污染环境下具有脉冲输入环境毒素的恒化器模型的灭绝阈值研究

王 芳,程惠东
(山东科技大学 理学院,山东 青岛 266510)

摘 要:研究了污染环境下具有脉冲输入环境毒素的恒化器模型。利用乘子理论和小振幅扰动法,得到当脉冲输入营养物小于一个临界值或环境毒素的排放量大于一个临界值时,种群灭绝周期解全局渐进稳定的结论,同时得到了种群持久的条件。从生物学观点提出了污染环境下保护物种的方法是改变营养物的输入量或控制环境毒素的排放量。

关键词:恒化器模型;全局渐近稳定;灭绝;持久;脉冲输入

中图分类号:O175.2 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-3767(2011)01-0071-07

Study on Extinction Threshold of a Chemostat Model with Environmental Toxin of Pulse Input in a Polluted Environment

WANG Fang,CHENG Huidong
(College of Sciences,Shandong University of Science and Technology,Qingdao,Shandong 266510,China)

Abstract: In this paper,a chemostat model with environmental toxin of pulse input in a polluted environment was studied. Using Floquet theory and small amplitude perturbation method,a conclusion was that there existed a global asymptotical stability for periodic solution of population extinction when the impulsive input concentration of nutrients was less than some critical value or the discharge volume of toxicants was larger than some critical value. At the same time,the condition of the population permanence was obtained. From the biological point of view,the method for protecting species is to improve the amount of nutrient input,and control the amount of toxicant input to the chemostat under the polluted environment.

Key words:chemostat model; global asymptotical stability; extinction; permanence; impulsive input

恒化器是一种用来培养微生物的实验装置,它被用作研究微生物的增长并有着参数易于测量的优点。许多学者研究了周期输入营养液的恒化器模型[1-4],但恒化器模型中含有污染情况的研究却不多见,而由工业排污或者农业杀虫剂所造成的环境污染是目前重要的社会问题与生态问题之一。为了合理地应用和控制有毒物质,必须评估种群受有毒物质损害的程度。因此研究有害物质对微生物种群的影响,并且找到一个能够测定微生物种群持久与灭绝的理论阈值是非常重要的。

考虑到现实问题中与突然性的干扰相联系的系统是脉冲微分方程,同时,在该污染环境中生活的生物体体内也会积聚一定量的毒素,除了自身具有的净化作用可以排除体内毒素,当然也可以采取一些辅助的手段帮其排毒。受文献[5]、文献[6]的启发,考虑生物种群的自身净化作用,本文建立污染环境中毒素作用下的恒化器模型(式(1)),并研究其动力学行为。

收稿日期:2010-05-15
基金项目:山东科技大学科学研究“春蕾计划”项目(2010AZZ084).
作者简介:王 芳(1975—),女,山东泰安人,讲师,主要从事生物数学方面的研究工作. E-mail:sandywangfang@163.com.

$$
\begin{cases}
S'(t)=-DS(t)-\dfrac{\mu S(t)x(t)}{\delta(k+S(t))},\ t\neq nT,n\in N\\
x'(t)=-Dx(t)+\dfrac{\mu S(t)x(t)}{k+S(t)}-\beta c_0(t)x(t),\ t\neq nT,n\in N\\
c'_0(t)=fc_e(t)-(g+m)c_0(t),\ t\neq nT,n\in N\\
c'_e(t)=-hc_e(t),\ t\neq nT,n\in N\\
S(t^+)=S(t)+p_1,\ t=nT,n\in N\\
x(t^+)=x(t),\ t=nT,n\in N\\
c_0(t^+)=c_0(t),\ t=nT,n\in N\\
c_e(t^+)=c_e(t)+p_2,\ t=nT,n\in N\\
S(0^+)\geqslant 0,x(0^+)\geqslant 0,c_0(0^+)\geqslant 0,c_e(0^+)\geqslant 0
\end{cases}
\tag{1}
$$

式中:$S(t)$—t 时刻在培养基中未被耗尽的营养液的浓度,$x(t)$—t 时刻种群的密度,$c_e(t)$—t 时刻生物体内毒素的浓度,$c_e(t)$—t 时刻恒化器中有害物质的浓度,D—恒化器的流速率;$\dfrac{\mu S(t)x(t)}{\delta(k+S(t))}$—生物种群每个 S 个体的营养摄入率,$\beta c_0(t)$—种群吸收了毒素而导致种群减少的反应函数,$fc_e(t)$—t 时刻个体从环境中吸收的毒素,$gc_0(t)$和 $mc_0(t)$分别表示 t 时刻个体体内毒素的排泄率和个体体内毒素的净化率,$hc_e(t)$—由于生物转移、挥发、细菌的退化与死亡,以及光合作用等因素所引起的毒素量的减少;f,h,g,m 为系数,T 为脉冲周期,p_1为在 $t=nT$ 时有害物质的脉冲输入量。

$S(t)$在 $t=nT$ 处左连续,即 $S(nT)=S(nT^-)$;$x(t),c_0(t)$对于任意 $t\geqslant 0$ 是连续的;$c_e(t)$在 $t=nT$ 处左连续,即 $c_e(nT)=c_e(nT^-)$。具体参阅文献[1]、文献[2]。系统(1)中的常数均为正。本文的目的是,证明在一定条件下,系统(1)有一个灭绝周期解并进一步证明它是全局吸引的,同时寻求系统(1)持久的条件。

1 预备知识

定义 1 系统(1)是持久的,如果存在常数 $M>m>0,m_1<M,m_0<M_0,m_e<M_e$,使得对于足够大的 t 有 $m\leqslant S(t)\leqslant M,m_1\leqslant x(t)\leqslant M,m_0\leqslant c_0(t)\leqslant M_0,m_e\leqslant c_e(t)\leqslant M_e$。这里$(S(t),x(t),c_0(t),c_e(t))$是系统(1)在初始条件 $S(0^+)\geqslant 0,x(0^+)\geqslant 0,c_0(0^+)\geqslant 0,c_e(0^+)\geqslant 0$ 下的任一解。

引理 1(比较定理[7]) 设 $\varphi:R_+\times R_+\to R$ 在$(nT,(n+1)T]\times R_+$上连续并且对任意 $x\in R_+,n\in N$,$\lim\limits_{(t,y)\to(nT^+,x)}\varphi(t,y)=\varphi(nT^+,x)$存在。再设 $\psi_n:R_+\to R_+$是非减函数,$r(t)$是脉冲微分方程

$$
\begin{cases}
u'=\varphi(t,u),\ t\neq nT\\
u(t^+)=\psi_n(u(t)),\ t=nT\\
u(0^+)=u
\end{cases}
\tag{2}
$$

在$[0,\infty)$上的最大解,若连续函数 $V:R_+\times R_+\to R_+$满足

$$
\begin{cases}
D^+V(t,z)\leqslant\varphi(t,V(t,z(t))),\ t\neq nT\\
V(t,z(t^+))\leqslant\psi_n(V(t,z(t))),t=nT
\end{cases}
\tag{3}
$$

且 $V(0^+,z_0)\leqslant u_0$,则 $V(t,z(t))\leqslant r(t),t\geqslant 0$,其中 $z(t)$是系统(3)在$[0,\infty)$上的解。

注:在引理 1 中,如果不等式的符号反过来,那么 $V(t,z(t))\geqslant\rho(t),t\geqslant 0$,其中 $\rho(t)$是系统(2)的最小解,$t\in[0,\infty)$。

为了方便,给出系统的基本性质:

$$
\begin{cases}
S'(t)=-DS(t),\ t\neq nT,n\in N\\
S(t^+)=S(t)+p_1,t=nT,n\in N,\\
S(0^+)=S_{10}\geqslant 0
\end{cases}
\tag{4}
$$

$$
\begin{cases}
c'_0(t)=fc_e(t)-(g+m)c_0(t),t\neq nT,n\in N\\
c'_e(t)=-hc_e(t),\ t\neq nT,n\in N\\
c_0(t^+)=c_0(t),c_e(t^+)=c_e(t)+p_2,t=nT,n\in N
\end{cases}
。\tag{5}
$$

引理 2 系统(4)有正周期解 $S^*(t)$，并且对系统(4)的任一初始条件为 $S_{10}\geqslant 0$ 的解 $S(t)$，可以得到，当 $t\to\infty$ 时，有 $|S(t)-S^*(t)|\to 0$，而且(i)如果 $S_{10}\geqslant\frac{p_1}{1-e^{-DT}}$，那么 $S(t)\geqslant S^*(t)$；(ii)如果 $S_{10}<\frac{p_1}{1-e^{-DT}}$，那么 $S(t)<S^*(t)$。其中，$S^*(t)=\frac{p_1 e^{-D(t-nT)}}{1-e^{-DT}}$，$t\in(nT,(n+1)T]$，$n\in N$，$S^*(0^+)=\frac{p_1}{1-e^{-DT}}$。

证明:详见参考文献[8]。

引理 3 系统(5)有唯一周期解$(c_0^*(t),c_e^*(t))$且是全局渐近稳定的，其中

$$\begin{cases} c_0^*(t)=c_0^*(0^+)e^{-(g+m)(t-nT)}+\frac{p_2 f(e^{-(g+m)(t-nT)}-e^{-h(t-nT)})}{(h-g-m)(1-e^{-hT})} \\ c_e^*(t)=\frac{p_2 e^{-h(t-nT)}}{1-e^{-hT}}, \end{cases},t\in(nT,(n+1)T],n\in N,$$

$$c_0^*(0^+)=\frac{p_2 f(e^{-(g+m)T}-e^{-hT})}{(h-g-m)(1-e^{-(g+m)T})(1-e^{-hT})},$$

$$c_e^*(0^+)=\frac{p_2}{1-e^{-hT}}。$$

证明:详见参考文献[8]。

引理 4 设$(S(t),x(t),c_0(t),c_e(t))$是系统(1)的任一解，那么存在常数 M,m_0,M_0,m_e 和 M_e，使得 $S(t)\leqslant M$，$x_i(t)\leqslant M$，$m_0\leqslant c_0(t)\leqslant M_0$，$m_e\leqslant c_e(t)\leqslant M_e$。

证明:设$(S(t),x(t),c_0(t),c_e(t))$是系统(1)的任一解。取 $V(t)=S(t)+\frac{1}{\delta}x(t)$，$V(t)$沿系统(1)的右上导数为 $D^+V(t)=-DV(t)-\frac{\beta}{\delta}c_0(t)x(t)\leqslant -DV(t)$。

考虑脉冲微分方程 $\begin{cases} D^+V(t)\leqslant -DV(t),t\neq nT,n\in N \\ V(t^+)=V(t)+p_1,t=nT,n\in N \end{cases}$，由引理 1 可以得到

$$V(t)\leqslant V(0^+)e^{-Dt}+\frac{p_1 e^{-D(t-T)}}{1-e^{-DT}}+\frac{p_1 e^{DT}}{e^{DT}-1}\xrightarrow{t\to\infty}\frac{p_1 e^{DT}}{e^{DT}-1}。$$

根据 $V(t)$的定义可以看出，存在常数 M 使得对于足够大的 t 满足 $S(t)\leqslant M$，$x(t)\leqslant M$。由系统(5)可以得出，$m_0\leqslant c(t)\leqslant M_0$，$m_e\leqslant c(t)\leqslant M_e$。其中：

$$m_0=\frac{p_2 f(e^{-(g+m)T}-e^{-hT})}{(h-g-m)(1-e^{-(g+m)T})(1-e^{-hT})}-\varepsilon>0,m_e=\frac{p_2 e^{-hT}}{1-e^{-hT}}-\varepsilon>0,$$

$$M_0=\frac{p_2 f(e^{-(g+m)T}-e^{-hT})}{(h-g-m)(1-e^{-(g+m)T})(1-e^{-hT})}+\frac{p_2 f}{(h-g-m)(1-e^{-hT})}+\varepsilon,$$

$$M_e=\frac{p_2}{1-e^{-hT}}+\varepsilon,\varepsilon\text{ 足够小。}$$

证毕。

2 持续与灭绝

首先考虑种群的灭绝性。系统(4)和系统(5)分别有唯一正周期解 $S^*(t)$和 $c_0^*(t)$，$c_e^*(t)$，即系统(1)有一个灭绝周期解$(S^*(t),0,c_0^*,c_e^*(t))$，$t\in(nT,(n+1)T]$，$n\in N$，对于(1)的任意解$(S(t),x(t),c_0(t),c_e(t))$都有当 $t\to\infty$ 时，$S(t)\to S^*(t)$以及 $c_e(t)\to c_e^*(t)$。

定理 1 如果

$$p_1<\frac{k(1-e^{-DT})\left[\exp\left(\frac{D^2 T}{\mu}+\frac{D\beta f p_2}{\mu h(g+m)}\right)-1\right]}{1-\exp\left(\frac{D^2 T}{\mu}+\frac{D\beta f p_2}{\mu h(g+m)}-DT\right)}$$

或

$$p_2>\frac{\mu h(g+m)}{D\beta f}\ln\frac{k_1(1-e^{-DT})+p_1}{k_1(1-e^{-DT})+p_1 e^{-DT}}-\frac{DTh(g+m)}{\beta f},$$

则系统(1)的周期解$(S^*(t),0,c_0^*,c_e^*(t))$是全局渐近稳定的。

证明:设$(S(t),x(t),c_0(t),c_e(t))$是系统(1)的解。定义$S(t)=S^*(t)+\mu(t)$,$x(t)=y(t)$,$c_0(t)=c_0^*(t)+v_1(t)$,$c_e(t)=c_e^*(t)+v_2(t)$。

将系统(1)线性化得:

$$\begin{cases} u'(t)=-Du(t)-\dfrac{\mu S^*(t)y(t)}{\delta(k+S^*(t))},t\neq nT,n\in N \\ y'(t)=y(t)\left[\dfrac{\mu S^*(t)}{k+S^*(t)}-(D+\beta c_0^*(t))\right],t\neq nT,n\in N \\ v'(t)=-(g+m)v_1(t)+fv_2(t),t\neq nT,n\in N \\ v'_2(t)=-hv_2(t),t\neq nT,n\in N \\ u(t^+)=u(t),y(t^+)=y(t),v_1(t^+)=v_1(t),v_2(t^+)=v_2(t),t=nT,n\in N \end{cases} \tag{6}$$

设$\boldsymbol{\Phi}(t)$是系统(6)的标准基解矩阵,则$\boldsymbol{\Phi}(t)$满足$\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{I}$且

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix} -D & -\dfrac{\mu S^*(t)}{\delta(k+S^*(t))} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\mu S^*(t)}{k+S^*(t)}-D-\beta c_0^*(t) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -(g+m) & f \\ 0 & 0 & 0 & -h \end{pmatrix}\boldsymbol{\Phi}(t)\overset{\Delta}{=}\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t), \tag{7}$$

系统(6)的脉冲条件为$\begin{pmatrix} u(nT^+) \\ y(nT^+) \\ v_1(nT^+) \\ v_2(nT^+) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(nT) \\ y(nT) \\ v_1(nT) \\ v_2(nT) \end{pmatrix}$。

周期解$(S^*(t),0,c_0^*,c_e^*(t))$的稳定性由矩阵$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{\Phi}(T)$的特征值决定。由式(7)可得$\boldsymbol{\Phi}(T)=\boldsymbol{\Phi}(0)\exp(\int_0^T\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t)\overset{\Delta}{=}\boldsymbol{\Phi}(0)\exp(\bar{\boldsymbol{A}})$,其中$\bar{\boldsymbol{A}}=\int_0^T\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$。因而系统(6)的Floquet乘子[1]为$\lambda_1=\mathrm{e}^{-DT}<1$,$\lambda_2=\exp\left[\int_0^T\left(\dfrac{\mu S^*(t)}{k+S^*(t)}-D-\beta c_0^*(t)\right)\mathrm{d}t\right]$,$\lambda_3=\mathrm{e}^{-(g+m)T}<1$,$\lambda_4=\mathrm{e}^{-hT}<1$。根据Floquet理论[1],$(S^*(t),0,c_0^*,c_e^*(t))$是全局渐近稳定的,如果$\lambda_2<1$,即

$$p_1<\frac{k(1-\mathrm{e}^{-DT})\left[\exp\left(\dfrac{D^2T}{\mu}+\dfrac{D\beta fp_2}{\mu h(g+m)}\right)-1\right]}{1-\exp\left(\dfrac{D^2T}{\mu}+\dfrac{D\beta fp_2}{\mu h(g+m)}-DT\right)}$$

或

$$p_2>\frac{\mu h(g+m)}{D\beta f}\ln\frac{k_1(1-\mathrm{e}^{-DT})+p_1}{k_1(1-\mathrm{e}^{-DT})+p_1\mathrm{e}^{-DT}}-\frac{DTh(g+m)}{\beta f}。$$

下面证明周期解$(S^*(t),0,c_0^*,c_e^*(t))$的全局吸引性。

由于$p(z)=\dfrac{\mu_i z}{k_i+z}$,$(i=1,2)$对$z\geqslant 0$是严格单调递增的,从定理1的条件,可以选择足够小的ε使得$\sigma=\int_0^T\left[\dfrac{\mu(S^*(t)+\varepsilon)}{k+(S^*(t)+\varepsilon)}-D-\beta(c_0^*(t)-\varepsilon)\right]\mathrm{d}t<0$。

注意到$S'(t)\leqslant -DS(t)$,考虑脉冲微分方程

$$\begin{cases} z'_1(t)=-Dz_1(t),t\neq nT,n\in N \\ \Delta z_1(t)=p_1,t=nT,n\in N \end{cases}, \tag{8}$$

由引理1得到$S(t)\leqslant z_1(t)$,并且当$t\to\infty$时$z_1(t)\to z_1^*(t)=S^*(t)$,其中$z_1^*(t)$是系统(8)的周期解。从而,对于足够大的$t$有

$$S(t) \leqslant z_1(t) < S^*(t) + \varepsilon。 \tag{9}$$

由引理 3 可知 $c_0(t) \to c_0^*(t)$，从而对于足够大的 t 有 $c_0(t) \geqslant c_0^*(t) - \varepsilon$。不失一般性，假设对于所有 $t \geqslant 0$ 都有 $S(t) < S^*(t) + \varepsilon$，$c_0(t) \geqslant c_0^*(t) - \varepsilon$。从系统(1) 可得

$$x'(t) \leqslant x(t)\left[\frac{\mu(S^*(t)+\varepsilon)}{k+(S^*(t)+\varepsilon)} - D - \beta(c_0^*(t)-\varepsilon)\right]。 \tag{10}$$

在$(nT,(n+1)T]$ 上对式(10) 积分，可得

$$x((n+1)T) \leqslant x(nT^+)\exp\left[\int_{nT}^{(n+1)T}\left(\frac{\mu(S^*(t)+\varepsilon)}{k+(S^*(t)+\varepsilon)} - D - \beta(c_0^*(t)-\varepsilon)\right)\mathrm{d}t\right],$$

即 $x((n+1)T) \leqslant x(nT^+)\exp(\sigma)$，$x(nT) \leqslant x(0^+)\exp(n\sigma)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x(nT) = 0$。因为对任意 $t \in (nT,(n+1)T]$ 都有 $0 \leqslant x(t) \leqslant x(nT) \leqslant x(0^+)\exp(n\sigma)$，所以，当 $t \to \infty$ 时，$x(t) \to 0$。不失一般性，假设对于所有 $t \geqslant 0$ 都有 $0 < x(t) < \varepsilon$，由系统(1) 的第一个方程，可得 $S'(t) \geqslant \left(-D - \frac{\mu\varepsilon}{\delta k}\right)S(t)$。

考虑脉冲微分方程

$$\begin{cases} z'_2(t) = -\left(D + \frac{\mu\varepsilon}{\delta k}\right)z_2(t), t \neq nT, n \in N \\ \Delta z_2(t) = p_1, t = nT, n \in N \\ z_2(0^+) = S(0^+) \end{cases}, \tag{11}$$

由引理 2 可知，$z_2^*(t) = \dfrac{p_1\exp\left[-(D+\frac{\mu\varepsilon}{\delta k})(t-nT)\right]}{1-\exp\left[-(D+\frac{\mu\varepsilon}{\delta k})T\right]}$，$nT < t \leqslant (n+1)T$ 是系统(11) 的唯一全局渐近稳定的正周期解。由引理 1，$z_2^*(t) \leqslant S(t)$ 且当 $\varepsilon \to 0$ 时 $z_2^*(t) \to S(t)$。从而，对任意 $\varepsilon_1 > 0$，存在 $T_1 > 0$，使得当 $t > T_1$ 时有

$$S(t) > z_2^*(t) - \varepsilon_1, \tag{12}$$

另一方面，由式(9) 可得

$$S(t) < S^*(t) + \varepsilon_1。 \tag{13}$$

所以，对于足够大的 t 有 $S^*(t) - \varepsilon_1 < S(t) < S^*(t) + \varepsilon_1$，令 $\varepsilon_1 \to 0$ 就意味着当 $t \to \infty$ 时 $S(t) \to S^*(t)$。又由引理 3 可得，当 $t \to \infty$ 时，$c_0(t) \to c_0^*(t)$，$c_e(t) \to c_e^*(t)$。证毕。

定理 2　系统(1) 是持久的，如果

$$p_1 > \frac{k(1-\mathrm{e}^{-DT})\left[\exp\left(\frac{D^2T}{\mu} + \frac{D\beta f p_2}{\mu h(g+m)}\right) - 1\right]}{1-\exp\left(\frac{D^2T}{\mu} + \frac{D\beta f p_2}{\mu h(g+m)} - DT\right)},$$

或等价地

$$p_2 < \frac{\mu h(g+m)}{D\beta f}\ln\frac{k_1(1-\mathrm{e}^{-DT}) + p_1}{k_1(1-\mathrm{e}^{-DT}) + p_1\mathrm{e}^{-DT}} - \frac{DTh(g+m)}{\beta f}。 \tag{14}$$

证明：设$(S(t),x(t),c_0(t),c_e(t))$ 是系统(1) 的任一正解，从系统(1) 的第一个方程可以得到，

$$S'(t) \geqslant \left(-D - \frac{\mu M}{\delta k}\right)S(t), \tag{15}$$

考虑脉冲比较系统

$$\begin{cases} z_3'(t) = -\left(D + \frac{\mu M}{\delta k}\right)z_3(t), t \neq nT, n \in N \\ \Delta z_3(t) = p_1, t = nT, n \in N \\ z_3(0^+) = S(0^+) \end{cases}, \tag{16}$$

令 $m = \dfrac{p_1\exp\left[-(D+\frac{\mu M}{\delta k})T\right]}{1-\exp\left[-(D+\frac{\mu M}{\delta k})T\right]} - \varepsilon > 0$，由引理 1 可以得到，对于足够大的 t，有 $S(t) > m$。

下面证明，存在 $m_1>0$，使得对于足够大的 t 有 $x(t)>m_1$。方便起见，分为两步来证明。

第 1 步 由式(14)，选择足够小的 $m_2>0,\varepsilon_2>0$ 使得

$$\sigma_1=\int_0^T\left[\frac{\mu(z_4^*(t)-\varepsilon_2)}{k+(z_4^*(t)-\varepsilon_2)}-D-\beta(c_0^*(t)+\varepsilon_2)\right]\mathrm{d}t>0。$$

其中，$z_4^*(t)=\dfrac{p_1\exp\left[-(D+\frac{\mu m_2}{\delta k})(t-nT)\right]}{1-\exp\left[-(D+\frac{\mu m_2}{\delta k})T\right]}$，$nT<t\leqslant(n+1)T$。可以推断，$x(t)<m_2$ 不可能对所有的 $t>0$ 都成立，否则

$$S'(t)\geqslant(-D-\frac{\mu m_2}{\delta k})S(t)。\tag{17}$$

由引理 1 和引理 2 可得，当 $t\to\infty$ 时 $S(t)\geqslant z_4(t),z_4(t)\to z_4^*(t)$，其中 $z_4(t)$ 是微分方程(18)的解。

$$\begin{cases}z'_4(t)=-(D+\frac{\mu m_2}{\delta k})z_4(t),t\neq nT,n\in N\\ \Delta z_4(t)=p_1,t=nT,n\in N\\ z_4(0^+)=S(0^+)\end{cases}。\tag{18}$$

因此，存在 $T_2>0$ 使得 $S(t)\geqslant z_4(t)\geqslant z_4^*(t)-\varepsilon_2$ 并对于 $t>T_2$，有

$$x'(t)\geqslant x(t)\left[\frac{\mu(z_4^*(t)-\varepsilon_2)}{k+(z_4^*(t)-\varepsilon_2)}-(\beta(c_0^*(t)+\varepsilon_2)+D)\right]。\tag{19}$$

取 $N_1\in N$ 且 $N_1T\geqslant T_2$，在$(nT,(n+1)T]$ 上对式(19) 积分，$n\geqslant N_1$，可得

$$x((n+1)T)\geqslant x(nT^+)\exp\left\{\int_{nT}^{(n+1)T}\left[\frac{\mu(z_4^*(t)-\varepsilon_2)}{k+(z_4^*(t)-\varepsilon_2)}-(\beta(c_0^*(t)+\varepsilon_2)+D)\right]\mathrm{d}t\right\}=x(nT)\exp(\sigma_1)。$$

那么，当 $k\to\infty$ 时 $x((N_1+k)T)\geqslant x(N_1T)\exp(k\sigma_1)\to\infty$。这显然是矛盾的。因此，存在 $t_1\in(0,\infty)$ 使得 $x(t_1)\geqslant m_2>0$。

第 2 步 对于足够大的 t，有 $x(t)\geqslant m_2$，结论显然成立，否则，$x(t)$ 关于 m_2 振荡。取 $t_1^*=\inf\{t\geqslant t_1:x(t)<m_2\}$，由于 $x(t)$ 是连续的，所以对 $t\in[t_1,t_1^*)$ 有 $x(t)\geqslant m_2$ 且 $x(t)=m_2$。设 $t_1^*\in[n_1T,(n_1+1)T)$，$n_1\in N$。取 $\sigma_2=\dfrac{\mu m}{k+m}-(\beta(c_0^*(t)+\varepsilon)+D)$，对足够小的 $\varepsilon_2>0$，选取 n_2,n_3 使得 $n_2T>\dfrac{1}{D+\frac{\mu m_2}{\delta k}}\ln\dfrac{M+p_1}{\varepsilon_2}$，$\exp(n_3\sigma_1)\exp(\sigma_2(n_2+1)T))>1$，则存在 $t_2\in((n_1+1)T,(n_1+n_2+n_3+1)T]$ 使得 $x(t_2)\geqslant m_2$。否则对所有 $t\in((n_1+1)T,(n_1+n_2+n_3+1)T]$，有 $x(t)<m_2$。在初始条件下 $z_4((n_1+1)T^+)=S((n_1+1)T^+)$。考虑式(18)，可得

$$z_4(t)=\left(z_4((n_1+1)T^+)-\frac{p_1}{1-\exp\left[-(D+\frac{\mu m_2}{\delta k})T\right]}\right)\times\exp\left[-(D+\frac{\mu m_2}{\delta k})(t-(n_1+1)T)\right]+z_4^*(t),$$
$$t\in((n_1+1)T,(n_1+n_2+n_3+1)T]。$$

这样，$|z_4(t)-z_4^*(t)|<(M+p_1)\exp\left[-(D+\frac{\mu m_2}{\delta k})n_2T\right]<\varepsilon_2$ 且 $S(t)\geqslant z_4(t)\geqslant z_4^*(t)-\varepsilon_2,\forall t\in[(n_1+n_2+1)T,(n_1+n_2+n_3+1)T]$，由此可见，对于 $t\in[(n_1+n_2+1)T,(n_1+n_2+n_3+1)T]$，式(19) 成立。当 $t\in[(n_1+n_2+1)T,(n_1+n_2+n_3+1)T]$ 时，对式(19) 积分，可得

$$x((n_1+n_2+n_3+1)T)\geqslant x_1((n_1+n_2+1)T))\exp(n_3\sigma_1)。$$

从系统(1) 的第二个方程可得

$$x'(t)\geqslant x(t)\left[\frac{\mu m}{k+m}-(\beta(c_0^*(t)+\varepsilon)+D)\right]=\sigma_2x(t)。$$

在$[t_1^*,(n_1+n_2+1)T]$ 上积分可得 $x((n_1+n_2+1)T))\geqslant x(t_1^*)\exp(\sigma_2(n_2+1)T)=m_2\exp(\sigma_2(n_2+1)T)$，从而得到 $x((n_1+n_2+n_3+1)T)\geqslant m_2\exp(n_3\sigma)\exp(\sigma_2(n_2+1)T)>m_2$，这是矛盾的。

令 $\bar{t}=\inf\{t\geqslant t_1^*:x(t)\geqslant m_2\}$，则 $x(\bar{t}_1)\geqslant m_2$，对于 $t\in[t_1^*,\bar{t}_1)$，可以得到

$$x(t)\geqslant x(t_1^*)\exp(\sigma_2(t-t_1^*))\geqslant m_2\exp(\sigma_2(n_2+n_3+1)T)\stackrel{\Delta}{=}m_1,$$

因为 $x(\bar{t}_1)\geqslant m_2$，对于 $t>\bar{t}_1$，同上面一样继续进行讨论。因此，可以得到对任意 $t>t_1$ 都有 $x(t)\geqslant m_1$。证毕。

3　结论

研究了在污染环境中的单种群模型，得到了该种群灭绝和持续生存的充分条件，并且由此得到了种群持续生存和灭绝的阈值

$$p_1{}^*=\frac{k(1-\mathrm{e}^{-DT})\left[\exp\left(\dfrac{D^2T}{\mu}+\dfrac{D\beta fp_2}{\mu h(g+m)}\right)-1\right]}{1-\exp\left(\dfrac{D^2T}{\mu}+\dfrac{D\beta fp_2}{\mu h(g+m)}-DT\right)}$$

或
$$p_2^*=\frac{\mu h(g+m)}{D\beta f}\ln\frac{k_1(1-\mathrm{e}^{-DT})+p_1}{k_1(1-\mathrm{e}^{-DT})+p_1\mathrm{e}^{-DT}}-\frac{DTh(g+m)}{\beta f}。$$

如果 $p_1<p_1^*$ 或 $p_2>p_2^*$，系统(1)的微生物灭绝周期解 $(S^*(t),0,c_0^*,c_e^*(t))$ 是全局稳定的；如果 $p_1>p_1^*$ 或 $p_2<p_2^*$，系统(1)是持久的。

参考文献：

[1] LAKSHMIKANTHAM V，BAINOV D，SIMEONOV P. Theory of impulsive differential equations[M]. Singapore：World Scientific，1989.

[2]ZAVALISHCHIN S T，SESEKIN A N. Dynamic impulse systems：Theory and applications[M]//Mathematics and Its Applications. Dordrecht：Kluwer Academic Publishers，1997.

[3]PICKET A. M. Growth in a changing environment[M]//BAZIN M J. Microbial Population Dynamics. Florida：CRC Press，1982.

[4]DE LUNA J T，HALLAM T G. Effects of toxicants on population：A qualitiative approach IV. Resource consumer toxicant model[J]. Ecological Modelling，1987，35(3-4)：249-273.

[5]JIAO J J，CHEN L S. Dynamical analysis of a chemostat model with delayed response in growth and pulse input in polluted environment[J]. Journal of Mathematical Chemistry，2009，46(2)：502-513.

[6]WANG F G，MENG X Z，CHENG H D. Dynamical analysis of a chemostat-type competition model with pulsed input in a polluted environment[J]. Mathematica Applicata，2010，23(1)：204-212.

[7]DUBEY B. Modelling the effect of toxicant on forestry resources[J]. Indian Journal of Pure Applied Mathematics，1997，28：1-12.

[8]MENG X Z，ZHAO Q L，CHEN L S. Global qualitative analysis of new Monod type chemostat model with delayed growth response and pulsed input in polluted environment[J]. Applied Mathematics and Mechanics：English Edition，2008，29(1)：75-87.