[J]. Nonlinear Dynamics,2018,91(4):2241-2270.