

一类具有 Holling-Ⅲ 功能反应的捕食系统的脉冲控制

刘雨林, 赵文才, 张同迁

(山东科技大学 数学与系统科学学院, 山东 青岛 266590)

摘要:建立了一类具有状态脉冲的 Holling-Ⅲ 类捕食系统模型, 当捕食者的数量达到一定值时, 人工收获捕食者, 同时收获或添加食饵, 使两者的综合收益达到最大。对无脉冲作用的系统进行定性分析, 得到正平衡点存在且全局渐近稳定的条件。利用后继函数方法及脉冲微分方程几何理论, 讨论状态脉冲控制下系统阶一周期解的存在性, 并证明周期解是轨道渐近稳定的。最后, 利用数值模拟进行验证, 讨论系统的生态意义。

关键词: Holling-Ⅲ 类功能反应; 状态脉冲; 后继函数; 阶一周期解; 轨道渐近稳定

中图分类号: O175 文献标志码: A 文章编号: 1672-3767(2014)02-0086-10

Pulse Control to Predator-prey System with Holling-Ⅲ Functional Response

Liu Yulin, Zhao Wencai, Zhang Tongqian

(College of Mathematics and Systems Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

Abstract: A predator-prey system model with Holling-Ⅲ functional response and state dependent pulse control was formulated for the study. In order to get the maximum composite income, we captured predators and gathered or added prey in the same time when the number of predators reached a specified value. Through the qualitative analysis of the system without impulse effect, the sufficient condition for the existence and global stability of the positive equilibrium was obtained. Based on the successor function and impulsive differential geometry theory, the existence of order-one periodic solution of the system under state impulsive control was discussed. Besides, the orbit asymptotical stability of the periodic solution was proved through experiments. Lastly, to verify the theoretical results, some numerical simulations were given and the biological significance of the system was summarized.

Key words: Holling-Ⅲ functional response; state impulse; successor function; order-one periodic solution; orbit asymptotically stable

1 预备知识

在同一生态环境中, 描述种群之间捕食与被捕食关系的经典模型为 Lotka-Volterra 模型:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = cx(t)y(t) - dy(t) \end{cases}.$$

其中: $x(t)$, $y(t)$ 分别表示食饵和捕食者的数量, 捕食者的功能反应函数是线性的。

收稿日期: 2013-11-04

基金项目: 国家自然科学基金项目(11371230); 山东省自然科学基金项目(ZR2012AM012); 山东省高等学校科技计划项目(J13LI05)

作者简介: 刘雨林(1986—), 女, 山东威海人, 硕士研究生, 主要从事生物数学方面的研究. E-mail: rainforestliu@126.com

赵文才(1966—), 男, 山东莱芜人, 副教授, 主要从事生物数学方面的研究, 本文通信作者。

E-mail: wencaizhao@126.com

当食饵种群的数量较小时,假设一个捕食者在单位时间内吃掉 $bx(t)$ 食饵是合理的,但当食饵种群的数量很大时,这样的假设就不合理了。1965 年,Holling 在实验和分析的基础上提出了三类适应于不同生物的功能性反应函数^[1],其中第三类功能反应函数(Holling-III functional response function)为 $\Phi(t) = \frac{mx^2(t)}{\alpha + x^2(t)}$ 。文献[2-3]研究了下列 Holling-III 功能反应的捕食系统:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - \frac{mx^2(t)}{(A + x(t))(B + x(t))}y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t)\left[s\left(1 - \frac{hy(t)}{x(t)}\right)\right] \\ x(0) > 0, y(0) > 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中:食饵种群 Logistic 增长, K 表示食饵种群的环境容纳量, s 表示捕食者种群的内禀增长率,捕食者种群的环境容纳量与食饵种群的密度相关,成正比关系。利用变换 $\tilde{t} = rt, \tilde{x}(\tilde{t}) = \frac{x(t)}{K}, \tilde{y}(\tilde{t}) = \frac{my(t)}{rK}, \alpha = \frac{s}{r}, \beta = \frac{sh}{m}, a = \frac{A}{K}, b = \frac{B}{K}$,将模型(1)无量纲化,为表达简便,令 $x = \tilde{x}(\tilde{t}), y = \tilde{y}(\tilde{t})$,得:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - x) - \frac{x^2}{(a + x)(b + x)}y \\ \frac{dy}{dt} = y(\alpha - \beta \frac{y}{x}) \\ x(0) > 0, y(0) > 0 \end{cases} \quad (2)$$

在生物资源开发利用、害虫管理等农牧业生产中,往往需要对生态系统进行人为干预,对捕食者种群和食饵种群进行人工控制。人类对生态系统的干预往往是脉冲进行的,脉冲通常有两种方式:固定时刻的脉冲和状态脉冲。对易感人群的集中免疫接种、鱼苗的季节性放养等均属固定时刻脉冲,固定时刻的脉冲生态系统已有大量研究结果^[4-8]。在农林生产中,往往需要根据害虫的数量确定控制策略,这就产生了状态脉冲控制系统。近年来,状态脉冲生态系统受到众多学者的关注,唐三一等^[9-11]对状态脉冲微分系统进行了深入探索,取得了一批重要成果。本文研究一类 Holling-III 功能反应的捕食系统,当捕食者种群的密度 y 达到较高水平 h 时,对其进行定量收获,收获量为 λ ;同时,也对食饵种群进行控制,当食饵种群的密度 x 过大时,对其进行收获,收获量为 $px - c \geq 0$,食饵的密度越大,收获量越多,反之,对其进行添加,添加量为 $c - px \geq 0$,即对系统(2)采取下列脉冲控制策略:

$$\begin{cases} \Delta x = c - px, y = h. \\ \Delta y = -\lambda \end{cases} \quad (3)$$

综合系统(2)及(3),得到状态脉冲收获模型:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - x) - \frac{x^2}{(a + x)(b + x)}y \\ \frac{dy}{dt} = y(\alpha - \beta \frac{y}{x}) \end{cases}, y < h; \begin{cases} \Delta x = c - px, y = h. \\ \Delta y = -\lambda \end{cases}, y = h. \quad (4)$$

其中: x, y 分别表示 t 时刻捕食者种群和食饵种群的密度, $x(0) > 0, y(0) > 0$; a, b, α, β 为正常数; c, p, λ 为控制参数且为正常数。

考虑状态脉冲微分方程:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}, (x, y) \notin M(x, y); \begin{cases} \Delta x = \alpha(x, y) \\ \Delta y = \beta(x, y) \end{cases}, (x, y) \in M(x, y). \quad (5)$$

其中, $P(x, y), Q(x, y)$ 具有一阶连续偏导数。

定义 1 由系统(5)的解映射构成的动力学系统称为半连续动力系统,记为 (Ω, f, φ, M) . $\varphi(M) = N$, φ 称为脉冲映射。其中, $M(x, y)$ 和 $N(x, y)$ 是平面 R^2 上的直线或曲线,分别称为脉冲集和相集。

系统 (4) 中, 脉冲集为 $M = \{(x, y) | y = h, x > 0\}$, M 对应相集为 $N = \{(x, y) | y = h - \lambda, x > 0\}$ 。

定义 2 (后继函数^[12]) 假设脉冲集 M 和相集 N 均为直线, 相集 N 与 y 轴的交点为 Q , 对于 N 上任意点 H , H 与点 Q 的距离为 s_{QH} , 系统 (5) 从 H 出发的轨线 $\Pi(H, t)$ 交 M 于一点 H_1 , H_1 脉冲后的相点为 H_1^+ , H_1^+ 与 Q 点的距离为 $s_{QH_1^+}$, 称 H_1^+ 为 H 的后继点, 点 H 的后继函数为 $f(H) = s_{QH_1^+} - s_{QH}$ 。

引理 1 后继函数是连续的。

定义 3 (阶一周解^[12]) 若相集 N 上存在一点 P_0 , 且存在常数 $T > 0$, 使得从 P_0 出发的轨线 $\Pi(P_0, t)$ 满足 $\Pi(P_0, T) = P \in M, \varphi(P) = P^+ = P_0$, 则称 $\Pi(P_0, t)$ 为系统 (5) 的阶一周解。

引理 2 (脉冲微分方程的 Bendixson 定理^[12]) 设 G 是系统 (5) 的一个 Bendixson 区域, 若 G 内没有系统 (5) 的奇点, 则 G 内必含系统 (5) 的闭轨。

对于系统 (4), 由引理 2 得:

引理 3 若相集 N 中存在 A, B 两点, 后继函数满足 $f(A)f(B) < 0$, 则系统 (4) 存在阶一周解。

引理 4^[13] 设 $x = \xi(t), y = \eta(t)$ 是下列脉冲微分方程的 T 周期解:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}, \Phi(x, y) \neq 0; \begin{cases} \Delta x = \alpha(x, y) \\ \Delta y = \beta(x, y) \end{cases}, \Phi(x, y) = 0. \quad (6)$$

其中: $P(x, y), Q(x, y)$ 具有一阶连续偏导数; $\Phi(x, y)$ 是充分光滑的函数且 $\text{grad} \Phi(x, y) \neq 0$ 。若乘子 μ 满足 $|\mu| < 1$, 则该周期解是轨道渐近稳定的。这里,

$$\mu = \prod_{j=1}^n \kappa_j \exp \left[\int_0^T \left(\frac{\partial P(\xi(t), \eta(t))}{\partial x} + \frac{\partial Q(\xi(t), \eta(t))}{\partial y} \right) dt \right].$$

其中: $\kappa_j = \frac{\left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) P_+ + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) Q_+}{\frac{\partial \Phi}{\partial x} P + \frac{\partial \Phi}{\partial y} Q}$; $P, Q, \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \frac{\partial \beta}{\partial x}, \frac{\partial \beta}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ 均

为点 $(\xi(\tau_j), \eta(\tau_j))$ 处的值, $P_+ = P(\xi(\tau_j^+), \eta(\tau_j^+)), Q_+ = Q(\xi(\tau_j^+), \eta(\tau_j^+))$ 。

2 无脉冲影响的系统平衡点的稳定性

系统 (4) 中, 若 $c = p = \lambda = 0$, 即系统没有脉冲影响。此时, 系统为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{x^2 y}{(a+x)(b+x)} \\ \frac{dy}{dt} = y(\alpha - \beta \frac{y}{x}) \\ x(0) > 0, y(0) > 0 \end{cases}. \quad (7)$$

显然, 系统存在半平凡平衡点 $E_0(1, 0)$ 以及唯一正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$, 其中: $0 < x^* < 1, y^* = \frac{\alpha}{\beta} x^*$ 。

事实上, 设 $g(x) = 1 - x, f(x) = \frac{x^2}{(a+x)(b+x)}$, 则

$$g'(x) = -1 < 0, f'(x) = \frac{(a+b)x^2 + 2abx}{(a+x)^2(b+x)^2} > 0.$$

令 $\begin{cases} xg(x) - yf(x) = 0 \\ y(\alpha - \beta \frac{y}{x}) = 0 \end{cases}$, 得 $g(x) = f(x) \frac{\alpha}{\beta}$ 。由 $g(0) = 1, g(1) = 0, g'(x) < 0, f(0) = 0, f'(x) > 0$

可知, $g(x)$ 与 $f(x) \frac{\alpha}{\beta}$ 在第一象限内有唯一交点 $E^*(x^*, y^*)$, 并且满足 $0 < x^* < 1, y^* = \frac{\alpha}{\beta} x^*$ 。故系统 (7) 存在唯一正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$ 。

计算系统 (7) 在平衡点处的 Jacobi 矩阵, 得

$$J(E) = \begin{bmatrix} 1 - 2x - y \frac{(a+b)x^2 + 2abx}{(a+x)^2(b+x)^2} - \frac{x^2}{(a+x)(b+x)} & \\ \beta \frac{y^2}{x^2} & \alpha - \frac{2\beta y}{x} \end{bmatrix}.$$

在 $E_0(1,0)$ 处, $J(E_0) = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{(a+1)(b+1)} \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$, 显然 $E_0(1,0)$ 为鞍点。

在 $E^*(x^*, y^*)$ 处, $J(E^*) = \begin{bmatrix} 1 - 2x^* - y^* \frac{(a+b)x^{*2} + 2abx^*}{(a+x^*)^2(b+x^*)^2} - \frac{x^{*2}}{(a+x^*)(b+x^*)} & \\ \beta \frac{y^{*2}}{x^{*2}} & \alpha - \frac{2\beta y^*}{x^*} \end{bmatrix}.$

由 $|J(E^*) - \lambda I| = 0$ 即 $\begin{vmatrix} 1 - 2x^* - \frac{(1-x^*)(ax^* + bx^* + 2ab)}{(a+x^*)^2(b+x^*)^2} - \lambda & \frac{x^{*2}}{(a+x^*)(b+x^*)} \\ \frac{\alpha^2}{\beta} & -\alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0$, 可得

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, 其中:

$$p = \frac{2x^{*3} + (a+b-1+\alpha)x^{*2} + (a+b)\alpha x^* + ab(1+\alpha)}{(a+x^*)(b+x^*)};$$

$$q = \left[x^* + \frac{(1-x^*)(ax^* + bx^* + 2ab)}{(a+x^*)(b+x^*)} \right] \alpha > 0.$$

令 $P(x) = 2x^3 + (a+b-1+\alpha)x^2 + (a+b)\alpha x + ab(1+\alpha)$,

$$\Delta = p^2 - 4q = \frac{P^2(x^*)}{(a+x^*)^2(b+x^*)^2} - 4\alpha \left[x^* + \frac{(1-x^*)(ax^* + bx^* + 2ab)}{(a+x^*)(b+x^*)} \right].$$

由 $\lambda_1\lambda_2 = q > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = -p$, 可得:

定理 1 若 $P(x^*) > 0$, 则系统 (7) 的正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$ 是局部渐近稳定的, 特别地:

1) 若 (H1) $0 < P(x^*) < [4\alpha(x^{*3} + (a+b-ab)x^* + 2ab)(a+x^*)(b+x^*)]^{\frac{1}{2}}$ 成立, 则 $E^*(x^*, y^*)$ 是局部渐近稳定的焦点;

2) 若 (H2) $P(x^*) \geq [4\alpha(x^{*3} + (a+b-ab)x^* + 2ab)(a+x^*)(b+x^*)]^{\frac{1}{2}}$ 成立, 则 $E^*(x^*, y^*)$ 是局部渐近稳定的结点。

下面讨论正平衡点的全局稳定性。给出条件:

(H3) $a+b+\alpha-1 \geq 0$;

(H4) $a+b+\alpha-1 < 0$ 且 $D = (a+b+\alpha-1)^2 - 6(a+b)\alpha \leq 0$ 。

定理 2 若条件 (H3) 或 (H4) 成立, 则系统 (7) 的正平衡点 $E^*(x^*, y^*)$ 是全局渐近稳定的。

证明: 由 (H3) 或 (H4) 知, $P(x) = 2x^3 + (a+b-1+\alpha)x^2 + (a+b)\alpha x + ab(1+\alpha) > 0$ 对 $0 \leq x \leq 1$ 成立, 因而 $P(x^*) > 0$ 。构造 Dulac 函数 $B(x, y) = \frac{(a+x)(b+x)}{x^2 y^2}, x > 0, y > 0$ 。令

$$f(x, y) = x(1-x) - \frac{x^2}{(a+x)(b+x)}y, \quad g(x, y) = y(\alpha - \beta \frac{y}{x}),$$

则 $\frac{\partial(fB)}{\partial x} + \frac{\partial(gB)}{\partial y} = -\frac{1}{x^2 y^2} [2x^3 + (a+b+\alpha-1)x^2 + (a+b)\alpha x + ab(1+\alpha)] = -\frac{P(x)}{x^2 y^2} \leq 0$ 。

由 Bendixson-Dulac 定理, 平衡点 $E^*(x^*, y^*)$ 的周围不存在闭轨, 正平衡点是全局渐近稳定的。证毕。

注 1 若 (H1), (H3) 或 (H1), (H4) 成立, 则 $E^*(x^*, y^*)$ 是全局渐近稳定的焦点。

注 2 若 (H2), (H3) 或 (H2), (H4) 成立, 则 $E^*(x^*, y^*)$ 是全局渐近稳定的结点。

设 $E^*(x^*, y^*)$ 是系统 (7) 全局渐近稳定的焦点, 则该系统的相图为图 1。

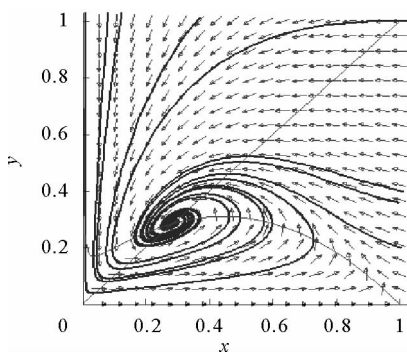


图 1 系统(7)具有稳定焦点的相图

Fig. 1 The phase diagram of the system(7) with stable focus

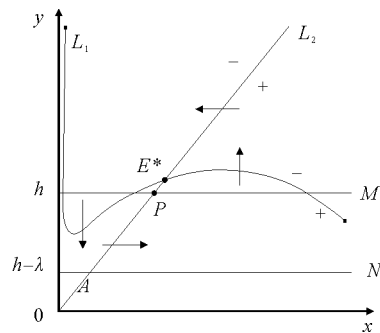


图 2 系统(4)的结构图

Fig. 2 The structure diagram of the system(4)

3 脉冲作用下系统阶一周解的存在性与稳定性

下面仅针对焦点的情况,讨论系统(4)的周期解的存在性与稳定性。因此总是假设条件(H1),(H3)或(H1),(H4)成立。 $L_1: y = \frac{(a+x)(b+x)(1-x)}{x}$ 为系统(4)的食饵等倾线, $L_2: y = \frac{\alpha}{\beta}x$ 为系统(4)的捕食者等倾线。脉冲集 $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 \mid x > 0, y = h\}$, 相集 $N = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 \mid x > 0, y = h - \lambda\}$ 。系统(4)的结构如图 2 所示。为了方便起见,定义两条特殊的系统轨线 S_1, S_2 : 记相集 N 与等倾线 L_2 的交点为 $A(x_A, h - \lambda)$, 由微分方程的定性理论可知,系统(4)存在唯一的轨线 S_1 与相集相切于点 A ; 记脉冲集 M 与等倾线 L_2 的交点为 $P(x_P, h)$, 同样,系统(4)存在唯一的轨线 S_2 与脉冲集相切于点 P 。

下面根据焦点 $E^*(x^*, y^*)$ 的不同位置,利用脉冲微分方程几何理论^[12],讨论系统(4)的阶一周解的存在性,根据实际情况,只考虑 $y^* \geq h - \lambda$ 的情形。

情况 I $y^* \geq h$

设系统轨线 S_1 与脉冲集 M 交于 $A_1(x_{A_1}, h)$ 点, A_1 发生脉冲后的相点为 $A_1^+(x_{A_1}^+, h - \lambda)$, 这里 $x_{A_1}^+ = c + (1 - p)x_{A_1}$ 。

a) 如果 $x_A = x_{A_1}^+$ (图 3), 此时,后继函数 $f(A) = x_{A_1}^+ - x_A = 0$, 则系统(4)存在阶一周解。

b) 如果 $x_A > x_{A_1}^+$ (图 4), 此时,后继函数 $f(A) = x_{A_1}^+ - x_A < 0$ 。在 $y = h - \lambda$ 上选取一点 $\bar{A}(x_{\bar{A}}, h - \lambda)$, 使得 \bar{A} 充分接近 A (即 $x_A - \epsilon < x_{\bar{A}} < x_A$, ϵ 为充分小的正数), 从 \bar{A} 出发的轨线交脉冲集于 $\bar{A}_1(x_{\bar{A}_1}, h)$, 发生脉冲后的相点为 \bar{A}_1^+ , 由于 \bar{A} 充分接近 A , 因而轨线 $\bar{A}\bar{A}_1$ 无限接近轨线 AA_1 , 于是, $f(\bar{A}) = x_{\bar{A}_1}^+ - x_{\bar{A}} < 0$ 。另一方面, 在 $y = h - \lambda$ 上选取一点 $B(x_B, h - \lambda)$ 满足 $0 < x_B < x_{A_1}^+$, 从 B 出发的轨线交脉冲集于 $B_1(x_{B_1}, h)$, 发生脉冲后的相点为 $B_1^+(x_{B_1}^+, h - \lambda)$, $x_{B_1}^+ = c + (1 - p)x_{B_1}$, 由脉冲微分方程解的存在唯一性定理, $x_{A_1} < x_{B_1}$, 从而 $x_{A_1}^+ < x_{B_1}^+$, 于是, B 点的后继函数 $f(B) = x_{B_1}^+ - x_B > 0$, 由引理 3, 系统(4)存在阶一周解。

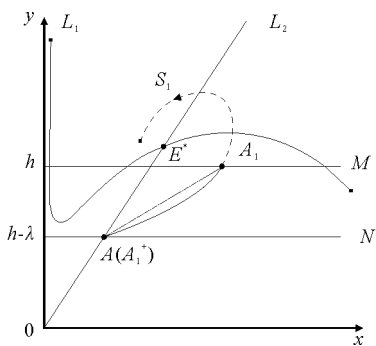


图 3 $y^* \geq h, x_A = x_{A_1}^+$

Fig. 3 $y^* \geq h, x_A = x_{A_1}^+$

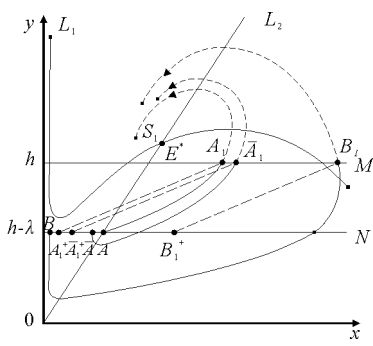


图 4 $y^* \geq h, x_A > x_{A_1}^+$

Fig. 4 $y^* \geq h, x_A > x_{A_1}^+$

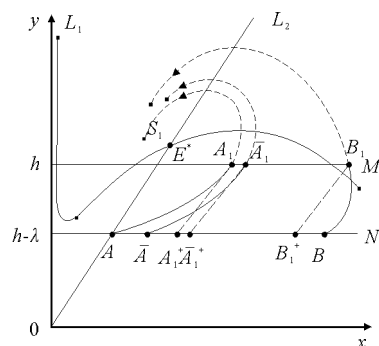


图 5 $y^* \geq h, x_A < x_{A_1}^+$

Fig. 5 $y^* \geq h, x_A < x_{A_1}^+$

c) 如果 $x_A < x_{A_1^+}$ (图 5), 有 $f(A) = x_{A_1^+} - x_A > 0$, 在 $y = h - \lambda$ 上存在一点 $B(x_B, h - \lambda)$ 满足 $x_{A_1^+} \ll x_B < K$, 从 B 出发的轨线交脉冲集于 $B_1(x_{B_1}, h)$, 发生脉冲后的相点为 $B_1^+(x_{B_1^+}, h - \lambda)$, $x_{B_1^+} = c + (1 - p)x_{B_1}$, 那么 $f(B) = x_{B_1^+} - x_B < 0$, 由引理 3, 系统 (4) 存在阶一周期解。

综上所述, 可得定理 3。

定理 3 如果 (H1), (H3) 或 (H1), (H4) 成立, 并且 $y^* \geq h$, 系统 (4) 存在阶一周期解。

情况 II $h - \lambda \leq y^* < h$ 。

根据轨线 S_1, S_2 与相集及脉冲集的位置关系, 分以下三种情况讨论。

1) 轨线 S_1 与脉冲集 M 交于点 $A_1(x_A, h)$ 。

a) 如果 $x_A = x_{A_1^+}$ (图 6), 有 $f(A) = x_{A_1^+} - x_A < 0$, 则系统 (4) 存在阶一周期解。

b) 如果 $x_A > x_{A_1^+}$ (图 7), 有 $f(A) = x_{A_1^+} - x_A < 0$, 在 $y = h - \lambda$ 上选取一点 $\bar{A}(x_A, h - \lambda)$ 充分接近 A (即 $x_A - \epsilon < x_{\bar{A}} < x_A, \epsilon$ 为充分小的正数), 类似于图 4, 轨线 $\bar{A}A_1$ 无限接近轨线 AA_1 , 于是, $f(\bar{A}) = x_{A_1^+} - x_{\bar{A}} < 0$ 。另一方面, 在 $y = h - \lambda$ 上存在一点 $B(x_B, h - \lambda)$ 满足 $0 < x_B < x_{A_1^+}$, 从 B 出发的轨线交脉冲集于 $B_1(x_{B_1}, h)$, 发生脉冲后的相点为 B_1^+ , 则 $x_{A_1^+} < x_{B_1^+}$, 那么 $f(B) = x_{B_1^+} - x_B > 0$, 故系统 (4) 存在阶一周期解。

c) 如果 $x_A < x_{A_1^+}$ (图 8), 有 $f(A) = x_{A_1^+} - x_A > 0$, 在 $y = h - \lambda$ 存在一点 $B(x_B, h - \lambda)$ 满足 $x_{A_1^+} \ll x_B < K$, 从 B 出发的轨线交脉冲集于 B_1 , 发生脉冲后的相点为 B_1^+ , 那么 $f(B) = x_{B_1^+} - x_B < 0$, 系统 (4) 存在阶一周期解。

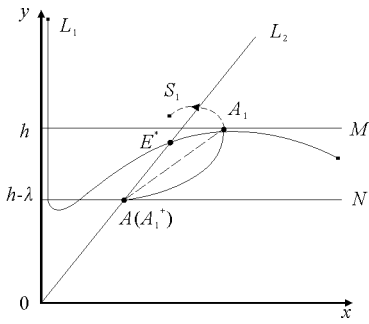


图 6 $h - \lambda \leq y^* < h$, 情况 II 1), $x_A = x_{A_1^+}$
Fig. 6 $h - \lambda \leq y^* < h$,
Case II 1), $x_A = x_{A_1^+}$

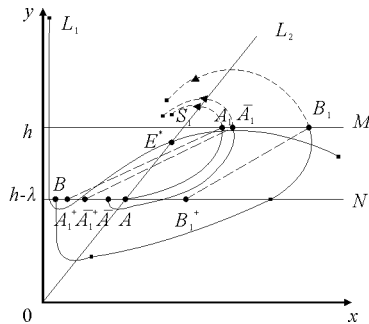


图 7 $h - \lambda \leq y^* < h$, 情况 II 1), $x_A > x_{A_1^+}$
Fig. 7 $h - \lambda \leq y^* < h$,
Case II 1), $x_A > x_{A_1^+}$

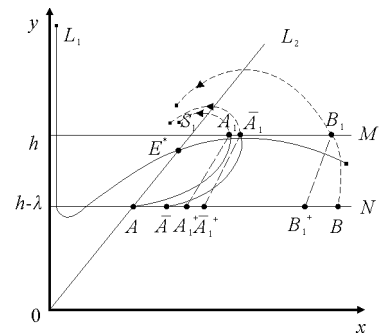


图 8 $h - \lambda \leq y^* < h$, 情况 II 1), $x_A < x_{A_1^+}$
Fig. 8 $h - \lambda \leq y^* < h$,
Case II 1), $x_A < x_{A_1^+}$

2) 轨线 S_1 与脉冲集 M 相切于 $A_1(x_{A_1}, h)$ 。此时 S_1 与 S_2 重合(图 9, 10, 11), 可依照情况 II 1) 进行讨论。

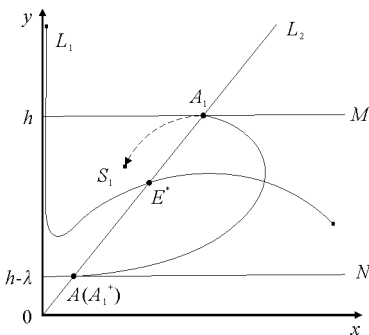


图 9 $h - \lambda \leq y^* < h$, 情况 II 2), $x_A = x_{A_1^+}$
Fig. 9 $h - \lambda \leq y^* < h$,
Case II 2), $x_A = x_{A_1^+}$

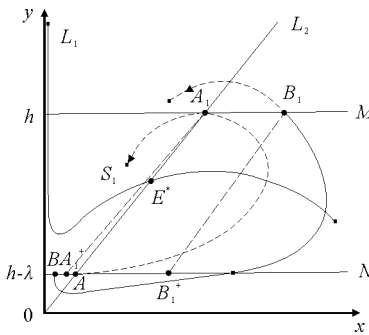


图 10 $h - \lambda \leq y^* < h$, 情况 II 2), $x_A > x_{A_1^+}$
Fig. 10 $h - \lambda \leq y^* < h$,
Case II 2), $x_A > x_{A_1^+}$

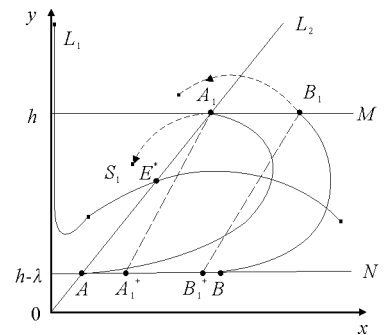


图 11 $h - \lambda \leq y^* < h$, 情况 II 2), $x_A < x_{A_1^+}$
Fig. 11 $h - \lambda \leq y^* < h$,
Case II 2), $x_A < x_{A_1^+}$

3) 轨线 S_1 与脉冲集 M 无交点。考察轨线 S_2 , 设轨线 S_2 从相集 N 上点 $D(x_D, h-\lambda)$ 出发, 与脉冲集相切于点 D_1 , 脉冲后的相点为 D_1^+ , 这里点 D_1 即为图 2 中的点 P 。

a) 如果 $x_D = x_{D_1^+}$ (图 12), 有 $f(D) = x_{D_1^+} - x_D = 0$, 则系统 (4) 存在阶一周期解。

b) 如果 $x_D > x_{D_1^+}$ (图 13), 有 $f(D) = x_{D_1^+} - x_D < 0$, 在 $y = h - \lambda$ 上存在一点 B 满足 $0 < x_B < x_{D_1^+}$, 从 B 出发的轨线交脉冲集于 B_1 , 发生脉冲后的相点为 B_1^+ , 则 $x_{D_1^+} < x_{B_1^+}$, 那么 $f(B) = x_{B_1^+} - x_B > 0$, 故系统 (4) 存在阶一周期解。

c) 如果 $x_D < x_{D_1^+}$, 有 $f(D) = x_{D_1^+} - x_D > 0$, 设轨线 S_2 交相集于点 $H(x_H, h - \lambda)$, 以 H 作为初始点有两种情况:

(c1) $x_{D_1^+} \geq x_H$ (图 14), $f(H) = x_{D_1^+} - x_H \geq 0$, 在 $y = h - \lambda$ 上存在一点 B , 满足 $x_{D_1^+} < x_B < K$, 从 B 出发的轨线交 M 于 B_1 , 发生脉冲后的相点为 B_1^+ , 那么 $f(B) = x_{B_1^+} - x_B < 0$, 系统 (4) 存在阶一周期解。

(c2) $x_{D_1^+} < x_H$ (图 15), 此时系统 (4) 不存在阶一周期解。

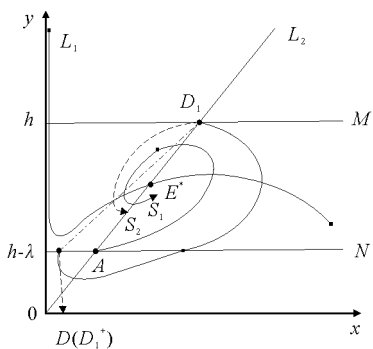


图 12 $h - \lambda \leq y^* < h$, 情况 II 3), $x_D = x_{D_1^+}$
Fig. 12 $h - \lambda \leq y^* < h$,
Case II 3), $x_D = x_{D_1^+}$

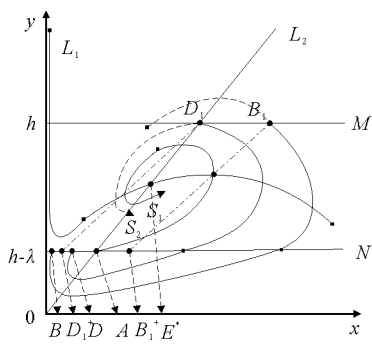


图 13 $h - \lambda \leq y^* < h$, 情况 II 3), $x_D > x_{D_1^+}$
Fig. 13 $h - \lambda \leq y^* < h$,
Case II 3), $x_D > x_{D_1^+}$

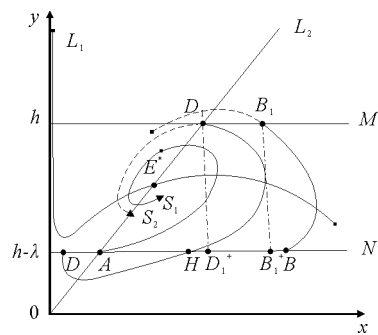


图 14 $h - \lambda \leq y^* < h$, 情况 II 3), $x_D < x_{D_1^+}$
Fig. 14 $h - \lambda \leq y^* < h$,
Case II 3), $x_D < x_{D_1^+}$

定理 4 如果 (H1), (H3) 或 (H1), (H4) 成立, $h - \lambda \leq y^* < h$,

(A1) 若轨线 S_1 与脉冲集 M 有交点, 从 $A(x_A, h - \lambda)$ 出发的轨线 S_1 与脉冲集相交或相切于点 $A_1(x_{A_1}, h)$, A_1 发生脉冲后的相点为 $A_1^+(x_{A_1^+}, h - \lambda)$, 此时系统 (4) 存在阶一周期解。

(A2) 若轨线 S_1 与脉冲集 M 没有交点, 从 $D(x_D, h - \lambda)$ 出发的轨线 S_2 与脉冲集相切于 $D_1(x_{D_1}, h)$ 点, D_1 发生脉冲后的相点为 $D_1^+(x_{D_1^+}, h - \lambda)$, 则

1) 若 $x_D \geq x_{D_1^+}$, 系统 (4) 存在阶一周期解。

2) 当 $x_D < x_{D_1^+}$ 时, 若 $x_{D_1^+} \geq x_H$, 系统 (4) 存在阶一周期解; 若 $x_{D_1^+} < x_H$, 系统不存在阶一周期解, 其中, $H(x_H, h - \lambda)$ 为 S_2 与相集 N 的交点。

下面讨论周期解的稳定性。

定理 5 设 $(\xi(t), \eta(t))$ 是系统 (4) 的初始点为 $C_0(\xi_0, h - \lambda)$ 的 T 周期解, 若

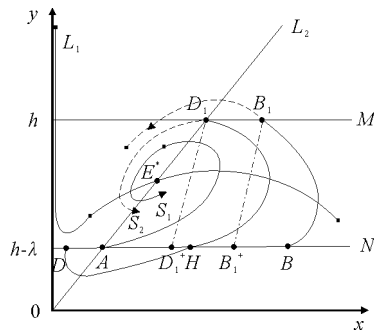


图 15 $h - \lambda \leq y^* < h$, 情况 II 3),
 $x_D < x_{D_1^+}$, 系统 (4) 不存在阶一周期解
Fig. 15 $h - \lambda \leq y^* < h$, Case II 3), $x_D < x_{D_1^+}$

$$|\mu| = \left| \frac{h(\xi_0 - c)(\alpha - \beta \frac{h - \lambda}{\xi_0})}{\xi_0(h - \lambda)(\alpha - \beta \frac{h(1 - p)}{\xi_0 - c})} e^{-aT} \exp \left[\int_0^T \left(\frac{\xi^3(t) - ab\xi(t)}{(a + \xi(t))^2(b + \xi(t))^2} \eta(t) - \xi(t) \right) dt \right] \right| < 1,$$

则该周期解 $(\xi(t), \eta(t))$ 是轨道渐近稳定的。

证明: 设 $\Pi(C_0, t)$ 是以 $C_0(\xi_0, h - \lambda)$ 为初始点的闭轨线, $\Pi(C_0, t)$ 交脉冲集 M 于 $C_1(\xi(T), \eta(T))$, C_1 点发生脉冲后的相点为 $C_1^+(\xi(T^+), \eta(T^+))$ 。即 $\Pi(C_0, T) = C_1, C_1^+ = \varphi(C_1) = C_0$, 这里, $\xi(T^+) = (1 - p)\xi(T) + c, \eta(T^+) = \eta(T) - \lambda = h - \lambda, \xi(T) = \frac{\xi_0 - c}{1 - p}, \eta(T) = h$ 。

系统 (4) 中, $P(x, y) = x(1 - x) - \frac{x^2}{(a + x)(b + x)}y, Q(x, y) = y(\alpha - \beta \frac{y}{x})$, 并且 $\alpha(x, y) = c - px, \beta(x, y) = -\lambda, \Phi(x, y) = y - h$ 。于是, 有 $\frac{\partial Q}{\partial y} = \delta - \frac{2\beta y}{x}, \frac{\partial P}{\partial x} = 1 - 2x - \frac{(a + b)x^2 + 2abx}{(a + x)^2(b + x)^2}y$, 并且 $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = -p, \frac{\partial \alpha}{\partial y} = 0, \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0, \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 1$ 。

$$\kappa = \frac{\left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) P_+ + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) Q_+}{\frac{\partial \Phi}{\partial x} P + \frac{\partial \Phi}{\partial y} Q} = \frac{(1 - p)Q(\xi(T^+), \eta(T^+))}{Q(\xi(T), \eta(T))} = \frac{(1 - p)(h - \lambda)(\alpha - \beta \frac{h - \lambda}{\xi_0})}{h(\alpha - \beta \frac{h(1 - p)}{\xi_0 - c})}。$$

$$\begin{aligned} \mu &= \kappa \exp \left[\int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dt \right] = \kappa \exp \left[\int_0^T \left(1 - 2x - \frac{(a + b)x^2 + 2abx}{(a + x)^2(b + x)^2}y + \delta - \frac{2\beta y}{x} \right) dt \right] = \\ &= \kappa \exp \left[\int_0^T \left(1 - x - \frac{x}{(a + x)(b + x)}y + 2(\alpha - \frac{\beta y}{x}) - \alpha + \frac{x^3 - abx}{(a + x)^2(b + x)^2}y - x \right) dt \right] = \\ &= \frac{h(\xi_0 - c)(\alpha - \beta \frac{h - \lambda}{\xi_0})}{\xi_0(h - \lambda)(\alpha - \beta \frac{h(1 - p)}{\xi_0 - c})} e^{-aT} \exp \left[\int_0^T \left(\frac{\xi^3(t) - ab\xi(t)}{(a + \xi(t))^2(b + \xi(t))^2} \eta(t) - \xi(t) \right) dt \right]。 \end{aligned}$$

由引理 4, 若

$$|\mu| = \left| \frac{h(\xi_0 - c)(\alpha - \beta \frac{h - \lambda}{\xi_0})}{\xi_0(h - \lambda)(\alpha - \beta \frac{h(1 - p)}{\xi_0 - c})} e^{-aT} \exp \left[\int_0^T \left(\frac{\xi^3(t) - ab\xi(t)}{(a + \xi(t))^2(b + \xi(t))^2} \eta(t) - \xi(t) \right) dt \right] \right| < 1,$$

则系统 (4) 的周期解轨道渐近稳定。证毕。

4 数值模拟及其生态意义

下面利用数值模拟的方法来分析系统 (4) 的动力学性态及其生态意义。令 $a = 0.1, b = 0.01, \alpha = 0.4, \beta = 0.4$, 则 E^* 为 $(0.285, 0.285)$, 系统 (4) 化为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - x) - \frac{x^2}{(0.1 + x)(0.01 + x)}y, & y < h; \\ \frac{dy}{dt} = y(0.4 - \frac{0.4y}{x}) & , y = h; \end{cases} \begin{cases} \Delta x = c - px \\ \Delta y = -\lambda \end{cases}, x(0) > 0, y(0) > 0。 \quad (8)$$

根据初值点的不同位置及参数 h, c, p, λ 的不同取值, 对系统 (8) 进行数值模拟。

1) 取初值点 $C_0(0.5, 0.23), h = 0.25, \lambda = 0.2, c = 0.05, p = 0.2$, 此时 $y^* = 0.285 > h$, 对应于情况 I, 系统 (8) 存在阶一周解 (图 16)。

2) 取初值点 $C_0(0.2, 0.1)$, $h = 0.35, \lambda = 0.2, c = 0.1, p = 0.2$, 此时 $h - \lambda < y^* = 0.285 < h$, 对应于情况 II, 系统(8) 存在阶一周期解(图 17)。

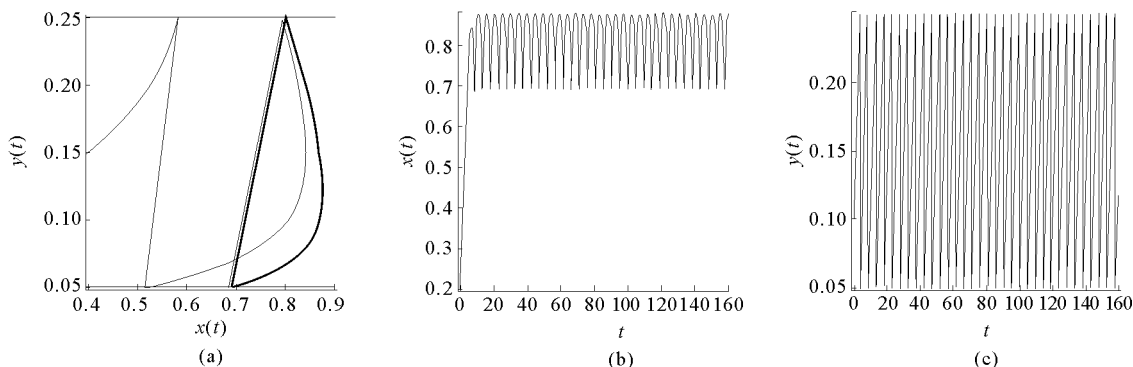


图 16 初值点 $C_0(0.5, 0.23)$, $h = 0.25, \lambda = 0.2, c = 0.05, p = 0.2$

Fig. 16 Initial point $C_0(0.5, 0.23)$, $h = 0.25, \lambda = 0.2, c = 0.05, p = 0.2$

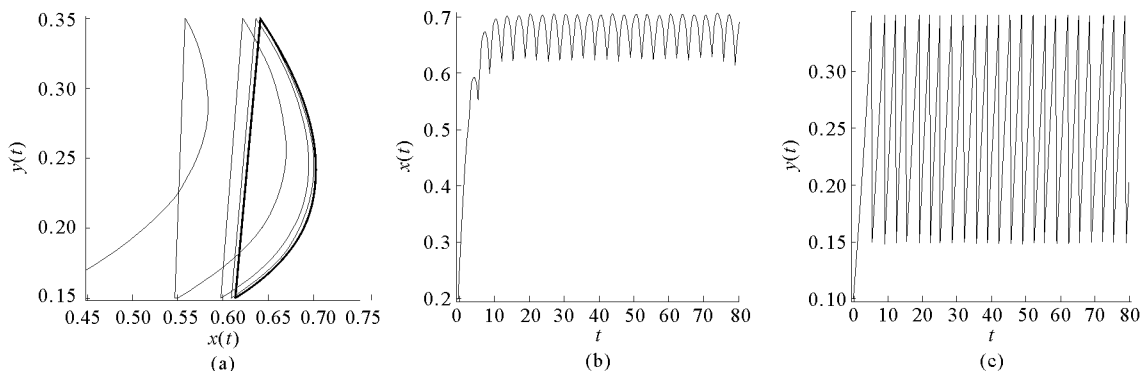


图 17 初值点 $C_0(0.2, 0.1)$, $h = 0.35, \lambda = 0.2, c = 0.1, p = 0.2$

Fig. 17 Initial point $C_0(0.2, 0.1)$, $h = 0.35, \lambda = 0.2, c = 0.1, p = 0.2$

3) 取初值点 $C_0(0.2, 0.1)$, $h = 0.4, \lambda = 0.2, c = 0.1, p = 0.2$, 此时 $h - \lambda < y^* = 0.285 < h$, 对应于情况 II, 系统(8) 不存在阶一周期解(图 18)。

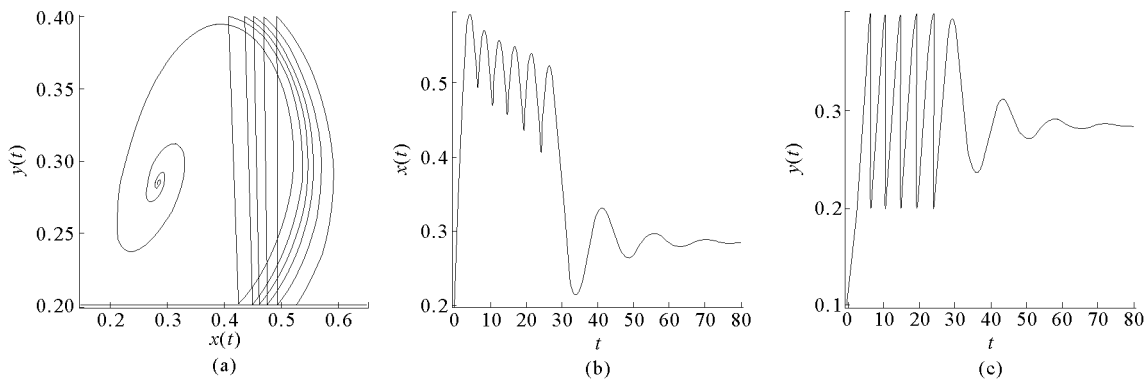


图 18 初值点 $C_0(0.2, 0.1)$, $h = 0.4, \lambda = 0.2, c = 0.1, p = 0.2$

Fig. 18 Initial point $C_0(0.2, 0.1)$, $h = 0.4, \lambda = 0.2, c = 0.1, p = 0.2$

从图 16 可以看出, 若状态脉冲控制的阈值 $h = 0.25$, 此时, 系统(8) 存在阶一周期解, 即捕食者的经济

临界值小于 y^* 时,收获捕食者是可以持续进行的。比较图 17 和图 18,图 17 中 h 的取值为 0.35,系统存在阶一周解,可以持续进行收获;图 18 中 h 的取值为 0.4,系统不存在阶一周解,因而,若捕食者的经济临界点取值过大,可能导致有限收获次数的发生。因而,在实际生产中,可以通过适当选取经济临界值及控制参数,保证系统可以持续收获,从而获取最大收益。

参考文献:

- [1]Holling C S. The functional response of predators to prey density and its role in mimicry and population regulation[J]. Memoirs of the Entomological Society of Canada,1965,46:1-60.
- [2]Maynard-Smith J. Models in ecology[M]. Cambridge:Cambridge University Press,1978:30-33.
- [3]Hsu S B,Huang W. Global stability for a class of predator-prey systems[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics,1995,55(3):763-783.
- [4]赵文才,李玉新,孟新柱. 脉冲接种作用下具有时滞的传染病模型分析[J]. 应用数学,2010,23(2):370-375.
Zhao Wencai,Li Yuxin,Meng Xinzhu. Analysis of an epidemic model with impulsive vaccination and time delays[J]. Mathematica Applicata,2010,23(2):370-375.
- [5]岳宗敏,刘海峰,蔺小林. 脉冲控制的害虫综合防治模型及仿真[J]. 吉林大学学报:理学版,2012,5(3):183-190.
Yue Zongmin,Liu Haifeng,Lin Xiaolin. Impulse control in pest management and computer simulation[J]. Journal of Jilin University:Science Edition,2012,50(3):183-190.
- [6]孟新柱,陈兰荪,宋治涛. 一类新的含有垂直传染与脉冲免疫的时滞 SEIR 传染病模型的全局动力学行为[J]. 应用数学和力学,2007,28(9):1123-1134.
Meng Xinzhu,Chen Lansun,Song Zhitao. Global dynamics behaviors for a new delay SEIR epidemic disease model with vertical transmission and pulse vaccination[J]. Applied Mathematics and Mechanics,2007,28(9):1123-1134.
- [7]Meng X Z,Li Z Q,Nieto J J. Dynamic analysis of Michaelis-Menten chemostat-type competition models with time delay and pulse in a polluted environment[J]. Journal of Mathematical Chemistry,2010,47(1):123-144.
- [8]Zhang T Q,Meng X Z,Song Y,et al. Dynamical analysis of delayed plant disease models with continuous or impulsive cultural control strategies[C]//Abstract and Applied Analysis. New York:Hindawi Publishing Corporation,2012:ID 428453.
- [9]Tang S Y,Xiao Y N,Chen L S,et al. Integrated pest management models and their dynamical behaviour[J]. Bulletin of Mathematical Biology,2005,67(1):115-135.
- [10]Nie L F,Teng Z D,Hu L,et al. Qualitative analysis of a modified Leslie-Gower and Holling-type II predator-prey model with state dependent impulsive effects[J]. Nonlinear Analysis:Real World Applications,2010,11(3):1364-1373.
- [11]Zhao L C,Chen L S,Zhang Q L. The geometrical analysis of a predator-prey model with two state impulses[J]. Mathematical Biosciences,2012,238(2):55-64.
- [12]陈兰荪. 害虫治理与半连续动力系统几何理论[J]. 北华大学学报:自然科学版,2011,12(1):1-9.
Chen Lansun. Pest control and geometric theory of semi-continuous dynamical system[J]. Journal of Beihua University: Natural Science,2011,12(1):1-9.
- [13]Simeonov P S,Bainov D D. Orbital stability of periodic solutions of autonomous systems with impulse effect[J]. International Journal of Systems Science,1988,19:2561-2585.

(责任编辑:吕文红)