局部空间非 Lipschitz 倒向随机微分方程适应解的存在唯一性

王 赢

（山东科技大学 信息科学与工程学院，山东 青岛 266590）

摘 要：在生成元满足局部非 Lipschitz 假设下，证明了倒向随机微分方程适应解的局部与全局存在唯一性，并且其解是有界的。

关键词：倒向随机微分方程；适应解；存在唯一性；非 Lipschitz 系数

中图分类号：O211.63 **文献标志码：**A **文章编号：**1672-3767(2013)03-0101-04

Existence and Uniqueness of Adapted Solution to Backward Stochastic Differential Equations with Non-Lipschitz Coefficients in Local Space

Wang Ying

(Information Science and Engineering College, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

Abstract: When the generator satisfies a kind of non-Lipschitz assumptions in local space, the local and the global existence and uniqueness of the adapted solution to backward stochastic differential equation are obtained, and the solution is bounded.

Key words: backward stochastic differential equations; adapted solution; existence and uniqueness; non-Lipschitz coefficient

1 预备知识

设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为一完备概率空间，$\{W_t,t\geqslant 0\}$ 为 d 维标准布朗运动。记 $\mathscr{F}_t=\sigma\{W_s,0\leqslant s\leqslant t\}$。对任意给定的 $0\leqslant t\leqslant T$，$M^2(0,t;\mathbf{R}^m)$ 表示 $\mathbf{R}^m$ 值的 $\mathscr{F}_t$ 适应过程，使得

$$E\int_0^t |x_s|^2 \mathrm{d}s<\infty,\ \forall x\in M^2(0,t;\mathbf{R}^m)。$$

$L^2(\Omega,\mathscr{F}_T,P,\mathbf{R}^m)$ 表示 $\mathbf{R}^m$ 值 $\mathscr{F}_T$ 可测的平方可积随机向量空间。

考虑如下倒向随机微分方程(backward stochastic differential equations，BSDE)：

$$x_t+\int_t^T f(t,x_s,y_s)\mathrm{d}s+\int_t^T y_s \mathrm{d}w_s=X。\tag{1}$$

其中，$f(t,x,y):\Omega\times[0,T]\times\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^{m\times d}\to\mathbf{R}^m$，$X\in L^2(\Omega,\mathscr{F}_T,P,\mathbf{R}^m)$。

线性BSDE的研究可参见Bensoussan[1]，Bismut[2]，Haussmann[3]，Kushner[4]。1990年，Pardouxand

收稿日期：2013-02-02

基金项目：国家自然科学基金项目(11271007)；山东省优秀中青年科学家科研奖励基金项目(BS2012SF023)；山东科技大学“春蕾计划”项目(2010AZZ181)

作者简介：王 赢(1977—)，男，山东潍坊人，副教授，博士，主要从事倒向随机微分方程和金融数学方面的研究.
E-mail：wangying@sdust.edu.cn

Peng[5] 在系数 $f(t,x,y)$ 满足一致 Lipschitz 假设下证明了一般非线性 BSDE 适应解的存在唯一性定理。Mao[6] 提出了如下的非 Lipschitz 假设：

(H1) $\forall x \in [0,T], x_1, x_2 \in \mathbf{R}^m, y_1, y_2 \in \mathbf{R}^{m\times d}$,

$$|f(t,x_1,y_1)-f(t,x_2,y_2)|^2 \leqslant K(|x_1-x_2|^2)+c|y_1-y_2|^2, \quad a.s.。$$

其中，$K(u)$ 为 $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ 的非降凹函数，满足 $K(0)=0$，当 $u>0$ 时 $K(u)>0$ 且 $\int_{0+}\frac{\mathrm{d}u}{K(u)}=+\infty$。

当 $f(t,x,y)$ 满足假设(H1)时，Mao[6] 得到了如下定理：

定理 1 假设 $f(\cdot,0,0)\in M^2(0,T;\mathbf{R}^m)$，(H1) 成立，则存在唯一的 $(x(\cdot),y(\cdot))\in M^2(0,T;\mathbf{R}^m)\times M^2(0,T;\mathbf{R}^{m\times d})$ 使得 BSDE(1) 成立。

Peng[7] 在 $f(t,x,y)$ 关于 x 满足局部 Lipschitz 连续，关于 y 满足一致 Lipschitz 连续且 $f(t,x,y)$ 是线性增长的条件下得到了局部空间 Lipschitz 条件下方程(1)解的存在唯一性。本文在 Mao[6] 与 Peng[7] 的基础上考虑局部空间非 Lipschitz 条件下 BSDE(1) 适应解的存在唯一性问题。

定义 1 如果对任意的 $t\in[a,T]$，$(x_t,y_t)\in M^2(a,T;\mathbf{R}^m)\times M^2(a,T;\mathbf{R}^{m\times d})$，且使得 BSDE(1) 成立，则称 $(x(\cdot),y(\cdot))$ 为 BSDE(1) 在 $[a,T]$ 上的一对解。

2 主要定理与证明

首先考虑如下 BSDE：

$$x_t+\int_t^T (g(s,x_s,y_s)+g_s^0)\mathrm{d}s+\int_t^T y_s \mathrm{d}w_s = X。\tag{2}$$

记 $B_m(R)=\{x\in\mathbf{R}^m, |x|\leqslant R\}$ 为 $\mathbf{R}^m$ 中的球，本文的主要假设如下：

(H2) $g(t,x,y):\Omega\times[0,T]\times B_m(R)\times\mathbf{R}^{m\times d}\to\mathbf{R}^m, g_t^0:\Omega\times[0,T]\to\mathbf{R}^m$,

$g(\cdot,x,y), g^0(\cdot)\in M^2(0,T,\mathbf{R}^m), X\in L^2(\Omega,\mathscr{F}_T,P,\mathbf{R}^m), \forall(x,y)\in B_m(R)\times\mathbf{R}^{m\times d}$。

(H3) $\forall x_1,x_2\in B_m(R), y_1,y_2\in\mathbf{R}^{m\times d}$,

$$|g(t,x_1,y_1)-g(t,x_2,y_2)|^2\leqslant K(|x_1-x_2|^2)+c|y_1-y_2|^2 \quad a.s., a.e.,$$

其中，$K(u)$ 为 $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 的非降凹函数，满足 $K(0)=0$，当 $u>0$ 时 $K(u)>0$ 且 $\int_{0+}\frac{\mathrm{d}u}{K(u)}=+\infty$。

由于 $K(u)$ 为凹函数且 $K(0)=0$，因此，存在非负常数 a 和 b，使得 $K(u)\leqslant a+bu, u\geqslant 0$。

(H4) $\forall(x,y)\in B_m(R)\times\mathbf{R}^{m\times d}, |g(t,x,y)|^2\leqslant c_0(1+|x|^2+|y|^2) \quad a.s., a.e.$。

(H5) $E^{\mathscr{F}_t}\left[|X|^2+\int_t^T|g_s^0|^2\mathrm{d}s+\frac{T}{2}\right]\leqslant k^2 \quad a.s., a.e.$。

在以上假设下，有定理 2。

定理 2 假设(H2)—(H5) 成立，$k<R$，则 BSDE(2) 存在唯一适应解 $(x(\cdot),y(\cdot))$，使得 $t\in[T_0,T]$ 时，$|x_t|^2\leqslant k^2 e^{c_1(T-t)}, E^{\mathscr{F}_t}\left[\int_t^T|y_s|^2\mathrm{d}s\right]\leqslant 2k^2(1+c_1Te^{c_1T}) \quad a.s., a.e.$，其中，$c_1=\frac{3}{2}+2c_0, T-T_0=2c^{-1}\ln\frac{R}{k}$。

证明： 定义函数 $f(t,x,y):\Omega\times[0,T]\times B_m(R)\times\mathbf{R}^{m\times d}\to\mathbf{R}^m$：

$$f(t,x,y)=\begin{cases} g(t,x,y)+g_t^0, & |x|\leqslant R \\ g(t,R\frac{x}{|x|},y)+g_t^0, & |x|>R \end{cases}。$$

容易验证 $f(t,x,y)$ 满足定理 1 中的全部条件。因此 BSDE(1) 在 $[0,T]$ 上存在唯一适应解 $(x(\cdot),y(\cdot))$。

对 $|x_s|^2$ 应用 Itô 公式，对任意的 $0\leqslant r\leqslant t\leqslant T$，根据已知假设，有

$$E^{\mathscr{F}_r}|x_t|^2+E^{\mathscr{F}_r}\int_t^T|y_s|^2\mathrm{d}s=E^{\mathscr{F}_r}|X|^2-2E^{\mathscr{F}_r}\left[\int_t^T\langle x_s,f(s,x_s,y_s)\rangle\mathrm{d}s\right]\leqslant$$

$$E^{\mathscr{F}_r}|X|^2+2E^{\mathscr{F}_r}\left[\int_t^T|x_s||f(s,x_s,y_s)|\mathrm{d}s\right]=$$

$$E^{\mathscr{F}_r}\mid X\mid^2+2E^{\mathscr{F}_r}\left[\int_t^T\left(\mid x_s\mid\mid g(s,x_s,y_s)+g_s^0\mid I_{\mid x_s\mid\leqslant R}+\mid x_s\mid\left|g(s,R\frac{x_s}{\mid x_s\mid},y_s)+g_s^0\right|I_{\mid x_s\mid>R}\right)\mathrm{d}s\right]\leqslant$$

$$E^{\mathscr{F}_r}\mid X\mid^2+2E^{\mathscr{F}_r}\left[\int_t^T\left(\mid x_s\mid\mid g(s,x_s,y_s)\mid I_{\mid x_s\mid\leqslant R}+\mid x_s\mid\left|g(s,R\frac{x_s}{\mid x_s\mid},y_s)\right|I_{\mid x_s\mid>R}+\mid x_s\mid\mid g_s^0\mid\right)\mathrm{d}s\right]\leqslant$$

$$E^{\mathscr{F}_r}\mid X\mid^2+(\frac{1}{\alpha}+1)E^{\mathscr{F}_r}\int_t^T\mid x_s\mid^2\mathrm{d}s+E^{\mathscr{F}_r}\int_t^T\mid g_s^0\mid^2\mathrm{d}s+$$

$$\alpha E^{\mathscr{F}_r}\left[\int_t^T\left(\mid g(s,x_s,y_s)\mid^2 I_{\mid x_s\mid\leqslant R}+\left|g(s,R\frac{x_s}{\mid x_s\mid},y_s\right|^2 I_{\mid x_s\mid>R}\right)\mathrm{d}s\right]\leqslant$$

$$E^{\mathscr{F}_r}\mid X\mid^2+(\frac{1}{\alpha}+1)E^{\mathscr{F}_r}\int_t^T\mid x_s\mid^2\mathrm{d}s+E^{\mathscr{F}_r}\int_t^T\mid g_s^0\mid^2\mathrm{d}s+$$

$$c_0\alpha E^{\mathscr{F}_r}\left[\int_t^T((1+\mid x_s\mid^2+\mid y_s\mid^2)I_{x_s\mid\leqslant R}+(1+R^2+\mid y_s\mid^2)I_{\mid x_s\mid>R})\mathrm{d}s\right]\leqslant$$

$$E^{\mathscr{F}_r}\mid X\mid^2+(\frac{1}{\alpha}+1)E^{\mathscr{F}_r}\int_t^T\mid x_s\mid^2\mathrm{d}s+c_0\alpha E^{\mathscr{F}_r}\left[\int_t^T(1+\mid x_s\mid^2+\mid y_s\mid^2)\mathrm{d}s\right]+E^{\mathscr{F}_r}\int_t^T\mid g_s^0\mid^2\mathrm{d}s。$$

取 $\alpha=\frac{1}{2c_0}$，有

$$E^{\mathscr{F}_r}\mid x_t\mid^2+E^{\mathscr{F}_r}\int_t^T\mid y_s\mid^2\mathrm{d}s\leqslant(E^{\mathscr{F}_r}\mid X\mid^2+\frac{1}{2}\mathrm{T}+E^{\mathscr{F}_r}\int_t^T\mid g_s^0\mid^2\mathrm{d}s)+(\frac{3}{2}+2c_0)E^{\mathscr{F}_r}\int_t^T\mid x_s\mid^2\mathrm{d}s\leqslant$$

$$k^2+c_1E^{\mathscr{F}_r}\int_t^T\mid x_s\mid^2\mathrm{d}s。\tag{3}$$

由 Gronwall 不等式，$\forall\,0\leqslant r\leqslant t\leqslant T$，有 $E^{\mathscr{F}_r}\mid x_t\mid^2\leqslant k^2\mathrm{e}^{c_1(T-t)}$。

特别地，取 $c_1=\frac{3}{2}+2c_0$，$T-T_0=2c^{-1}\ln\frac{R}{k}$，有 $\mid x_t\mid^2\leqslant k^2\mathrm{e}^{c_1(T-t)}\leqslant R^2$。由 $f(t,x,y)$ 的定义可知 $(x(\cdot),y(\cdot))$ 为 BSDE(2) 在区间 $[T_0,T]$ 上的唯一解。$\mid y.\mid^2$ 的估计可由(3) 式直接得出。

下面考虑 BSDE(1)。做如下假设：

(H6)　$f(\cdot,x,y)\in M^2(0,T;\mathbf{R}^m)$，$\forall(x,y)\in\mathbf{R}^m\times\mathbf{R}^{m\times d}$。

(H7)　局部非 Lipschitz 假设：存在一个连续映射 $\mu(h):\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$，使得对任意 $h>0$，$x_1,x_2\in\mathbf{R}^m$，$y_1,y_2\in\mathbf{R}^{m\times d}$，$\mid x_1\mid,\mid x_2\mid<h$，有

$$\mid f(t,x_1,y_1)-f(t,x_2,y_2)\mid^2\leqslant K_h(\mid x_1-x_2\mid^2)+\mu(h)\mid y_1-y_2\mid^2\quad a.s.,a.e.,$$

其中，$K_h(u)$ 为 $\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 的非降凹函数，满足 $K_h(0)=0$，当 $u>0$ 时 $K_h(u)>0$，且 $\int_{0+}\frac{\mathrm{d}u}{K_u(u)}=+\infty$。由此易知，$K_h(u)\leqslant a_h+b_hu$，$u\geqslant0$，$a_h\geqslant0$，$b_h\geqslant0$。

(H8)　$E^{\mathscr{F}_t}\left\{\mid X\mid^2+\int_t^T\mid f(s,0,0)\mid^2\mathrm{d}s+\frac{T}{2}\right\}\leqslant k^2\quad a.s.,a.e.$。

在此假设下有推论 1。

推论 1　假设(H6)—(H8) 成立，则存在 $T_0\in[0,T)$，使得 BSDE(1) 在 $[T_0,T]$ 上存在唯一适应解 $(x(\cdot),y(\cdot))$，且 $\mid x_t\mid\leqslant 4k\quad a.s.,a.e.$。

证明：记

$$g(t,x_t,y_t)=f(t,x_t,y_t)-f(t,0,0),\quad g_t^0=f(t,0,0)。\tag{4}$$

显然，如果令 $R=4k$，$c_0=\max(a_{4k},b_{4k},\mu(4k))$，则由(H7)，有

$$\forall\,x_1,x_2\in\mathbf{R}^m,y_1,y_2\in\mathbf{R}^{m\times d},\mid x_1\mid,\mid x_2\mid\leqslant h,$$

$$\mid g(t,x,y)\mid^2\leqslant a_{4k}+b_{4k}\mid x\mid^2+\mu(4k)\mid y\mid^2\leqslant c_0(1+\mid x\mid^2+\mid y\mid^2)。$$

因此，定理2中的条件全部成立，故BSDE(1) 在 $[T_0,T]$ 上存在唯一适应解 $(x(\cdot),y(\cdot))$，且 $\mid x_t\mid\leqslant 4k$，$a.s.$，$a.e.$，其中 $T-T_0=4c_0^{-1}\ln2$，$c_1=\frac{3}{2}+2c_0$。

如果还有如下假设：

(H9)　$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{m\times d}$，$|f(t,x,y)-f(t,0,0)|^2 \leqslant c_0(1+|x|^2+|y|^2)$　$a.s.$，$a.e.$，则由以上结论可得到全局解的存在唯一性结果。

定理 3　假设(H6)—(H9)成立，则BSDE(1)在$[0,T]$存在唯一适应解$(x(\cdot),y(\cdot))$且x_t有界。

证明：形如式(4)定义$g(t,x_t,y_t)$，g_t^0，令$R=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}c_1 T}k$，$c_1=\frac{3}{2}+2c_0$，则定理3中的所有假设都成立且$T_0=T-2c_1\ln\frac{R}{k}=0$，因此BSDE(1)在$[0,T]$存在唯一适应解$(x(\cdot),y(\cdot))$且$x_t$有界。

参考文献：

[1]Bensoussan A. Lectures on stochastic control[M]//Nonlinear Filtering and Stochastic Control. Berlin Heidelberg：Springer，1982：1-62.

[2]Bismut J M. Linear quadratic optimal stochastic control with random coefficients[J]. SIAM Journal on Control and Optimization，1976，14(3)：419-444.

[3]Haussmann U G. A stochastic maximum principle for optimal control of diffusions[M]. Hoboken，New Jersey：John Wiley & Sons，Inc.，1986.

[4]Kushner H J. Necessary conditions for continuous parameter stochastic optimization problems[J]. SIAM Journal on Control，1972，10(3)：550-565.

[5]Pardoux E，Peng S. Adapted solution of a backward stochastic differential equation[J]. Systems & Control Letters，1990，14(1)：55-61.

[6]Mao X R. Adapted solutions of backward stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients[J]. Stochastic Processes and Their Applications，1995，58(2)：281-292.

[7]Peng S. Backward stochastic differential equations and applications to optimal control[J]. Applied Mathematics and Optimization，1993，27(2)：125-144.

(责任编辑：吕文红)

(上接第94页)

[12]Milbert D. Improving dilution of precision：A companion measure of systematic effects[J]. GPS World，2009，20(2)：38-47.

[13]Langley R B. Dilution of precision[J]. GPS World，1999，10(3)：52-59.

[14]Dach R，Hugentoble U，Fridez P，et al. Bernese GPS software version 5.0[DB/CD]. Berne，Switzerland：Astronomical Institute，University of Berne，2007：347-354.

[15]夏林元. GPS观测值中的多路径效应理论研究及数值结果[D]. 武汉：武汉大学，2001：10-20.

[16]Louis H E，Meertens C M. The Multi-Purpose Toolkit for GPS/GLONASS Data[J]. GPS Solutions，1999，3(1)：42-49.

[17]Braasch M S. Isolation of GPS multipath and receiver tracking errors[J]. Journal of the Institute of Navigation，1995，41(4)：415-434.

[18]Ray J K. Mitigation of GPS code and carrier phase multipath effects using a multi-antenna system[D]. Calgary：The University of Calgary，2000：154-160.

[19]郑作亚. GPS数据预处理和星载GPS运动学定轨研究及其软件实现[D]. 北京：中国科学院，2004：36-42.

[20]Blewitt G. An automatic editing algorithm for GPS Data[J]. Geophysical Research Letters，1990，17(3)：199-202.

[21]Dejong C D. A unified approach to real-time integrity monitoring of single-and dual-frequency GPS and GLONASS observations[J]. Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica，1998，33：247-257.

(责任编辑：高丽华)