

# 岩石单轴压缩过程变形模量的最大 Lyapunov 指数分析

陈绍杰, 刘江波, 王怀远, 钟宜涛

(山东科技大学 矿山灾害预防控制国家重点实验室培育基地, 山东 青岛 266590)

**摘要:**应用 Lyapunov 评价准则对六种岩石单轴压缩过程的变形模量时间序列进行了分析。根据变形模量的变化定性,描述了岩石在加载过程中弹性、塑性和破坏三种状态。通过对岩石三种状态时间序列相应的最大 Lyapunov 指数进行分析,发现变形模量的变化和 Logistic 映射周期点点数的变化有着相似之处;岩石全应力-应变曲线中变形模量先由无序状态进入稳定状态,再进入强混沌状态;随着三个状态的演变,相应变形模量的平均演化距离逐渐呈现离散状态。

**关键词:**单轴压缩;变形模量;Lyapunov 指数;Logistic 映射

中图分类号: TU458

文献标志码: A

文章编号: 1672-3767(2014)02-0048-05

## Maximum Lyapunov Index Analysis of Rock Deformation Modulus Under Uniaxial Compression

Chen Shaojie, Liu Jiangbo, Wang Huaiyuan, Zhong Yitao

(State Key Laboratory Breeding Base for Mining Disaster Prevention and Control, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

**Abstract:** Based on the Lyapunov evaluation criteria, the deformation modulus time sequence in the uniaxial compression process of six rocks was analyzed. The change of deformation modulus during the loading process fell into three states, namely, the elasticity, plasticity and destruction. The analysis of maximum Lyapunov index of different states shows that the change of the deformation modulus is similar to the periodic points in Logistic map; the deformation modulus in stress-strain process of rock changes from unordered state to stable state, and reaches strong chaos state at last; with evolution of the three states, the average evolving distances of the corresponding deformation modulus become discrete gradually.

**Key words:** uniaxial compression; deformation modulus; Lyapunov index; Logistic map

岩石是一个高度非线性的动力系统,其变形、岩爆和突出等失稳现象具有随机性,而混沌反映了确定性非线性动力系统呈现的随机性,随着人们对混沌预测方法的改进<sup>[1-3]</sup>和工程监测手段<sup>[4-5]</sup>的提高,混沌理论在岩石力学中的应用越来越广泛。张黎明等<sup>[6]</sup>研究发现,卸荷试验中岩样轴向应变没有明显的应变强化过程,弹性模量与围压呈非线性关系降低。余贤斌等<sup>[7]</sup>研究发现,压缩平均变形模量较拉伸平均模量大得多,拉伸下的卸载平均模量远大于拉伸平均模量,约等于压缩平均变形模量。李地元等<sup>[8]</sup>研究发现,单轴压缩下硬岩的弹性模量随载荷变化先增大而后趋于稳定,当载荷超过单轴抗压强度的 80% 时又变小;而单轴拉伸下,硬

收稿日期: 2013-11-13

基金项目: 国家自然科学基金项目(51274132, U1361105, 51104094); 山东省自然科学基金重点项目(ZR2013EEZ001); 中国博士后科学基金特别资助项目(2013T60763); 山东省青少年教育科学规划课题大学生学术课题(13CZR036)

作者简介: 陈绍杰(1978—), 男, 河北定州人, 副教授, 博士, 从事矿山岩石力学与特殊开采方面的研究。

E-mail: 1009806496@163.com

岩的弹性模量初始较大,随后随着载荷增大而逐渐减小。刘传孝等<sup>[9-11]</sup>提出砂岩全应力-应变曲线的二分法原则,应用混沌动力学 Kolmogorov 熵分析和 Lyapunov 评价准则等方法研究砂岩全应力-应变曲线的分段特征,认为试验曲线的离散性发生于应变软化阶段,所有峰前段均处于混沌状态,节理裂隙系统有 85% 演化到峰后段时呈有序定常态;砂岩峰后应力-应变阶段曲线的线性性质增强,裂隙系统状态由强混沌态向强有序的定常态演化;砂岩峰前阶段的裂隙系统基本呈现弱混沌状态。姜永东等<sup>[12]</sup>利用声发射研究了岩石的混沌特征。

本文通过对岩石应力-应变曲线所反映的岩石的变形模量时间序列的最大 Lyapunov 指数分析,研究了岩石的全应力-应变过程所具有的混沌特征。这里变形模量是指在实验过程中一个加载步距内应力增量与应变增量的比值。

## 1 岩石应力应变曲线的混沌学分析

有学者<sup>[13]</sup>根据分形物理的渗流模型,把岩石分为小的晶格组成的集合整体。把岩石看做由很多类似渗流晶格的小结构构成的一个结构整体,分析岩石变形模量的变化;各个小晶格的变形模量固定在一定范围内,且对于整体来说,不同变形模量的小晶格均匀分布在岩体之中,构成一个局部随机但整体趋向均匀的大结构体。岩石的塑性阶段可以看作统计规律上小的晶格分批达到各自最大变形模量,此时部分晶格发生失稳但岩石整体保持稳定,这种状态持续一段时间后岩石会发生整体失稳。

以岩石应力-应变曲线为例,分析岩石的变形模量在岩石的加载变化过程中的混沌特征。一般岩石单轴受压条件下的全应力-应变曲线可划为 5 个阶段<sup>[14]</sup>,如图 1 所示:  $B$  表示弹性极限,  $C$  表示屈服极限,  $D$  表示强度极限,  $E$  表示残余强度;  $OA$  为原始空隙压密阶段,  $AB$  线弹性阶段,  $BC$  弹塑性过渡阶段,  $CD$  塑性阶段,  $DE$  卸载(破坏)阶段。

图 2 为 Logistic 映射  $f(x) = \lambda x(1-x)$  的周期点个数随着参数  $\lambda$  的变化情况<sup>[15]</sup>。  $OS_0$  为 1 周期点阶段;  $S_0S_1$  为 2 周期点阶段;  $S_1S_2$  为倍周期阶段;  $S_2S$  为混沌阶段。通过分析,岩石应力-应变曲线变形模量的变化具有与之相似的特点。

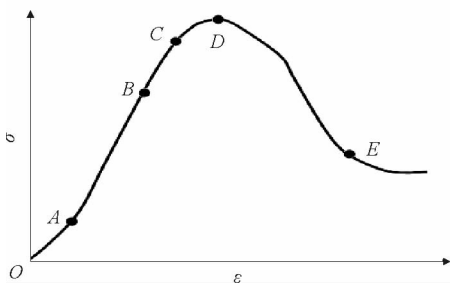


图 1 典型岩石全应力-应变曲线

Fig. 1 Typical complete stress-strain curve of rock

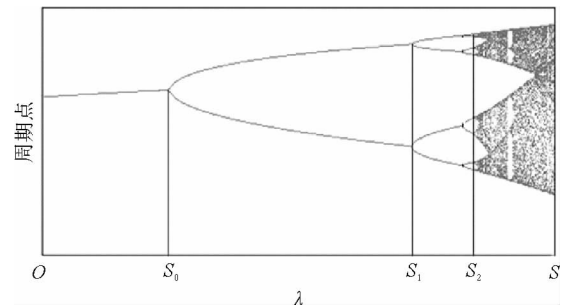


图 2 Logistic 映射的周期点变化图

Fig. 2 Periodic points change in Logistic map

根据岩石的应力-应变曲线来看,  $OA$  是岩石的原始空隙压密阶段,类似于 Logistic 映射在出现周期点前的迭代过程。  $AB$  线弹性阶段,此阶段岩石的变形模量是不变的,可认为是完全弹性状态,与 Logistic 映射的  $\lambda < 3$  时的 1 周期点情况 ( $OS_0$ ) 类似,即存在一个 1 周期点与存在单一的变形模量类似。  $BC$  弹塑性过渡阶段,此时岩石的变形模量有了微小幅度的变化,变形模量值在  $B, C$  两处不同值之间变化,变化范围比较小,这与 Logistic 映射里面的 2 周期点情况 ( $S_0S_1$ ) 相类似,映射的点在两个周期点的值上来回跳跃,变化范围也比较小。弹塑性过渡阶段内变形模量值的变化幅度较小,可看作弹性阶段的延续。有时岩石的弹塑性过渡阶段不明显,  $AB, BC$  统认为是弹性状态。  $CD$  塑性阶段,此阶段岩石的变形模量的变化范围增大,在  $C, D$  点处变形模量值之间波动,这与 Logistic 映射里面 4 周期<sup>[16]</sup>的倍周期阶段 ( $S_1S_2$ ) 类似,映射的周期点

在更多的点上来回跳跃,这个阶段岩石的变形模量出现微小的震荡变化,但震荡幅度在一定范围内。*DE* 岩石的破坏阶段,岩石的小结构超过变形模量极限发生失稳并在统计数目上达到最大值,并随着力的加载岩石出现整体失稳。这一阶段岩石整体结构失稳,变形模量急剧下降,这意味着岩石的结构整体出现质的变化,变形模量的变化没有规律,出现急剧的震荡现象。这与 Logistic 映射里面的混沌阶段( $S_2S$ )类似,此时周期点的数目急剧增加,周期点的跳跃没有规律。但很快随着  $\lambda$  的变大,也会出现短暂的周期窗口,这与岩石的残余应力的存在也很类似。

通过上述分析,岩石的应力-应变过程可分为 *AC* 弹性阶段、*CD* 塑性阶段和 *DE* 破坏阶段。

## 2 岩石单轴压缩过程变形模量的变化特征

对通过 MTS815.03 电液伺服岩石试验机得到的某砂岩的单轴压缩(按位移加载)典型的应力-应变曲线(图 3(a))的变形模量的变化特征进行分析,变形模量随加载步距的变化情况如图 3(b)所示,对变形模量变化图进行加权平滑处理得到图 3(c)。图 3(c)中 *AC* 为弹性阶段,*CD* 为塑性变形阶段,*DE* 为破坏阶段,*E* 后阶段为岩石残余应力部分。

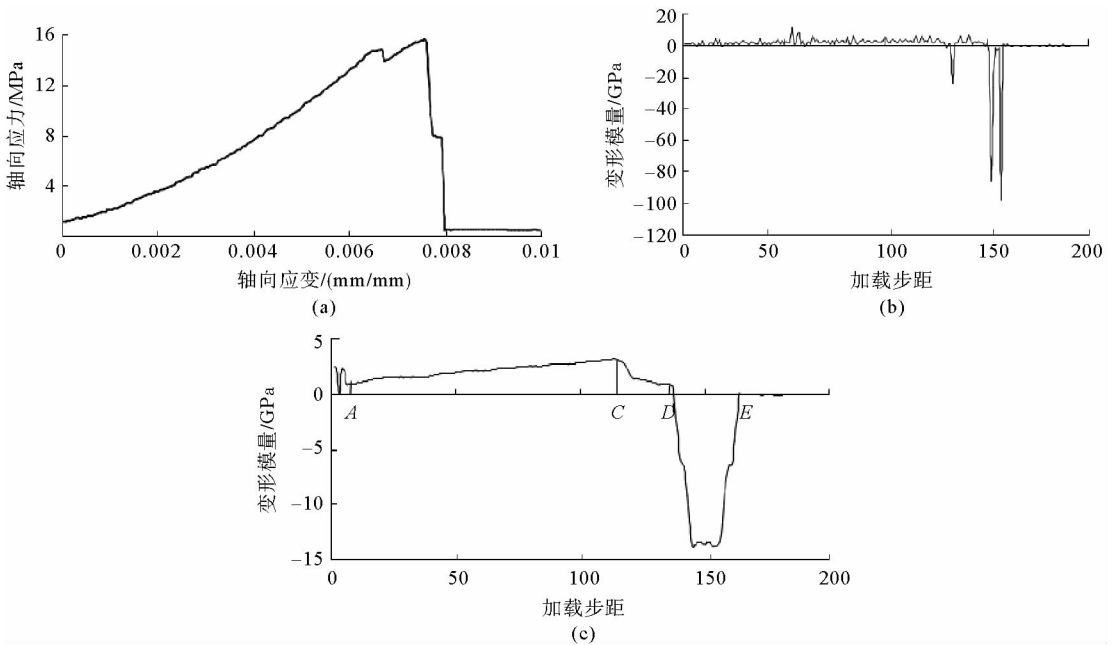


图 3 某砂岩典型的应力-应变曲线以及对应的变形模量变化曲线

Fig. 3 Typical complete stress-strain curve of certain sandstone and the curves of its deformation modulus

由图 3(b),图 3(c)可以看出,随着加载步距的增大,岩石的变形模量先增大后减小,岩石达到破坏状态时变形模量出现急剧震荡变化。*AC* 阶段变形模量的变化率为 21 MPa, *CD* 阶段变形模量的变化率为 116 MPa,而 *DE* 阶段变形模量的变化率为 1 187 MPa。*CD* 塑性阶段变形模量的变化率是 *AC* 弹性阶段的 5 倍,而 *DE* 破坏阶段变形模量的变化率是 *AC* 弹性阶段的 50 多倍,是 *CD* 塑性阶段的 10 倍,且出现急剧震荡,变形模量的变化近似呈现指数增长。

## 3 岩石单轴压缩过程变形模量的最大 Lyapunov 指数分析

### 3.1 变形模量周期时间序列的最大 Lyapunov 指数

对煤、粗砂岩、泥岩、含砾粗砂岩、细砂岩、中粒粗砂岩六种(取自不同钻孔的不同岩层)标准岩样单轴压缩应力-应变曲线对应的变形模量的变化过程划分成三段(图3(c)),每种岩性取三组试件单轴压缩数据

做成含有 3 个周期的时间序列,计算岩石压缩过程变形模量各个变化阶段的最大 Lyapunov 指数(相空间重构嵌入维数 9,时间延迟 7),结果如表 1 所示。

由表 1 可知,第二组数据粗砂岩变形模量的最大 Lyapunov 指数由小变大再变小,即岩石由稳定状态变成不稳定状态再变成稳定状态,三块粗砂岩试件的变形模量变化曲线的波动比较剧烈,可能是由于粗砂岩颗粒较大造成的。除粗砂岩外其他岩石变形模量的最大 Lyapunov 指数先由大变小,再由小变大,即变形模量的变化先由不稳定状态变成稳定状态,再变成不稳定状态;CD 阶段的最大 Lyapunov 指数都小于 0,可见岩石达到塑性程度时变形模量时间序列变化呈现一定的周期性。

岩石由弹性状态到塑性状态时,大多数岩石的最大 Lyapunov 指数会减小;当从塑性状态进入破坏状态时,岩石的最大 Lyapunov 指数会增大。在岩石压缩弹性、塑性和破坏的演变过程中相应的最大 Lyapunov 指数先减小后增加,即由无序状态进入稳定状态,再进入强混沌状态。

### 3.2 单轴压缩过程变形模量的平均演化距离

计算上述六种岩石试件在加载过程中变形模量变化各个状态(完全弹性-属于弹性状态初始时期、弹性、塑性及破坏)的平均演化距离(相空间重构嵌入维数 9,时间延迟 4),如图 4 所示。

从图 4 中可以看出,在岩石加载过程中,弹性的初始阶段平均演化距离基本在 15~18 MPa 的范围内(除了一组泥岩数据外,分析数据可知是由于在弹性状态初期变形模量的变化不稳定造成的),在去除部分初始阶段的数据后得到指数与其他试件一致,分别是 18.5, 18.3, 18.2, 19.3 MPa;进入弹性阶段后变形模量的平均演化距离整体增加,范围在 15~20 MPa;进入塑性阶段后平均演化距离的值整体继续变大且分布范围有所扩大;岩石进入破坏阶段时,变形模量的平均演化距离分布范围扩大到 13~30 MPa,即呈现离散现象。随着加载过程中岩石所处状态的演变,岩石变形模量的平均演化距离整体有所增加并逐渐呈现离散状态。

表 1 六种岩石各阶段的最大 Lyapunov 指数表

Tab. 1 Maximum Lyapunov indexes in different stages of rocks

岩性	AC 阶段	CD 阶段	DE 阶段
煤	-0.002 25	-0.004 54	0.003 75
粗砂岩	-0.004 00	0.003 65	-0.002 70
泥岩	0.001 50	-0.000 12	0.004 00
含砾粗砂岩	0.006 24	-0.001 49	0.000 98
细砂岩	-0.001 44	-0.114 51	0.000 10
中粒粗砂岩	0.003 55	-0.000 63	0.003 15

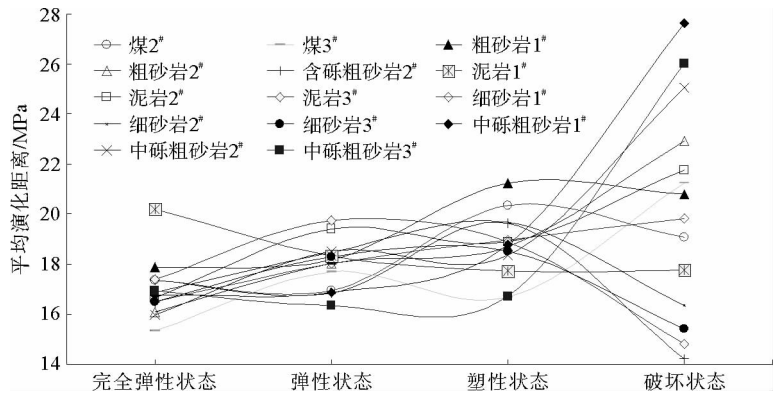


图 4 变形模量在不同状态的平均演化距离

Fig. 4 Average evolving distances in the different states of the deformation modulus

## 4 结论

1)由岩石典型的应力-应变曲线可以看出,岩石的压缩过程具有典型的混沌特征,且岩石变形模量的变化与 Logistic 映射的周期点点数的变化非常相似,变形模量可以作为研究岩石混沌系统的单一变量。

2)岩石的应力-应变过程可根据变形模量的变化划分为弹性状态、塑性状态和破坏状态三种演变状态,且不同状态的最大 Lyapunov 指数的数据特征有所不同。岩石达到塑性状态时变形模量的变化呈现一定的周期性,即弹性到塑性转变的过程中变形模量先增大后减小,变化率倍增;到破坏状态时变形模量变化呈现急剧震荡,且变化率比塑性状态倍增,变形模量的变化近似呈现指数增长。在弹性、塑性和破坏状态的演变

过程中相应的最大 Lyapunov 指数整体先减小后增加,即由无序状态进入稳定状态,再进入强混沌状态。

3)通过岩石力学试验分析,几组岩石试件达到弹性状态时变形模量的平均演化距离在 15~18 MPa;相比弹性状态,在达到塑性状态时变形模量的平均演化距离呈现增大趋势;进入破坏状态时变形模量的平均演化距离离散出现在 13~30 MPa。岩石变形模量的平均演化距离随着岩石状态演变过程逐渐呈离散状态。

#### 参考文献:

- [1]陈奉苏.混沌学及其应用[M].北京:中国电力出版社,1998:47-55.
- [2]吕金虎.混沌时间序列分析及其应用[M].武汉:武汉大学出版社,2002:27-36.
- [3]韩敏.混沌时间序列预测理论与方法[M].北京:中国水利水电出版社,2007:2-10.
- [4]谭云亮,刘传孝,赵同彬.岩石非线性动力学初论[M].北京:煤炭工业出版社,2008:78-95.
- [5]代高飞.岩石非线性动力学特征及冲击地压的研究[D].重庆:重庆大学,2002:61-67.
- [6]张黎明,王在泉,孙辉,等.岩石卸荷破坏的变形特征及本构模型[J].煤炭学报,2009,34(12):1626-1631.  
Zhang Liming, Wang Zaiquan, Sun Hui, et al. Failure characteristics and constitutive model of rock under unloading condition [J]. Journal of China Coal Society, 2009, 34(12): 1626-1631.
- [7]余贤斌,谢强,李心一,等.岩石直接拉伸与压缩变形的循环加载实验与双模量本构模型[J].岩土工程学报,2005,27(9):988-993.  
Yu Xianbin, Xie Qiang, Li Xinyi, et al. Cycle loading tests of rock samples under direct tension and compression and bi-modal constitutive model[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, 27(9): 988-993.
- [8]李地元,李夕兵.2种岩石直接拉压作用下的力学性能试验研究[J].岩石力学与工程学报,2010,29(3):624-632.  
Li Diyuan, Li Xibing. Experimental studies of mechanical properties of two rocks under direct compression and tension[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(3): 624-632.
- [9]刘传孝,刘福胜,蒋金泉,等.砂岩全应力-应变曲线二分阶段特征的 Lyapunov 定性分析[J].岩土力学,2008,29(7):1884-1888.  
Liu Chuanxiao, Liu Fusheng, Jiang Jinqian, et al. Analysing staged features of complete stress-strain curves divided by dichotomy of sandstone qualitatively with Lyapunov theory[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(7): 1884-1888.
- [10]刘传孝.砂岩全应力-应变试验曲线阶段特征的 Kolmogorov 熵分析[J].计算力学学报,2006,23(2):247-251.  
Liu Chuanxiao. Research on stage features of sandstone specimens Kolmogorov entropy method[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2006, 23(2): 247-251.
- [11]刘传孝.砂岩强度 MTS 试验及阶段特征的混沌动力学研究[J].岩土力学,2004,25(12):1910-1914.  
Liu Chuanxiao. Research on strength test of sandstone with MTS and its chaotic features in different stages[J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, 25(12): 1910-1914.
- [12]姜永东,鲜学福,尹光志,等.岩石应力应变全过程的声发射及分形与混沌特征[J].岩土力学,2010,31(8):2413-2418.  
Jiang Yongdong, Xian Xuefu, Yin Guangzhi, et al. Acoustic emission, fractal and chaos characters in rock stress-strain procedure[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31(8): 2413-2418.
- [13]杨展如.分形物理学[M].上海:上海科技教育出版社,1996:131-137.
- [14]钱鸣高,石平五.矿山压力与岩层控制[M].徐州:中国矿业大学出版社,2003:15-18.
- [15]何正风. MATLAB 在数学方面的应用[M].北京:清华大学出版社,2012:329-334.
- [16]荆昱,于广明,赵文彦,等.混凝土声发射现象的协同效应及混沌效应[J].山东科技大学学报:自然科学版,2012,31(4):80-84.  
Jing Yu, Yu Guangming, Zhao Wenyan, et al. Synergy effects and chaos effects of AE laws of the concrete[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology: Natural Science, 2012, 31(4): 80-84.

(责任编辑:吕海亮)