第 33 卷 第 2 期
2014 年 4 月
Vol. 33 No. 2
Apr. 2014

Journal of Shandong University of Science and Technology
Natural Science

基于变分方法的四阶边值问题的多重正解

武华华[1]，孙苏菁[2]

（1. 山东科技大学 数学与系统科学学院，山东 青岛 266590；2. 山东科技大学 信息科学与工程学院，山东 青岛 266590）

摘　要：研究了一类弹性梁形变过程中产生的四阶微分方程边值问题，主要通过变分方法和极值原理在此类四阶微分方程正解的存在性和多重性的应用，借助山路引理的基本结论，得到所研究问题至少存在两个正解的结果。

关键词：边值问题；变分方法；正解；极值原理

中图分类号：O175.8　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1672-3767(2014)02-0096-04

Multiple Positive Solutions for a Fourth Order Boundary Value via Variational Method

Wu Huahua[1], Sun Sujing[2]

(1. College of Mathematics and Systems Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China;
2. College of Information Science and Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

Abstract: The paper studied a fourth order differential equation produced in process of elastic beam deformation with boundary value conditions. It applied mainly the variational method and the maximum principle in the existence and multiplicity of positive solutions for such fourth-order differential equations. The results show that there are at least two positive solutions by using the basic conclusion of mountain pass theorem.

Key words: boundary value problems; variational methods; positive solutions; maximum principle

本文中，考虑如下四阶边值问题的多个正解：

$$\begin{aligned} &u^{(4)}(x) = f(x, u(x)), 0 < x < 1\ ;\\ &u(0) = u'(1) = u''(0) = u'''(1) = 0\ 。\end{aligned} \tag{1}$$

其中：$f \in C([0,1] \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$。在研究弹性梁形变过程中产生的此类方程时，其力学描述为：长度为 1 的薄而柔软的弹性梁，一端简单支撑而另一端悬空时，在外力作用下发生形变的过程[1-2]。

文献[1]考虑了问题(1)的数值解；文献[3-5]分别就问题的多重性、对称性和奇异性进行研究。一些学者应用单调算子理论、临界点理论、不动点指数理论、Leray-Schauder 不动点理论、锥拉伸和压缩不动点定理，研究了解的存在性和多重性[6-8]。到目前为止，很少有人利用变分方法研究此类问题。本文基于变分方法和相应线性问题的最大值原理，研究问题(1)正解的存在性和多重性。

1　变分方法

定义空间

$$E = \{u = H^2(0,1) \mid u(0) = u'(1) = 0\}\ 。$$

其中：$H^2(0,1)$ 是 Sobolev 空间，显然，u 和 u' 是连续的，$u' \in L^2(0,1)$；E 是 Hilbert 空间，其内积和范数

收稿日期：2013-12-17

基金项目：山东省高等学校科研计划项目(J11LA07)

作者简介：武华华(1987—)，男，山东东营人，硕士研究生，主要从事应用数学方向的研究. E-mail：wu_invictus@163.com

为 $\langle u,v\rangle=\int_0^1 u''(x)v''(x)\mathrm{d}x$ ，$\|u\|_E=\|u''\|_2$ ，其中 $\|\cdot\|_2$ 表示为标准 L_2 范数。此外，E 在 $(0,1)$ 上是紧嵌入空间 $L^2(0,1)$ 的，因此存在一个常数 $\alpha>0$，使得

$$\|u\|_2\leqslant\alpha\|u\|_E\text{。}\tag{2}$$

接下来考虑泛函 $J:E\to\mathbf{R}$，定义为 $J(u)=\dfrac{1}{2}\int_0^1[u''(x)]^2\mathrm{d}x-\int_0^1 F(x,u(x))\mathrm{d}x$ ，其中：$F(x,u)=\int_0^u f(x,t)\mathrm{d}t$ ，由于 f 是连续的，得 J 是 C^1 的，则有

$$\langle J'(u),\varphi\rangle=\int_0^1 u''(x)\varphi''(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x,u(x))\varphi(x)\mathrm{d}x\text{ , }\forall u,\varphi\in E\text{。}$$

引理 1 $u\in E$ 是泛函 J 的临界点，当且仅当它是问题(1)的解。

证明：首先，证明其必要性。

$$\int_0^1 u''(x)\varphi''(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x,u(x))\varphi(x)\mathrm{d}x=u''(x)\varphi'(x)\Big|_0^1-\int_0^1 u'''(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x-$$
$$\int_0^1 f(x,u(x))\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_0^1[u^{(4)}(x)-f(x,u(x))]\varphi(x)\mathrm{d}x\text{ ,}$$

由问题(1)可以得到 $\int_0^1 u''(x)\varphi''(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x,u(x))\varphi(x)\mathrm{d}x=0$ ，因此，$u(x)$ 是泛函 $J(u)$ 的临界点。

其次，证明其充分性。

$$0=\langle J'(u),\varphi\rangle=\int_0^1 u''(x)\varphi''(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x,u(x))\varphi(x)\mathrm{d}x=$$
$$u''(1)\varphi'(1)-u''(0)\varphi'(0)-u'''(1)\varphi(1)+u'''(0)\varphi(0)+\int_0^1[u^{(4)}(x)-f(x,u(x))]\varphi(x)\mathrm{d}x\text{。}$$

基于 φ 的任意性，考虑如下三种情况：

①$\varphi\in\{\varphi\in H^2(0,1)\,|\,\varphi(0)=\varphi'(1)=\varphi'(0)=\varphi(1)=0\}$ ，$u^{(4)}=f(x,u(x))$ ；

②$\varphi\in\{\varphi\in H^2(0,1)\,|\,\varphi(1)=\varphi(0)=\varphi'(1)=0\}$ ，$u'''(1)=0$ ；

③$\varphi\in\{\varphi\in H^2(0,1)\,|\,\varphi(0)=\varphi(0)=\varphi'(1)=0\}$ ，$u''(0)=0$ 。

因此，如果 u 是 J 的临界点，则 $u(x)$ 是问题(1)的解。

泛函 J 满足 PS(Palais-Smale)条件是指若序列 $\{u_n\}$ 满足 $J(u_n)$ 有界且 $J'(u_n)\to 0$ ，则该序列有一个收敛子列。

引理 2(山路引理)[9] 若 E 是一个 Banach 空间，$J:E\to\mathbf{R}$ 是 C^1 泛函，满足 PS 条件且 $J(0)=0$ ，如果还满足：

① $\exists\rho,\gamma>0$ ，使得 $J(u)>\rho$ ，若 $\|u\|=\gamma$ ；

② $\exists e\in E$ ，使得 $\|e\|>\gamma$ 且 $J(e)\leqslant 0$ 。

则 J 有一个临界点 $u\in E$ 满足 $J(u)>\rho$ 。

引理 3[10] E 是 Banach 空间，$J:E\to\mathbf{R}$ 是 C^1 泛函，若存在一个球 $B=B(0,\mathbf{R})$ ，使得 $\inf\limits_B J<\inf\limits_{\partial B}J$ ，则存在一个序列 $\{u_n\}\in B$ ，使得

$$J(u_n)\to\inf_B J\text{ 和 }J'(u_n)\to 0\text{。}\tag{3}$$

特别地，如果满足 PS 条件，J 在 B 中有一个临界点。

2 正解的存在性和多解性

本节讨论问题(1)正解的存在性和多重性。

首先，给出问题(4)极值原理，即引理 4。

$$\begin{aligned}&u^{(4)}=f(x)\text{ , }0<x<1\text{ ;}\\&u(0)=u'(1)=u''(0)=u'''(1)=0\text{。}\end{aligned}\tag{4}$$

其中，f 是给定的连续函数。

引理 4 如果 $f \geqslant 0$，则问题(4)的任意解非负。即若 $u \neq 0$，则在区间 $(0,1)$ 上 $u > 0$。

证明：首先，由 $f \geqslant 0, 0 < x < 1$，得 $u(1) \geqslant 0$，接下来证明 $u \geqslant 0$，事实上，通过问题(1)可得 $u'' = 0$。然后，一旦由 $u(0) = 0$ 和 $u(1) > 0$ 推导出在 $(0,1)$ 中 $u \geqslant 0$，而且若 $u \neq 0$，则在区间$(0,1)$上 $u>0$。

定理 1 假如存在 $\lambda > 0$，使得

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(x,u)}{u} < \lambda \text{（关于 } x \text{ 一致成立）}, \tag{5}$$

存在 $\theta > 2$ 使得

$$0 < \theta F(x,u) \leqslant f(x,u)u,\ \forall u > 0, \forall x \in [0,1]。 \tag{6}$$

如果

$$1 - \lambda\alpha^2 > 0,\ \alpha > 0 \text{ 且在式(2)中有定义}, \tag{7}$$

则问题(1)有一个正解。

证明：J 满足山路引理(引理 2)的假设。

由空间 E 紧嵌入 $C^0[0,1]$ 可得，若 $\|u\|_2$ 充分小，则对于所有的 $x \in (0,1)$，$|u(x)|$ 也充分小，因此，由式(5)可得 $F(x,u) \leqslant \left(\frac{\lambda}{2}\right)u^2$。利用式(2)和(7)，得 $J(u) \geqslant \frac{1}{2}\|u\|_E^2 - \frac{\lambda}{2}\|u\|_2^2 \geqslant \frac{1}{2}(1-\lambda\alpha^2)\|u\|_E^2 \geqslant \rho > 0$，若 $\|u\|_E = \gamma$ 足够小，则引理 2 中假设①成立。

现在，注意到条件(6)，存在常数 $C_1, C_2 > 0$，使得对于所有的 $u > 0, x \in [0,1]$，有 $F(x,u) \geqslant C_1|u|^\theta - C_2$。由于 $u(x) \in E$，可以推出，$t > 0$ 且充分大时，

$$J(tx^2) = \frac{1}{2}\int_0^1 (tx^2)''^2 \mathrm{d}x - \int_0^1 F(x,tx^2)\mathrm{d}x = 2t^2 - \int_0^1 F(x,tx^2)\mathrm{d}x \leqslant 2t^2 - \frac{C_1}{2\theta+1}|t|^\theta + C_2 \leqslant 0,$$

因此，引理 2 中假设②也是成立的。

再检验是否满足 PS 条件。令 $\{u_n\}$ 是一个满足 $J(u_n)$ 有界且 $J'(u_n) \to 0$ 的序列，来证明 $\{u_n\}$ 有一个收敛子列，注意到 $|\langle J'(u_n), u_n\rangle| \leqslant C\|u\|_E$，$C$ 为常数，

$$2J(u_n) - \langle J'(u_n), u_n\rangle = \int_0^1 u''_n(x)^2\mathrm{d}x - 2\int_0^1 F(x,u_n(x))\mathrm{d}x - \int_0^1 u''_n(x)^2\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x,u_n(x))u_n(x)\mathrm{d}x =$$

$$-2\int_0^1 F(x,u_n(x))\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x,u_n(x))u_n(x)\mathrm{d}x \leqslant C + C\|u\|_E。$$

由(6)式得 $0 \leqslant (\theta-2)\int_0^1 \bar{F}(x,u_n)\mathrm{d}x \leqslant C + C\|u_n\|_E$，因此，从 $J(u_n)$ 的有界性，得

$$\frac{1}{2}\|u_n\|_2^2 \leqslant \int_0^1 F(x,u_n)\mathrm{d}x + C \leqslant C + C\|u_n\|_E。$$

由于 $\|u_n\|_E$ 有界，因此存在 $u \in E$，使得 $u_n \to u$ 在 E 中是弱收敛的，在 $L^2(0,1)$ 和 $C[0,1]$ 中是收敛的(紧嵌入)，则 $\int_0^1 f(x,u_n)(u_n - u)\mathrm{d}x \to 0$，结合 $\langle J'(u_n), u_n - u\rangle \to 0$，得 $\int_0^1 u''_n(u_n - u)\mathrm{d}x \to 0$，则 $u_n \to u$ 是强收敛的，因此 PS 条件成立。

根据山路引理可得，问题(1)有一个非零解 u，接下来证明如何得到一个正解，这是基于极值原理的标准讨论。由式(6)可得 $f > 0$，所以根据极值原理(引理 4)得 $u > 0$。

定理 2 假如 f 满足定理 1 的条件(5)和(6)，如果 $\lambda < 1/\alpha^2$，则存在 $k^* > 0$，使得在 $k \in (0,k^*)$ 时，问题(1)至少有两个正解。

证明：类似于定理 1 极值原理的应用，问题(1)的正解是泛函 $J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 u''(x)^2\mathrm{d}x - \int_0^1 F(x,u)\mathrm{d}x$ 的非零临界点，如果 $\|u\|_E$ 是小的，由条件(5)得 $J(u) \geqslant \frac{1}{2}(1-\lambda\alpha^2)\|u\|_E^2 \geqslant 0$，这表示在 $B = \bar{B}(0,r)$ 中 J 是有下界的。

另一方面，由于 $F>0$，t 充分小时有 $J(tx)\leqslant\frac{t^2}{2}-\frac{kt^{\gamma+1}}{\gamma+1}<0$，因此 $\min\limits_{B}J<0<\min\limits_{\partial B}J$。

应用证明定理1过程中的相同讨论，可证明PS条件也是成立的，应用局部极小引理可得 J 在球 $B(0,r)$ 里面有一个临界点，因此问题(1)有一个非零解 u_1 且满足 $J(u_1)<0$。

问题(1)的第二个解是由山路引理(引理2)给出的，并指出山路引理的条件①是满足的，且条件②在前文已根据条件(6)证明得到结论，J 有一个满足 $J(u^2)>0$ 的临界点 u^2，则表示问题(1)存在两个正解。

参考文献：

[1]Ma T F,Silva J. Iterative solutions for a beam equation with nonlinear boundary conditions of third order[J]. Applied Mathematics and Computation,2004,159(1):11-18.

[2]Weaver W,Timoshenko S P,Young D H. Vibrations problems in engineering[M]. 5th Ed. New York:John Wiley and Sons,1990:139-149.

[3]Grossinho M R,Ma T F. Symmetric equilibria for a beam with a nonlinear elastic foundation[J]. Portugaliae Mathematica,1994,51:375-393.

[4]Grossinho M R,Tersian S A. The dual variational principle and equilibria for a beam resting on a discontinuous nonlinear elastic foundation[J]. Nonlinear Analysis,2000,41:417-431.

[5]Amster P,Mariani M C. A fixed point operator for a nonlinear boundary value problem[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2002,266(1):160-168.

[6]Bai Z B. The method of lower and upper solutions for a bending of an elastic beam equation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2000,248(1):195-202.

[7]Bai Z B,Wang H Y. On positive solutions of some nonlinear fourth-order beam equations[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2002,270(2):357-368.

[8]Korman P. A maximum principle for fourth order ordinary differential equations[J]. Applicable Analysis,1989,33:267-273.

[9]Ma R Y,Zhang J H, Fu S M. The method of lower and upper solutions for fourth-order two-point boundary value problems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1997,215(2):415-422.

[10]Ekeland I. On the variational principle[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1974,47(2):324-353.

（责任编辑：吕文红）