

引用格式:张冲,黄霞.不连续时滞分数阶忆阻神经网络的非线性动力学分析[J].山东科技大学学报(自然科学版),2019,38(3):82-90.

ZHANG Chong, HUANG Xia. Nonlinear dynamic analysis of discontinuous fractional memristive neural networks with time delay [J]. Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science), 2019, 38(3): 82-90.

不连续时滞分数阶忆阻神经网络的 非线性动力学分析

张 冲, 黄 霞

(山东科技大学 电气与自动化工程学院, 山东 青岛 266590)

摘 要:提出一个具有不连续忆导函数的时滞分数阶忆阻神经网络模型,通过数值仿真研究其复杂非线性动力学行为。首先提出了不连续分数阶忆阻神经网络的数学模型;其次,分别将初值、分数阶及开关阶跃作为分岔参数,通过分岔图、相图、庞加莱截面等数值分析手段验证了其典型的动力学行为。研究表明:不同于传统的倍周期分岔通向混沌的道路,该不连续忆阻神经网络通往混沌的道路为阵发混沌。另外,还揭示了不连续的忆导函数和开关阶跃对分数阶忆阻神经网络动力学行为的内在影响机制。

关键词:不连续忆导函数;分数阶忆阻神经网络;分岔分析;开关阶跃;非线性动力学

中图分类号:TP183

文献标志码:A

文章编号:1672-3767(2019)03-0082-09

DOI:10.16452/j.cnki.sdkjzk.2019.03.010

Nonlinear dynamic analysis of discontinuous fractional memristive neural networks with time delay

ZHANG Chong, HUANG Xia

(College of Electrical Engineering and Automation, Shandong University of Science and
Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

Abstract: In this paper, a discontinuous fractional-order memristive-based neural network (FMNN) with time delay is presented and the complex nonlinear dynamics is investigated using the numerical simulation. Initially, a mathematical model of discontinuous FMNN is introduced, afterwards taking the initial value, the fractional order or the switching jump as bifurcation parameters, some typical nonlinear dynamical behaviors are verified using bifurcation diagrams, phase portraits, and Poincaré mappings. The results show that different from period-doubling route, the mechanism behind the emergence of chaos for the discontinuous FMNN is the intermittency route to chaos. Besides, the internal influence mechanism of discontinuous memductance function and the switching jump of memristor on the dynamic behaviors of the proposed FMNN also revealed.

Key words: discontinuous memductance function; FMNN; bifurcation analysis; switching jump; nonlinear dynamics.

1971年,华裔科学家蔡少棠^[1]根据概念的对称性首次提出了忆阻器的概念,描述了磁通和电荷之间的

收稿日期:2018-05-04

基金项目:国家自然科学基金项目(61473178,61573008)

作者简介:张 冲(1992—),男,山东济宁人,硕士研究生,主要从事神经网络理论及应用的研究。

黄 霞(1978—),女,山东泰安人,教授,博士生导师,主要从事非线性系统理论及应用、神经网络理论及应用、分数阶系统理论及应用方面的研究,本文通信作者。E-mail: huangxia_qd@126.com

非线性关系。2008年,惠普公司研究团队首次实现了具有 TiO_2 双层薄膜结构的实物忆阻器^[2]。由于忆阻器的阻值依赖于电压或电流的作用时间而非当前时刻的瞬时值,从而使得忆阻器成为天然的非易失性存储器,即当忆阻器两端电压(或电流)掉电时,忆阻器仍然能记忆其当前时刻的电阻值。文献[3]研究表明忆阻器能够模拟大脑中的神经突触,由于忆阻器的这种记忆特性,越来越多的研究者用忆阻器代替传统神经网络中的电阻来构建忆阻神经网络^[4]。近年来,忆阻神经网络(memristive neural networks, MNNS)的动力学行为得到了广泛的研究^[5]。

分数阶微积分目前在各个领域都得到了广泛的应用。相较于整数阶微积分,分数阶微积分最主要的优点在于其具有记忆特性,这使得它为描述具有遗传和记忆特性的各种物质和过程提供了更新颖的、准确的数学工具^[6]。文献[7]表明分数阶微积分能够更精确地刻画小鼠大脑新皮层锥体神经元的动力学行为。鉴于此,为了更好地描述大脑神经元的动力学过程,一些研究人员将分数阶微积分引入到神经网络中,建立了分数阶神经网络模型^[8]。神经网络可以由超大规模集成电路(vary large scale integration, VLSI)来实现^[9]。在整数阶神经网络中,电容是整数阶的。然而,大量研究表明电容实际上是分数阶的^[10]。为此,研究人员用分数阶电容代替整数阶电容来构建神经网络电路,以提高模型的精确度,从而建立了分数阶神经网络。与整数阶神经网络相比,分数阶神经网络的非线性更强,且具有更多自由参数。近年来,关于分数阶神经网络的动力学研究取得了巨大的进展^[11]。

为了更精确地描述大脑神经元的动力学行为,研究人员结合忆阻器和分数阶微积分的优点建立了分数阶忆阻神经网络模型(fractional memristive neural networks, FMNNS)^[12]。从电路实现的角度来看,FMNNS可以通过将整数阶忆阻神经网络中的整数阶电容用分数阶电容代替来实现。虽然目前关于整数阶忆阻神经网络的动力学研究成果丰硕,但是传统的分析方法如 Lyapunov 方法和矩阵测度方法等都不能直接应用到分数阶忆阻神经网络中去。因此,如何将分数阶微积分理论的最新研究成果应用到分数阶忆阻神经网络的分析中来是目前急需解决的问题。分数阶和忆阻器的引入给神经网络的动力学分析带来了巨大的困难和挑战。近年来,关于分数阶忆阻神经网络的研究已经取得了一些成果^[12-17]。文献[12]利用分数阶李雅普诺夫函数方法研究了 FMNNS 的 Mittag-Leffler 的稳定性。文献[14]利用不等式技术研究了时滞 FMNNS 的自适应同步问题。文献[15]研究了时滞 FMNNS 的混合投影同步。文献[16]利用比较原理研究了参数不确定多时滞 FMNNS 的同步问题。文献[17]利用新的 Mittag-Leffler 估计引理研究了参数不匹配 FMNNS 的准同步问题。

根据上述讨论可知,文献[5,11]研究的都是连续型神经网络的动力学,文献[13]研究了具有不连续忆导函数的 FMNN 的动力学行为,文献[12,14-17]主要研究了不连续忆阻神经网络的稳定性和同步问题。目前尚没有文献对不连续时滞 FMNN 的非线性动力学进行研究。为此,提出了一个不连续时滞分数阶忆阻神经网络模型,并研究了不同的分岔参数对系统动力学行为的影响。值得注意的是,不连续时滞分数阶忆阻神经网络的连接权重不同,使得其包含多个子系统。系统随开关阶跃 T 的变化而切换,使系统的动力学行为更加复杂。另外,文献[5,11]中提出的系统通往混沌的道路大多为倍周期分岔或反向倍周期分岔,而本研究提出的 FMNN 模型通往混沌的道路为阵发混沌,动力学行为更加丰富。不连续忆导函数和开关阶跃的加入能够极大地丰富系统的动力学行为,所得结果为不连续 FMNN 的应用打下基础。

1 预备知识

1.1 Caputo 型分数阶导数

定义 1^[18] 函数 $f(t)$ 的 α 阶 Caputo 型分数阶导数定义如下:

$${}_{t_0} D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau,$$

其中 $t \geq t_0$, n 是正整数并且满足 $n-1 < \alpha < n$ 。当 $0 < \alpha < 1$ 时,可以得到

$${}_{t_0} D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau) d\tau.$$

1.2 忆阻器模型

忆阻器最初被用来描述磁通 φ 和电荷 q 之间的关系。磁通 φ 和电荷 q 之间的关系可以用 $q - \varphi$ 或 $\varphi - q$ 平面上一条过原点的特性曲线 $f(\varphi, q) = 0$ 来表征。磁通和电荷之间的关系 $\varphi = \varphi(q)$ 可以定义一个电荷控制(或电流控制)的忆阻器。此时,非线性关系 $f(\varphi, q) = 0$ 能由关于电荷 q 的单值方程 $\varphi = \varphi(q)$ 表示出来。因此,忆阻器可以用其忆阻值 $M(q)$ 来表征,其电流-电压关系特性为

$$V = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi(q)}{dt} = \frac{d\varphi(q)}{dq} \frac{dq}{dt} = M(q)i,$$

其中,忆阻值 $M(q) \triangleq \frac{d\varphi(q)}{dq}$, 即忆阻值由特性曲线 $\varphi = \varphi(q)$ 的斜率来决定^[19]。

同样地,电荷-磁通特征关系 $q = q(\varphi)$ 能定义一个磁通控制(或电压控制)的忆阻器。此时, $f(\varphi, q) = 0$ 能由一个关于磁通 φ 的单值方程 $q = q(\varphi)$ 来表示。由此可以推出:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq(\varphi)}{dt} = \frac{dq(\varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = W(\varphi)v.$$

其中, $W(\varphi)$ 是由 $W(\varphi) \triangleq \frac{dq(\varphi)}{d\varphi}$ 定义的忆导值,只能由曲线 $q = q(\varphi)$ 的斜率确定。

2 不连续时滞分数阶忆阻神经网络中的混沌现象

考虑一类不连续时滞分数阶忆阻神经网络^[14-17],表示如下:

$${}_0D_t^\alpha x_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j(t))f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(x_j(t))g_j(x_j(t-\tau)), \quad (1)$$

其中, $i=1,2,\dots,n$, n 代表神经元的数量; $0 < \alpha < 1$ 代表分数阶; $c_i > 0$ 代表自反馈系数; $x_i(t)$ 为第 i 个神经元的状态变量; $f_j(\cdot)$, $g_j(\cdot)$ 代表激活函数; τ 代表时滞。忆阻连接系数 $a_{ij}(x_j(t))$ 和 $b_{ij}(x_j(t))$ 可以表示为:

$$a_{ij}(x_j(t)) = \begin{cases} a_{ij}^*, & |x_j(t)| \leq T, \\ a_{ij}^{**}, & |x_j(t)| > T, \end{cases} \quad b_{ij}(x_j(t)) = \begin{cases} b_{ij}^*, & |x_j(t)| \leq T, \\ b_{ij}^{**}, & |x_j(t)| > T, \end{cases}$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$, 开关阶跃(阈值电压) $T > 0$, a_{ij}^* , a_{ij}^{**} , b_{ij}^* , b_{ij}^{**} , 均为常数。系统(1)的初始状态设为 $x_i(s) = \vartheta_i(s)$, $s \in [-\tau, 0]$, $\vartheta_i(s) \in C([-\tau, 0], R)$ 。

本文提出了一个三维的不连续时滞分数阶忆阻神经网络模型,描述为

$${}_0D_t^\alpha x_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^3 a_{ij}(x_j(t))f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^3 b_{ij}(x_j(t))g_j(x_j(t-\tau)), \quad (2)$$

其中,将参数设置如下: $c_1 = 2.2$, $c_2 = 1.2$, $c_3 = 1.8$, $\tau = 0.8$, $T = 1$, $f_j(x_j) = g_j(x_j) = \tanh(x_j)$, $j = 1, 2, 3$ 。不连续的连接权重为:

$$\begin{aligned} a_{11}(x_1(t)) &= \begin{cases} 2, & |x_1(t)| > 1, \\ 2.2, & |x_1(t)| \leq 1, \end{cases} & a_{12}(x_2(t)) &= \begin{cases} -2.1, & |x_2(t)| > 1, \\ -2, & |x_2(t)| \leq 1, \end{cases} & a_{13}(x_3(t)) &= \begin{cases} 1.8, & |x_3(t)| > 1, \\ 2, & |x_3(t)| \leq 1, \end{cases} \\ a_{21}(x_1(t)) &= \begin{cases} -0.6, & |x_1(t)| > 1, \\ -0.8, & |x_1(t)| \leq 1, \end{cases} & a_{22}(x_2(t)) &= \begin{cases} 5.68, & |x_2(t)| > 1, \\ 5.71, & |x_2(t)| \leq 1, \end{cases} & a_{23}(x_3(t)) &= \begin{cases} 1.1, & |x_3(t)| > 1, \\ 1.15, & |x_3(t)| \leq 1, \end{cases} \\ a_{31}(x_1(t)) &= \begin{cases} -4.5, & |x_1(t)| > 1, \\ -4.75, & |x_1(t)| \leq 1, \end{cases} & a_{32}(x_2(t)) &= \begin{cases} -0.8, & |x_2(t)| > 1, \\ -1, & |x_2(t)| \leq 1, \end{cases} & a_{33}(x_3(t)) &= \begin{cases} 1.25, & |x_3(t)| > 1, \\ 1.2, & |x_3(t)| \leq 1, \end{cases} \\ b_{11}(x_1(t)) &= \begin{cases} -3.8, & |x_1(t)| > 1, \\ -4, & |x_1(t)| \leq 1, \end{cases} & b_{12}(x_2(t)) &= \begin{cases} 2.3, & |x_2(t)| > 1, \\ 2.5, & |x_2(t)| \leq 1, \end{cases} & b_{13}(x_3(t)) &= \begin{cases} -3, & |x_3(t)| > 1, \\ -3.2, & |x_3(t)| \leq 1, \end{cases} \\ b_{21}(x_1(t)) &= \begin{cases} -1.7, & |x_1(t)| > 1, \\ -1.5, & |x_1(t)| \leq 1, \end{cases} & b_{22}(x_2(t)) &= \begin{cases} -3.8, & |x_2(t)| > 1, \\ -3.6, & |x_2(t)| \leq 1, \end{cases} & b_{23}(x_3(t)) &= \begin{cases} -2.5, & |x_3(t)| > 1, \\ -2.3, & |x_3(t)| \leq 1, \end{cases} \\ b_{31}(x_1(t)) &= \begin{cases} 0.4, & |x_1(t)| > 1, \\ 0.3, & |x_1(t)| \leq 1, \end{cases} & b_{32}(x_2(t)) &= \begin{cases} 2, & |x_2(t)| > 1, \\ 1.8, & |x_2(t)| \leq 1, \end{cases} & b_{33}(x_3(t)) &= \begin{cases} 1.5, & |x_3(t)| > 1, \\ 1.2, & |x_3(t)| \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

令 $\alpha = 0.905$, 初始状态设定为 $\mathbf{x}(s) = (0.9, -0.5, 0.7)^T, \forall s \in [-0.8, 0]$ 。如图 1 所示, 系统(2)能够产生混沌吸引子。

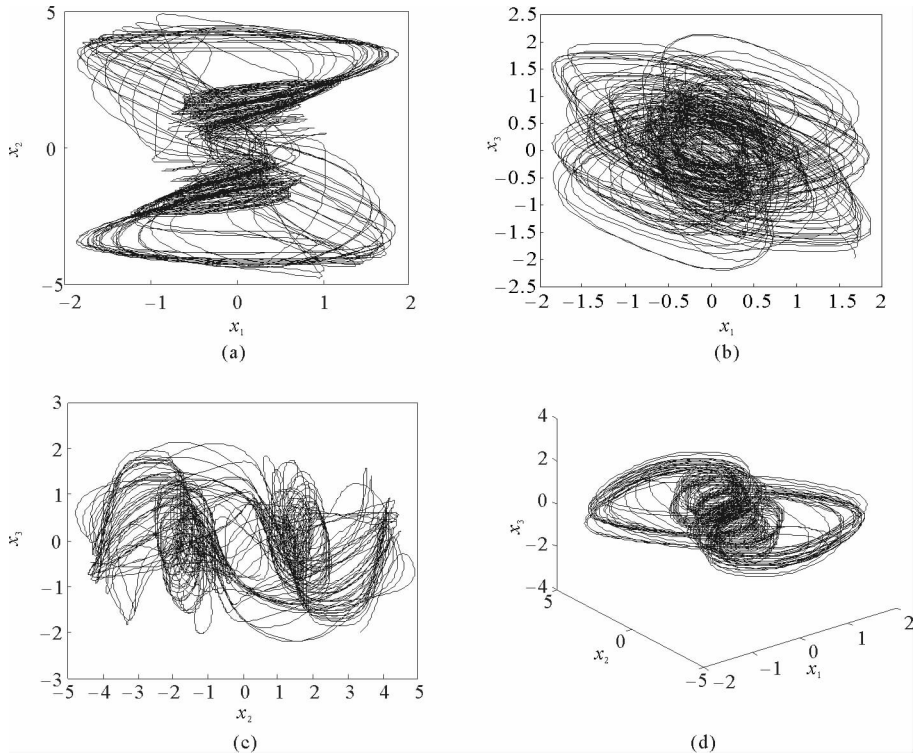


图 1 当初始状态 $\mathbf{x}(s) = (0.9, -0.5, 0.7)^T$ 时系统(2)的相图

Fig. 1 Phase portraits of system (2) with initial condition $\mathbf{x}(s) = (0.9, -0.5, 0.7)^T$

2.1 随初值 x_{10} 的分岔分析

上述分析已经验证: 当 $\alpha = 0.905, \mathbf{x}(s) = (0.9, -0.5, 0.7)^T, T = 1$ 时, 系统处于混沌状态。因此, 取系统的初始状态 $\alpha = 0.905, T = 1, (x_1, x_2, x_3)^T = (x_{10}, -0.5, 0.7)^T$, x_{10} 的变化范围为 $0.9 \sim 9$, 步长为 0.02 。分数阶微分方程(2)通过 Adams-Bashforth-Moulton 预估-校正算法^[20] 求解, 步长为 0.005 。如图 2 所示, 当 x_{10} 从 0.9 变化到 8.12 时, 随着 x_{10} 的增加, 系统(2)表现出混沌行为。当 x_{10} 从 8.14 变化到 9 , 系统(2)出现周期-1 轨道。

分别选取不同的 x_{10} , 系统(2) 的相图及相应的庞加莱截面(选取的截面为 $x_1 = 0.5$) 如图 3 ~ 4 所示, 仿真时间范围设为 $[200 \text{ s}, 400 \text{ s}]$ 。不同的 x_{10} 对应的动力学行为如表 1 所示。

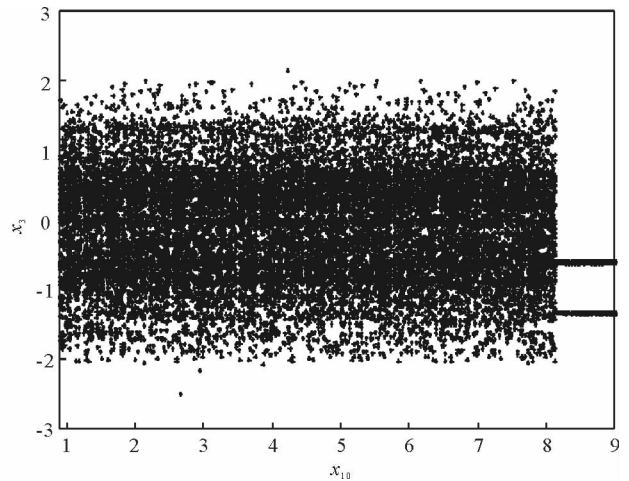


图 2 随 x_{10} 变化的分岔图

Fig. 2 Bifurcation diagram with varied x_{10}

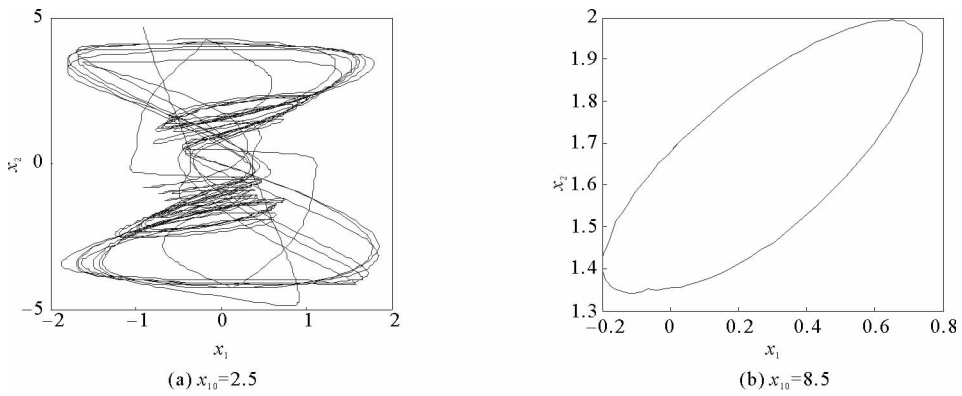


图3 x_{10} 取不同值时系统(2)的相图

Fig. 3 Phase portraits exhibited in system (2) with different values of x_{10}

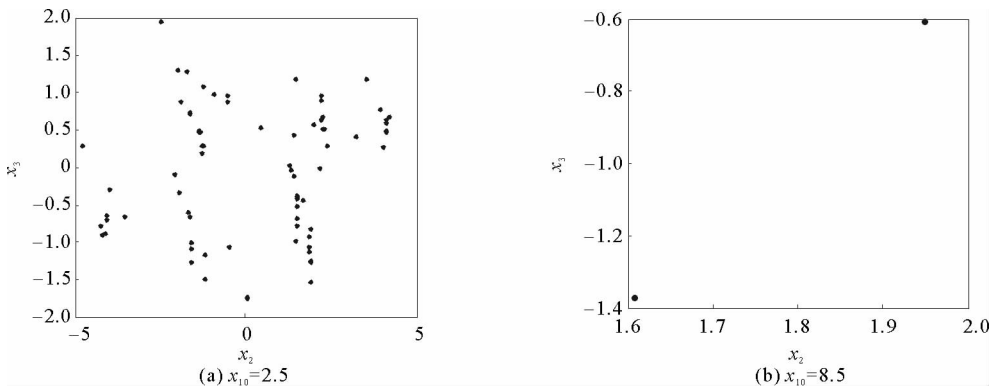


图4 x_{10} 取不同值时系统(2)的庞加莱截面

Fig. 4 Poincaré sections of system (2) with different values of x_{10}

2.2 随分数阶 α 的分岔分析

令初始状态 $(x_1, x_2, x_3)^T = (1, -0.5, 0.7)^T, T = 1$ 。 α 从 0.8 变化到 1, 步长为 0.000 4。如图 5 所示, 当 $\alpha \in [0.841 6, 0.909 2], [0.910 8, 0.951 6]$ 和 $[0.954 0, 0.951 2]$ 时, 系统(2) 展现出混沌状态。当 $\alpha \in [0.800 0, 0.841 2], [0.909 6, 0.910 4], [0.952 0, 0.953 6], [0.961 6, 0.986 0], [0.986 4, 0.993 6]$ 和 $[0.994 0, 1.000 0]$ 时, 系统(2) 表现出周期状态。

选取不同的分数阶 α , 系统(2) 的相图及相应的庞加莱截面(选取的截面为 $x_1 = 0$) 如图 6 ~ 7 所示, 仿真时间范围设为 $[200 \text{ s}, 400 \text{ s}]$ 。不同的分数阶 α 对应的动力学行为如表 2 所示。

表 1 x_{10} 取不同值时系统(2) 的动力学

Tab. 1 Dynamics of system (2) for different x_{10}

x_{10}	动力学	图
2.5	混沌	图 3(a)
8.5	周期-1	图 3(b)

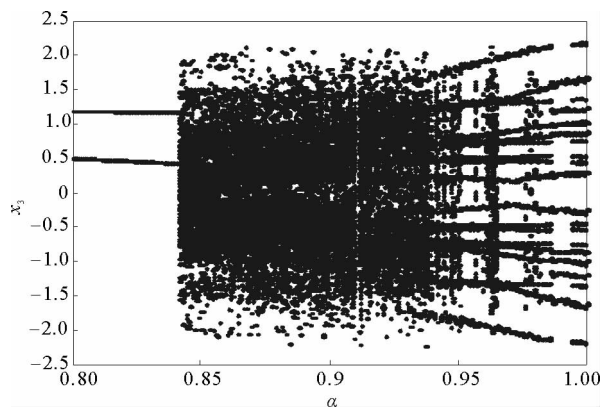


图5 随 α 变化的分岔图

Fig. 5 Bifurcation diagram with varied α

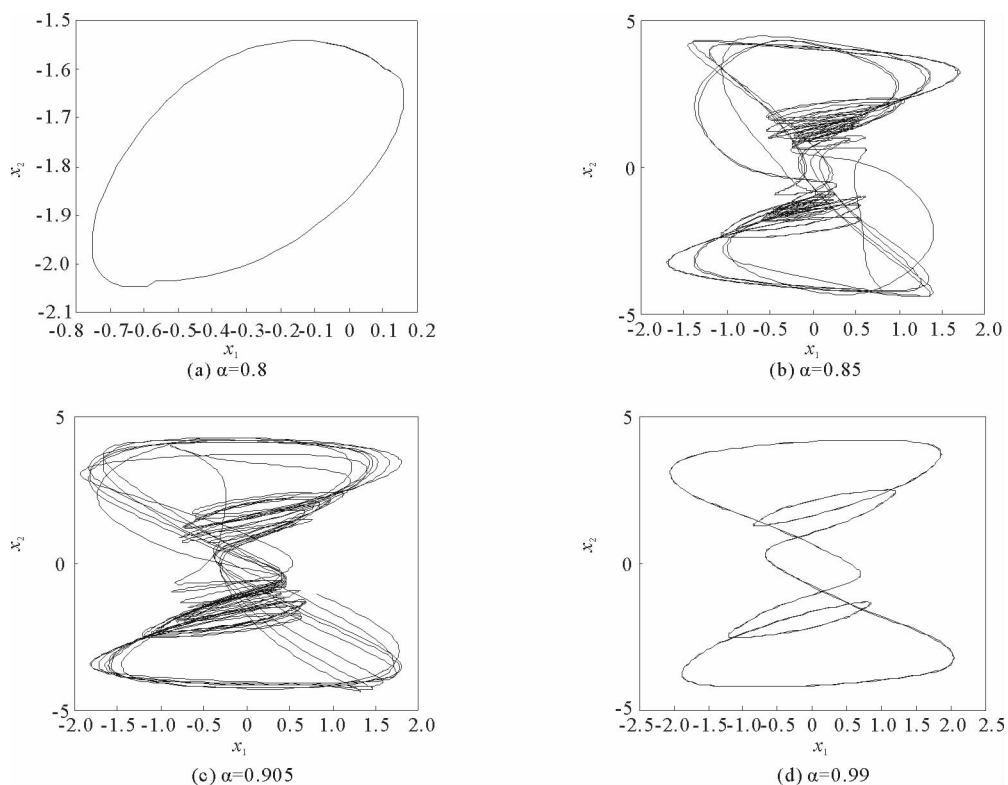


图 6 α 取不同值时系统(2)的相图

Fig. 6 Phase portraits exhibited in system (2) with different values of α

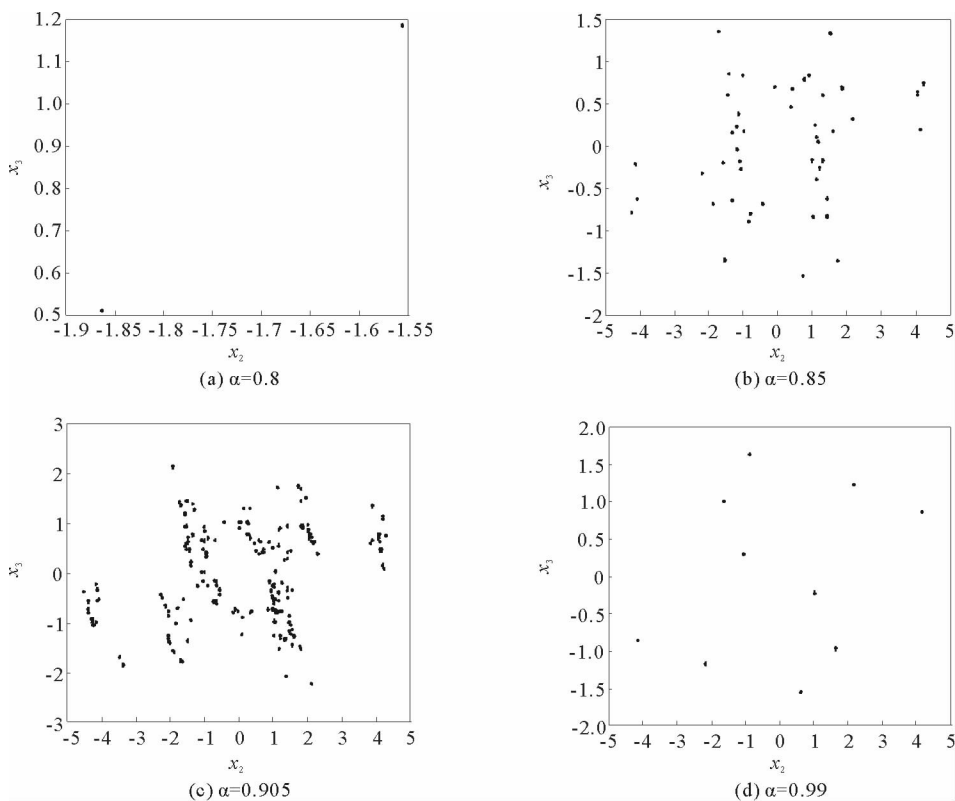


图 7 α 取不同值时系统(2)的庞加莱截面

Fig. 7 Poincaré sections of system (2) with different values of α

由图2、图5可以看出,随着分岔参数的变化,周期窗口与混沌窗口以阵发的形式交替出现,而未出现通过倍周期分岔到混沌的这种分岔过程。因此,不同于文献[5,11]中所研究的连续型系统的倍周期分岔,不连续系统(2)通往混沌的道路为阵发混沌。因此,本研究丰富了之前的结果。

2.3 开关阶跃 T 的分岔分析

令初始状态 $(x_1, x_2, x_3)^T = (1, -0.5, 0.7)^T$, $\alpha = 0.905$ 。 T 的变化范围为 $0.1 \sim 1.1$, 步长为 0.002 。当 $T \in [0.392, 0.544], [0.590, 1.100]$ 时,系统(2)展现出混沌状态。当 $T \in [0.100, 0.222], [0.224, 0.390], [0.546, 0.588]$ 时,系统(2)表现出周期状态。

选取不同的开关阶跃 T ,系统(2)的相图及相应的庞加莱截面(选取的截面为 $x_1 = 0$)如图9~10所示,仿真时间范围设为 $[200\text{ s}, 400\text{ s}]$ 。不同的开关阶跃 T 对应的动力学行为如表3所示。

表2 α 取不同值时系统(2)的动力学
Tab.2 Dynamics of system (2) for different α

a	动力学	图
0.800	周期-1	图6(a)
0.850	混沌	图6(b)
0.905	混沌	图6(c)
0.990	周期-5	图6(d)

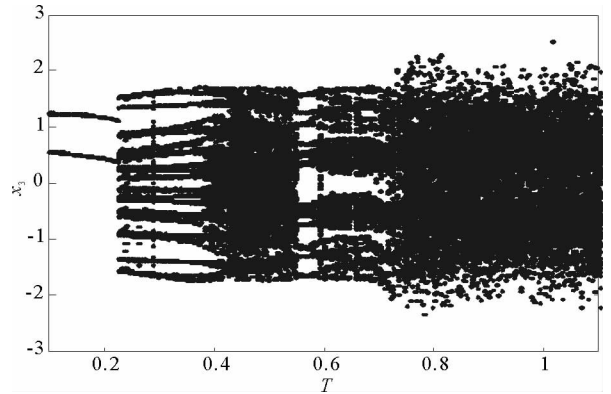
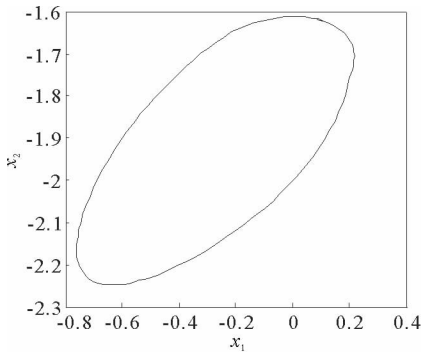
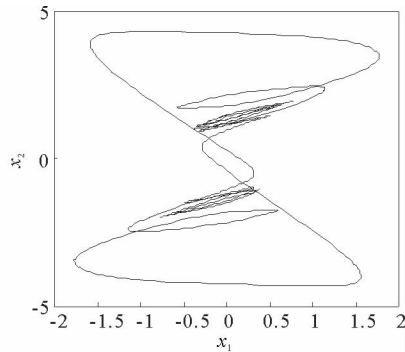


图8 随 T 变化的分岔图

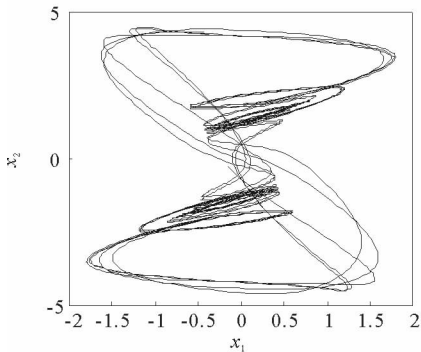
Fig. 8 Bifurcation diagram with varied T



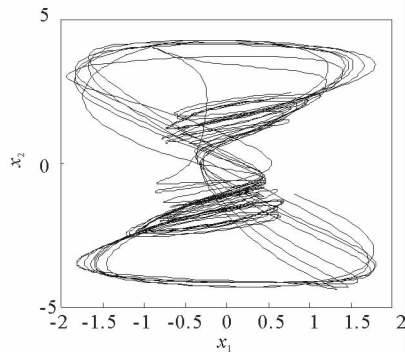
(a) $T=0.2$



(b) $T=0.3$



(c) $T=0.45$



(d) $T=1$

图9 T 取不同值时系统(2)的相图

Fig. 9 Phase portraits exhibited in system (2) with different values of T

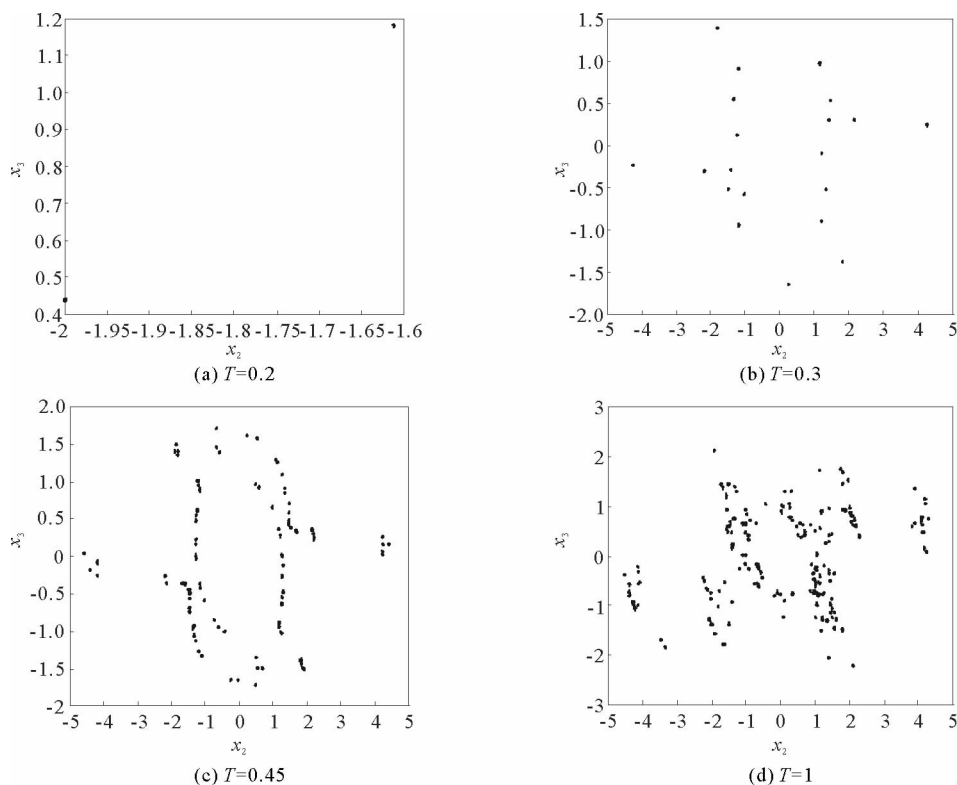


图 10 T 取不同值时系统(2)的庞加莱截面

Fig. 10 Poincaré sections of system (2) with different values of T

表 3 T 取不同值时系统(2)的动力学

Tab. 3 Dynamics of system (2) for different T

T	动力学	图
0.20	周期-1	图 9(a)
0.30	周期-10	图 9(b)
0.45	混沌	图 9(c)
1.00	混沌	图 9(d)

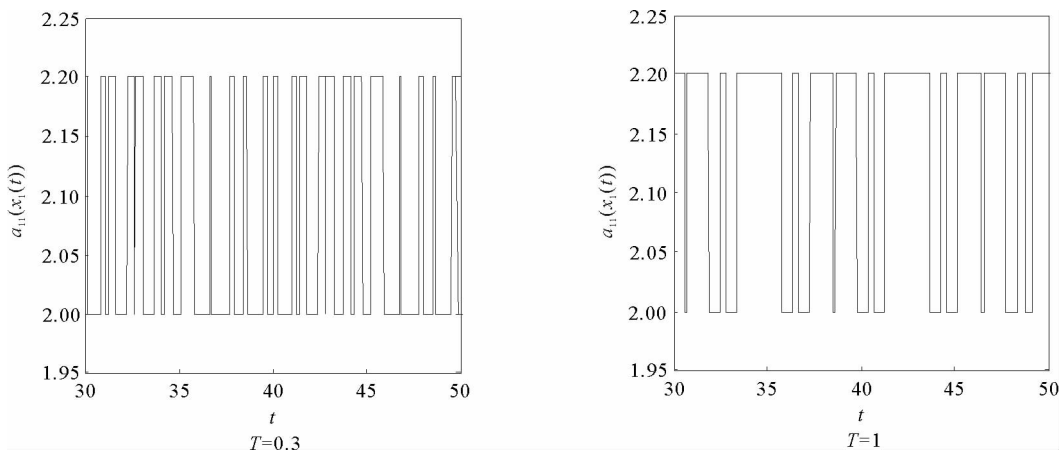


图 11 T 取不同值时 $a_{11}(x_1(t))$ 的切换律

Fig. 11 Switching laws of $a_{11}(x_1(t))$ with different values of T

由于不连续忆导函数的存在,使得系统(1)本质上是一个由 2^n 个子系统构成的切换系统。显然,新构建的系统(2)由8个子系统构成。因此,不连续忆导函数的加入可以丰富切换系统的子系统数目。特别地,本文分析了开关阶跃 T 对系统(2)动力学行为的影响。本文忆阻器的阻值是二值切换的,当开关阶跃 T 达到阈值电压时,忆阻器的阻值为一个特定的值,当开关阶跃 T 的值小于阈值电压时,忆阻器的阻值为另一个特定的值。忆阻器的阻值在两个值之间切换,系统展现出复杂的动力学行为。值得注意的是,不同的开关阶跃 T 并没有改变系统(2)的8个子系统的动力学行为,但可以改变忆阻连接权重的切换律。如图11所示,不同的开关阶跃 T 能够产生不同的切换律,进而可以影响或改变系统(2)的动力学行为。

3 结论

提出了一个不连续的时滞分数阶忆阻神经网络模型,通过选取不同的分岔参数,对该模型进行了详细的分岔分析。利用分岔图、相图和庞加莱截面等数值仿真手段验证了其典型的动力学行为。不同于倍周期分岔,所提出的不连续分数阶忆阻神经网络通往混沌的道路为阵发混沌。同时,还揭示了不连续的忆导函数和开关阶跃 T 对系统动力学的内在影响机制。研究结果可为混沌生成提供新的思路和方法。

参考文献:

- [1]CHUA L O. Memristor-the missing circuit element[J]. IEEE Transactions on Circuit Theory,1971,18(5):507-519.
- [2]STRUKOV D B,SNIDER G S,STEWART D R,et al. The missing memristor found[J]. Nature,2008,453:80-83.
- [3]ITOH M,CHUA L O. Memristor cellular automata and memristor discrete-time cellular neural networks[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos,2009,19(11):3605-3656.
- [4]THOMAS A. Memristor-based neural networks[J/OL]. Journal of Physics D: Applied Physics,2013,46(9):093001.
- [5]LI Y,HUANG X,SONG Y,et al. A new fourth-order memristive chaotic system and its generation[J/OL]. International Journal of Bifurcation and Chaos,2015,25(11):1550151.
- [6]HILFER R. Applications of fractional calculus in physics[M]. Hackensack: World Scientific Publishing,2001.
- [7]LUNDSTROM B N,HIGGS M H,SPAIN W J,et al. Fractional differentiation by neocortical pyramidal neurons[J]. Nature Neuroscience,2008,11:1335-1342.
- [8]BOROUMAND A,MENHAJ M. Fractional-order Hopfield neural networks[J]. Lecture Notes in Computer Science,2009,5506:883-890.
- [9]WEN S,HUANG T,ZENG Z,et al. Circuit design and exponential stabilization of memristive neural networks[J]. Neural Networks,2015,63:48-56.
- [10]WESTERLUND S,EKSTAM L. Capacitor theory[J]. IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation,1994,1(5):826-839.
- [11]HUANG X,ZHAO Z,WANG Z,et al. Chaos and hyperchaos in fractional-order cellular neural networks[J]. Neurocomputing,2012,94:13-21.
- [12]CHEN J,ZENG Z,JIANG P. Global Mittag-Leffler stability and synchronization of memristor-based fractional-order neural networks[J]. Neural Networks,2014,51:1-8.
- [13]FAN Y,HUANG X,WANG Z,et al. Nonlinear dynamics and chaos in a simplified memristor-based fractional-order neural network with discontinuous memductance function[J]. Nonlinear Dynamics,2018,93:611-627.
- [14]BAO H,PARK J H,CAO J. Adaptive synchronization of fractional-order memristor-based neural networks with time delay[J]. Nonlinear Dynamics,2015,82(3):1343-1354.
- [15]VELMURUGAN G,RAKKIYAPPAN R. Hybrid projective synchronization of fractional-order memristor-based neural networks with time delays[J]. Nonlinear Dynamics,2016,83(½):419-432.
- [16]GU Y,YU Y,WANG H. Synchronization for fractional-order time-delayed memristor-based neural networks with parameter uncertainty[J]. Journal of the Franklin Institute,2016,353(15):3657-3684.
- [17]HUANG X,FAN Y,JIA J,et al. Quasi-synchronisation of fractional-order memristor-based neural networks with parameter mismatches[J]. IET Control Theory & Applications,2017,11(14):2317-2327.
- [18]PODLUBNY I. Fractional differential equations[M]. New York: Academic Press,1999:16-79.
- [19]ITOH M,CHUA L O. Memristor oscillators[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos,2008,18(11):3183-3206.
- [20]DIETHELM K,FORD N J,FREED A D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations[J]. Nonlinear Dynamics,2002,29(1/2/3/4):3-22.