一种求解单调变分不等式的下降型邻近点交替方向乘子法

王永丽，鹿　岩，贺国平
（山东科技大学 数学与系统科学学院，山东 青岛 266590）

摘　要：针对具有可分结构的单调变分不等式问题，基于邻近点算法和文献[12]提出的下降型算法构造了一个新的下降方向，并利用下降量的下界来选择最优步长，提出一种下降型邻近点交替方向乘子法；证明了算法的收敛性；并将该方法与文献[11]中算法的下降量下界进行比较，从理论上说明了算法的优越性。

关键词：变分不等式；可分离结构；交替方向乘子法；邻近点算法；下降方向

中图分类号：O221　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-3767(2014)05-0095-07

A Descent Proximal Alternating Direction Method of Multipliers for Monotone Variational Inequalities

Wang Yongli, Lu Yan, He Guoping
(College of Mathematics and Systems Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

Abstract: The problem of variational inequalities with separable structure was studied. A new descent direction was designed based on proximal point algorithm and decent algorithm by reference [12], and appropriate step size in light of lower bound of slippage was selected. A descent proximal alternating direction method of multipliers was presented. In addition, the convergence of the algorithm was proved. The new method was compared on the lower bound of slippage with the one by reference [11]. The result shows that the new one is superior in theoretical senses.

Key words: variational inequalities; separable structure; alternating direction method of multipliers; proximal point method; descent direction

变分不等式(variational inequalities, VI)问题是最优化理论的一个重要分支，在数学规划、网络经济模型、交通运输、控制论、决策论、图论等许多方面都有着重要应用，特别是近年来在经济学和交通运输平衡问题中[1-3]的应用也受到研究者的普遍关注，成为现代运筹学研究的热点之一。

具有可分结构的 VI 问题是一类重要的约束优化问题，交替方向乘子法(alternating direction method of multipliers, ADMM)是解决此类问题的有效方法之一，最初由 Gabay 等[4-5]于 20 世纪 70 年代中期提出。其主要思想是通过交替求解一系列子问题而得出原问题的解，实际上是一种分解方法。ADMM 也可以看成是在增广 Lagrange 算法[6-7]基础上扩展的一种新算法。与增广 Lagrange 算法相比，ADMM 的优势是显而易见的，它不仅可以充分利用目标函数的可分离性，将原问题分解为若干个更容易求解的子问题，而且更适用于求解大规模问题。

为提高 ADMM 求解 VI 子问题的效率，学者们提出了很多改进方法，如，基于不同罚参数选取的 ADMM 算法[8-9]，下降型 ADMM 算法[10-12]，非精确 ADMM 算法[13-14]等。其中，文献[10]的下降型 ADMM 算法，是由 ADMM 产生的迭代点列构造下降方向。文献[12]通过构造新的下降方向，提出改进的下降型

收稿日期：2014-03-19
基金项目：国家自然科学基金项目(10971122，11241005)；山东科技大学科技创新团队项目(2012KYTD105)
作者简介：王永丽(1977—)，女，山东栖霞人，副教授，博士，主要从事优化方法及理论方面的研究. E-mail：wangyongli@sdkd.net.cn

ADMM 算法，同文献[10]相比较，理论上证明了算法的优越性。2009 年，Yuan[11]在文献[10]的基础上增加邻近项，提出下降型邻近点交替方向乘子法，并通过数值试验证明了算法的有效性。

本研究结合文献[11]与[12]的优势，构造一个新的下降方向，对经典的 ADMM 算法进行改进，提出一种下降型邻近点交替方向乘子法，并证明算法的收敛性。

1 预备知识

考虑具有可分离结构的 VI 问题：求解向量 $\boldsymbol{u}^* \in \Omega$，使得

$$F(\boldsymbol{u}^*)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*) \geqslant 0, \forall \boldsymbol{u} \in \Omega 。 \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix}$，$F(\boldsymbol{u})=\begin{bmatrix}f(\boldsymbol{x})\\ g(\boldsymbol{y})\end{bmatrix}$，$\Omega=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x}\in X,\boldsymbol{y}\in Y,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}\}$，$X\subset \mathbf{R}^n$，$Y\subset \mathbf{R}^m$ 为非空闭凸集，$f:X\to\mathbf{R}^n$，$g:Y\to\mathbf{R}^m$ 为连续单调算子，$\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{r\times n}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{r\times m}$ 为列满秩矩阵，$\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^r$ 为给定向量。本文中假设 $r>m$ 且 VI 问题(1)的解集(记为 Ω^*)非空。

通过对约束条件 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$ 引入 Lagrange 乘子 $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{R}^r$，VI 问题(1)可变形为下列具有可分离结构的凸优化问题：求解向量 $\boldsymbol{\omega}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda})\in W:=X\times Y\times\mathbf{R}^r$，使得

$$\begin{cases}(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})\geqslant 0\\ (\boldsymbol{y}'-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}(g(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda})\geqslant 0\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}\end{cases},\forall \boldsymbol{\omega}'=(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}',\boldsymbol{\lambda}')\in W 。 \tag{2}$$

记问题(2)的解集为 W^*，则对于问题(1)的解 $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)\in\Omega^*$，存在 $\boldsymbol{\lambda}^*\in\mathbf{R}^r$，使得 $\boldsymbol{\omega}^*=(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)$ 是问题(2)的解。因此，只要问题(1)有解，则问题(2)也一定有解，即 W^* 非空。

若由 ADMM 来求解式(2)，则对于给定的 $\boldsymbol{\omega}^k=(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{\lambda}^k)\in W$，新的点列 $\boldsymbol{\omega}^{k+1}:=\tilde{\boldsymbol{\omega}}^k=(\tilde{\boldsymbol{x}}^k,\tilde{\boldsymbol{y}}^k,\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^k)$ 由下式迭代产生：

$$\begin{cases}(\boldsymbol{x}'-\tilde{\boldsymbol{x}}^k)^{\mathrm{T}}\{f(\tilde{\boldsymbol{x}}^k)-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\lambda}^k-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}^k+\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}^k-\boldsymbol{b})]\}\geqslant 0,\forall \boldsymbol{x}'\in X\\ (\boldsymbol{y}'-\tilde{\boldsymbol{y}}^k)^{\mathrm{T}}\{g(\tilde{\boldsymbol{y}}^k)-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\lambda}^k-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}^k+\boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{y}}^k-\boldsymbol{b})]\}\geqslant 0,\forall \boldsymbol{y}'\in Y\\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^k=\boldsymbol{\lambda}^k-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}^k+\boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{y}}^k-\boldsymbol{b})\end{cases} 。 \tag{3}$$

其中，对称正定矩阵 $\boldsymbol{H}\in\mathbf{R}^{r\times r}$ 可看作是线性约束条件 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$ 的罚参数。因此，VI 问题(1)的解由式(3)中低维变分不等式迭代得到。

由于 f 和 g 不是强单调算子，通常情况下求解式(3)中两个变分不等式是很困难的。因此，考虑利用邻近点算法[15-18](proximal point algorithm，PPA)的结构特点将式(3)转换为强单调变分不等式，使其易于求解。文献[19-21]提出了基于 PPA 算法的 ADMM(proximal alternating direction method of multipliers，PADMM)，其中，文献[20]中的迭代点列由下式生成：

$$\begin{cases}(\boldsymbol{x}'-\tilde{\boldsymbol{x}}^k)^{\mathrm{T}}\{f(\tilde{\boldsymbol{x}}^k)-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\lambda}^k-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}^k+\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}^k-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{x}}^k-\boldsymbol{x}^k)]\}\geqslant 0,\forall \boldsymbol{x}'\in X\\ (\boldsymbol{y}'-\tilde{\boldsymbol{y}}^k)^{\mathrm{T}}\{g(\tilde{\boldsymbol{y}}^k)-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\lambda}^k-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}^k+\boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{y}}^k-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{S}(\tilde{\boldsymbol{y}}^k-\boldsymbol{y}^k)]\}\geqslant 0,\forall \boldsymbol{y}'\in Y\\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^k=\boldsymbol{\lambda}^k-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}^k+\boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{y}}^k-\boldsymbol{b})\end{cases} 。 \tag{4}$$

其中，对称正定矩阵 $\boldsymbol{R}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{S}\in\mathbf{R}^{m\times m}$ 是邻近项参数。式(4)的变分不等式为强单调变分不等式，比式(3)易于求解。

2 新的下降型 PADMM 算法

2.1 下降方向的构造

本节中，结合文献[11]和[12]，首先构造出一个新的下降方向，并给出最优步长的选取方法，从而得出新的下降型 PADMM 算法。

设 $X\subset\mathbf{R}^n$，$Y\subset\mathbf{R}^m$ 为非空闭凸集，则 $W:=X\times Y\times\mathbf{R}^r\subset\mathbf{R}^{m+n+r}$ 也是非空闭凸集。记 $\boldsymbol{G}$ 是 $(m+n+r)\times(m+n+r)$ 正定矩阵，向量 $\boldsymbol{\omega}\in\mathbf{R}^{m+n+r}$ 的 $\boldsymbol{G}$ 模范数定义为：$\|\boldsymbol{\omega}\|_{\boldsymbol{G}}=\sqrt{\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{\omega}}$，$W$ 的 $\boldsymbol{G}$ 模投影记为

$P_{W,G}(\cdot)$，则

$$\boldsymbol{P}_{W,G}(\boldsymbol{\omega}') = \arg\min\{\ \|\boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{\omega}\|_G \mid \|\boldsymbol{\omega}\| \in W\}\ 。\tag{5}$$

由式(5)定义可得三个基本不等式[12]：

$$(\boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{P}_{W,G}(\boldsymbol{\omega}'))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\omega} - P_{W,G}(\boldsymbol{\omega}')) \leqslant 0, \forall \boldsymbol{\omega}' \in \mathbf{R}^{m+n+r}, \boldsymbol{\omega} \in W\ ;\tag{6.1}$$

$$\boldsymbol{P}_{W,G}(\boldsymbol{\omega}') - P_{W,G}(\boldsymbol{\omega})_G \leqslant \boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{\omega}_G, \forall \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}' \in \mathbf{R}^{m+n+r}\ ;\tag{6.2}$$

$$\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{P}_{W,G}(\boldsymbol{\omega}')_G^2 \leqslant \boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{\omega}_G^2 + \boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{P}_{W,G}(\boldsymbol{\omega}')_G^2, \forall \boldsymbol{\omega}' \in \mathbf{R}^{m+n+r}, \boldsymbol{\omega} \in W\ 。\tag{6.3}$$

本文中，令

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{H}^{-1} \end{bmatrix}_{(n+m+r)\times(n+m+r)},\tag{7}$$

由 $\boldsymbol{R}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 的对称正定性可知，$\boldsymbol{G}$ 是对称正定矩阵。

引理 1 给定迭代点 $\boldsymbol{\omega}^k = (\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{\lambda}^k)$，设新迭代点 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^k = (\tilde{\boldsymbol{x}}^k, \tilde{\boldsymbol{y}}^k, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^k)$ 由式(4)迭代得到，则对于任意 $\boldsymbol{\omega}^* = (\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \in W^*$，有

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{y}}^k - \boldsymbol{y}^* \\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^k - \boldsymbol{\lambda}^* \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} g(\tilde{\boldsymbol{y}}^k) - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^k \\ \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}^k + \boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{y}}^k - \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \geqslant (\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}^k - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}^k - \boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{y}}^k) + (\tilde{\boldsymbol{x}}^k - \boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{x}}^k - \boldsymbol{x}^k)\ 。\tag{8}$$

证明：由于 $\boldsymbol{\omega}^* \in W^*$，$\tilde{\boldsymbol{x}}^k \in X, \tilde{\boldsymbol{y}}^k \in Y$，由式(2)得

$$(\tilde{\boldsymbol{x}}^k - \boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}(f(\boldsymbol{x}^*) - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^*) \geqslant 0\ ,\tag{9}$$

$$(\tilde{\boldsymbol{y}}^k - \boldsymbol{y}^*)^{\mathrm{T}}(g(\boldsymbol{y}^*) - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^*) \geqslant 0\ ;\tag{10}$$

又由式(4)得

$$(\boldsymbol{x}' - \tilde{\boldsymbol{x}}^k)^{\mathrm{T}}\{f(\tilde{\boldsymbol{x}}^k) - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\lambda}^k - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}^k - \boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{y}}^k) + \boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{x}}^k - \boldsymbol{x}^k)]\} \geqslant 0\ ;\tag{11}$$

将式(9)与式(11)相加并利用 f 的单调性得

$$(\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}^k - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}[\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^k - \boldsymbol{\lambda}^* - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}^k - \boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{y}}^k)] - (\tilde{\boldsymbol{x}}^k - \boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{x}}^k - \boldsymbol{x}^k) \geqslant 0\ ,$$

即

$$(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^k - \boldsymbol{\lambda}^*)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}^k - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*) \geqslant (\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}^k - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}^k - \boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{y}}^k) + (\tilde{\boldsymbol{x}}^k - \boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{x}}^k - \boldsymbol{x}^k)\ ;\tag{12}$$

再将式(10)与式(12)相加得

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{y}}^k - \boldsymbol{y}^* \\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^k - \boldsymbol{\lambda}^* \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} g(\boldsymbol{y}^*) - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^* \\ \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}^k - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* \end{bmatrix} \geqslant (\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}^k - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}^k - \boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{y}}^k) + (\tilde{\boldsymbol{x}}^k - \boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{x}}^k - \boldsymbol{x}^k)\ ;\tag{13}$$

由 g 的单调性可得

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{y}}^k - \boldsymbol{y}^* \\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^k - \boldsymbol{\lambda}^* \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} g(\tilde{\boldsymbol{y}}^k) - g(\boldsymbol{y}^*) - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^k - \boldsymbol{\lambda}^*) \\ \boldsymbol{B}(\tilde{\boldsymbol{y}}^k - \boldsymbol{y}^*) \end{bmatrix} = (\tilde{\boldsymbol{y}}^k - \boldsymbol{y}^*)^{\mathrm{T}}(g(\tilde{\boldsymbol{y}}^k) - g(\boldsymbol{y}^*)) \geqslant 0\ 。\tag{14}$$

将式(13)与式(14)相加，并利用 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{b}$ 即可得到式(8)。

引理 2 给定迭代点 $\boldsymbol{\omega}^k = (\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{\lambda}^k)$，设新迭代点 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^k = (\tilde{\boldsymbol{x}}^k, \tilde{\boldsymbol{y}}^k, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^k)$ 由式(4)得到，则对于任意 $\boldsymbol{\omega}^* = (\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \in W^*$，有

$$(\boldsymbol{\omega}^k - \boldsymbol{\omega}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\omega}^k, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^k) \geqslant \varphi(\boldsymbol{\omega}^k, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^k)\ 。\tag{15}$$

其中，

$$\varphi(\boldsymbol{\omega}^k, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^k) = \|\boldsymbol{\omega}^k - \boldsymbol{\omega}^*\|_G^2 + (\boldsymbol{\lambda}^k - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}^k - \boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{y}}^k)\ ;\tag{16}$$

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\omega}^k, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^k) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\omega}^k - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^k) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ g(\tilde{\boldsymbol{y}}^k) - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\tilde{\lambda}^k - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{y}^k - \tilde{\boldsymbol{y}}^k) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\ 。\tag{17}$$

证明：式(8)可变形为

$$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}}^k - \boldsymbol{x}^* \\ \tilde{\boldsymbol{y}}^k - \boldsymbol{y}^* \\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^k - \boldsymbol{\lambda}^* \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{x}}^k - \boldsymbol{x}^k) \\ g(\tilde{\boldsymbol{y}}^k) - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^k \\ \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{y}}^k + \boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{y}}^k - \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \geqslant (\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}^k - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}^k - \boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{y}}^k)\ 。\tag{18}$$

式(18)两边同时加 $(\tilde{\boldsymbol{y}}^k - \boldsymbol{y}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y}^k - \tilde{\boldsymbol{y}}^k)$，由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{b}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^k = \boldsymbol{\lambda}^k - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}^k + \boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{y}}^k - \boldsymbol{b})$ 可得

$$\begin{bmatrix}\tilde{x}^k - x^* \\ \tilde{y}^k - y^* \\ \tilde{\lambda}^k - \lambda^*\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}R(\tilde{x}^k - x^k) \\ B^{\mathrm{T}}HB(y^k - \tilde{y}^k) + g(\tilde{y}^k) - B^{\mathrm{T}}\tilde{\lambda}^k \\ H^{-1}(\lambda^k - \tilde{\lambda}^k)\end{bmatrix} \geqslant (\lambda^k - \tilde{\lambda}^k)^{\mathrm{T}}(By^k - B\tilde{y}^k)\text{。} \tag{19}$$

由式(17) $q(\omega^k,\tilde{\omega}^k)$ 的定义,式(19)等价于 $(\tilde{\omega}^k - \omega^*)^{\mathrm{T}}q(\omega^k,\tilde{\omega}^k) \geqslant (\lambda^k - \tilde{\lambda}^k)^{\mathrm{T}}(By^k - B\tilde{y}^k)$,即

$$(\omega^k - \omega^*)^{\mathrm{T}}q(\omega^k,\tilde{\omega}^k) \geqslant (\omega^k - \tilde{\omega}^k)^{\mathrm{T}}q(\omega^k,\tilde{\omega}^k) + (\lambda^k - \tilde{\lambda}^k)^{\mathrm{T}}(By^k - B\tilde{y}^k)\text{。} \tag{20}$$

对 $\omega^k \in W$,由式(4)得

$$(y' - \tilde{y}^k)^{\mathrm{T}}[g(\tilde{y}^k) - B^{\mathrm{T}}\tilde{\lambda}^k - S(\tilde{y}^k - y^k)] \geqslant 0\text{;} \tag{21}$$

由式(21)和式(17)得

$$(\omega^k - \tilde{\omega}^k)^{\mathrm{T}}q(\omega^k,\tilde{\omega}^k) \geqslant (\omega^k - \tilde{\omega}^k)^{\mathrm{T}}G(\omega^k - \tilde{\omega}^k) = \| \omega^k - \tilde{\omega}^k \|_G^2\text{;} \tag{22}$$

再由式(16)、式(20)、式(22)即可得式(15)。

由引理 2 可得

$$\langle G(\omega^k - \omega^*), -G^{-1}q(\omega^k,\tilde{\omega}^k)\rangle \leqslant -\varphi(\omega^k,\tilde{\omega}^k)\text{。} \tag{23}$$

式(23)表明 $-G^{-1}q(\omega^k,\tilde{\omega}^k)$ 是 $\|\omega - \omega^*\|_G^2$ 在点 $\omega = \omega^k$ 的一个下降方向。选择下降步长为 α,记 $\omega^{k+1}(\alpha) = P_{W,G}[\omega^k - \alpha G^{-1}q(\omega^k,\tilde{\omega}^k)]$,$\bar{\omega}^{k+1}(\alpha) = \omega^k - \alpha G^{-1}q(\omega^k,\tilde{\omega}^k)$,且

$\theta^k(\alpha) = \|\omega^k - \omega^*\|_G^2 - \theta^k(\alpha) = \|\omega^k - \omega^*\|_G^2 - \|\omega^{k+1}(\alpha) - \omega^*\|_G^2$,则 $\theta^k(\alpha)$ 可以看作 $\omega^{k+1}(\alpha)$ 的下降程度。定理 1 从 $\theta^k(\alpha)$ 的下界出发来求解最优步长 α_k^*。

定理 1 给定迭代点 $\omega^k = (x^k, y^k, \lambda^k)$,设新迭代点 $\tilde{\omega}^k = (\tilde{x}^k, \tilde{x}^k, \tilde{\lambda}^k)$ 由式(4)迭代得到,令 $\psi^k(\alpha) = 2\alpha\varphi(\omega^k,\tilde{\omega}^k) - \alpha^2\|\omega^k - \tilde{\omega}^k\|_G^2$,则对于任意 $\omega^* = (x^*, y^*, \lambda^*) \in W^*$,$\alpha \geqslant 0$,有:

$$\theta^k(\alpha) \geqslant \Phi^k(\alpha) = \psi^k(\alpha) + \|\bar{\omega}^{k+1}(\alpha) - \omega^{k+1}(\alpha)\|_G^2\text{。} \tag{24}$$

证明:由于 $\omega^{k+1}(\alpha) = P_{W,G}[\omega^k - \alpha G^{-1}q(\omega^k,\tilde{\omega}^k)]$,对任意 $\omega^* \in W^*$,由式(6.1)得

$$\|\omega^{k+1}(\alpha) - \omega^*\|_G^2 \leqslant \|\omega^k - \alpha G^{-1}q(\omega^k,\tilde{\omega}^k) - \omega^*\|_G^2 - \|\omega^k - \alpha G^{-1}q(\omega^k,\tilde{\omega}^k) - \omega^{k+1}(\alpha)\|_G^2\text{;}$$

由 $\theta^k(\alpha)$ 得

$$\begin{aligned}\theta^k(\alpha) \geqslant{}& \|\omega^k - \omega^*\|_G^2 - \|\omega^k - \alpha G^{-1}q(\omega^k,\tilde{\omega}^k) - \omega^*\|_G^2 + \|\omega^k - \alpha G^{-1}q(\omega^k,\tilde{\omega}^k) - \omega^{k+1}(\alpha)\|_G^2 = \\ & \|\omega^k - \omega^{k+1}\|_G^2 + 2\alpha(\omega^k - \omega^*)^{\mathrm{T}}q(\omega^k,\tilde{\omega}^k) + 2\alpha(\omega^{k+1}(\alpha) - \omega^k)^{\mathrm{T}}q(\omega^k,\tilde{\omega}^k)\text{;}\end{aligned} \tag{25}$$

又由式(20)得

$$\begin{aligned}\theta^k(\alpha) \geqslant{}& \|\omega^k - \omega^{k+1}\|_G^2 + 2\alpha(\omega^k - \tilde{\omega}^k)^{\mathrm{T}}q(\omega^k,\tilde{\omega}^k) + 2\alpha(\lambda^k - \tilde{\lambda}^k)^{\mathrm{T}}(By^k - B\tilde{y}^k) + \\ & 2\alpha(\omega^{k+1}(\alpha) - \omega^k)^{\mathrm{T}}q(\omega^k,\tilde{\omega}^k) = \\ & \|\omega^k - \omega^{k+1}\|_G^2 + 2\alpha(\omega^{k+1}(\alpha) - \tilde{\omega}^k)^{\mathrm{T}}q(\omega^k,\tilde{\omega}^k) + 2\alpha(\lambda^k - \tilde{\lambda}^k)^{\mathrm{T}}(By^k - B\tilde{y}^k)\text{;}\end{aligned} \tag{26}$$

再由 $y^{k+1}(\alpha) \in Y$ 得 $(y^k - \tilde{y}^k)^{\mathrm{T}}[g(\tilde{y}^k) - B^{\mathrm{T}}\tilde{\lambda}^k - S(y^k - \tilde{y}^k)] \geqslant 0$,因此,

$$2\alpha\begin{bmatrix}x^{k+1}(\alpha) - \tilde{x}^k \\ y^{k+1}(\alpha) - \tilde{y}^k \\ \lambda^{k+1}(\alpha) - \tilde{\lambda}^k\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0 \\ -g(\tilde{y}^k) + B^{\mathrm{T}}\tilde{\lambda}^k + S(y^k - \tilde{y}^k) \\ 0\end{bmatrix} \leqslant 0\text{。} \tag{27}$$

根据式(17)中 $q(\omega^k,\tilde{\omega}^k)$ 的定义得

$$\begin{bmatrix}x^{k+1}(\alpha) - \tilde{x}^k \\ y^{k+1}(\alpha) - \tilde{y}^k \\ \lambda^{k+1}(\alpha) - \tilde{\lambda}^k\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0 \\ -g(\tilde{y}^k) + B^{\mathrm{T}}\tilde{\lambda}^k + S(y^k - \tilde{y}^k) \\ 0\end{bmatrix} = (\omega^{k+1}(\alpha) - \omega^k)^{\mathrm{T}}[G(\omega^k - \tilde{\omega}^k) - q(\omega^k,\tilde{\omega}^k)]\text{;} \tag{28}$$

将式(26)与(27)相加,并利用式(28)可得:

$$\theta^k(\alpha) \geqslant \|\omega^k - \omega^{k+1}(\alpha)\|_G^2 + 2\alpha(\omega^{k+1}(\alpha) - \tilde{\omega}^k)^{\mathrm{T}}G(\omega^k - \tilde{\omega}^k) + 2\alpha(\lambda^k - \tilde{\lambda}^k)^{\mathrm{T}}(By^k - B\tilde{y}^k)\text{。} \tag{29}$$

再利用式(16) $\varphi(\omega^k,\tilde{\omega}^k)$的定义,式(29)可简化为

$$\theta^k(\alpha) \geqslant \|\omega^k - \omega^{k+1}(\alpha)\|_G^2 + 2\alpha(\omega^{k+1}(\alpha) - \omega^k)^{\mathrm{T}}G(\omega^k - \tilde{\omega}^k) + 2\alpha\varphi(\omega^k,\tilde{\omega}^k)\text{。} \tag{30}$$

根据 $\bar{\omega}^{k+1}(\alpha)$ 和 $\theta^k(\alpha)$ 定义,式(30)转化为

$$\theta^k(\alpha) \geqslant \|\omega^k - \omega^{k+1}(\alpha) - \alpha(\omega^k - \tilde{\omega}^k)\|_G^2 + 2\alpha\varphi(\omega^k,\tilde{\omega}^k) - \alpha^2\|\omega^k - \tilde{\omega}^k\|_G^2 =$$

$$\| \boldsymbol{\omega}^k - \alpha(\boldsymbol{\omega}^k - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^k) - \boldsymbol{\omega}^{k+1}(\alpha) \|_G^2 + \boldsymbol{\psi}^k(\alpha) = \| \bar{\boldsymbol{\omega}}^{k+1}(\alpha) - \boldsymbol{\omega}^{k+1}(\alpha) \|_G^2 + \boldsymbol{\psi}^k(\alpha) 。$$

即定理 1 得证。

由定理 1 可知，$\boldsymbol{\Phi}^k(\alpha)$ 是 $\boldsymbol{\theta}^k(\alpha)$ 的一个下界，而 $\boldsymbol{\Phi}^k(\alpha) \geqslant \boldsymbol{\psi}^k(\alpha)$，参照 $\boldsymbol{\psi}^k(\alpha)$ 也是 $\boldsymbol{\theta}^k(\alpha)$ 的一个下界，并且最大化 $\boldsymbol{\psi}^k(\alpha)$ 能够加快该算法的收敛性。由 $\boldsymbol{\psi}^k(\alpha)$ 定义可知，它是一个关于 α 的二次函数，其最大值在 $\alpha_k^* = \dfrac{\varphi(\boldsymbol{\omega}^k, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^k)}{\| \boldsymbol{\omega}^k - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^k \|_G^2}$ 处达到，此时，$\boldsymbol{\psi}^k(\alpha_k^*) = \alpha_k^* \varphi(\boldsymbol{\omega}^k, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^k)$。

为了加快收敛速度，通常在 α_k^* 前增加一个松弛因子 γ，即 $\gamma\alpha_k^*$，其中 $\gamma \in (0,2)$，下降方向为 $-\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\omega}^k, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^k)$，最优步长为 $\gamma\alpha_k^*$，由此得到新的下降型 PADMM 算法。

2.2 下降型 PADMM 算法

Step 0 给定 $\boldsymbol{\varepsilon} > 0$，$\boldsymbol{\omega}^0 = (\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) \in W$，令 $k = 0$。

Step 1 由 PADMM 算法(式(4))产生迭代序列 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^k = (\tilde{\boldsymbol{x}}^k, \tilde{\boldsymbol{y}}^k, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^k)$。

Step 2 如果 $\| \boldsymbol{\omega}^k - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^k \|_\infty < \varepsilon$，算法停止；否则，转 Step 3。

Step 3 计算新的下降序列

$$\boldsymbol{\omega}^{k+1} = \boldsymbol{P}_{W,G}[\boldsymbol{\omega}^k - \gamma\alpha_k^* \boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{\omega}^k, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^k)], \tag{31}$$

令 $k = k+1$，转 Step 1。

注 1 当 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{S} = \boldsymbol{0}$ 时，该算法转化为文献[18]中改进的收缩算法。

注 2 $\gamma \in (0,2)$ 将在下面的收敛性证明中给出。

3 收敛性分析

定理 2 给定迭代点 $\boldsymbol{\omega}^k = (\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{\lambda}^k)$，设 $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^k = (\tilde{\boldsymbol{x}}^k, \tilde{\boldsymbol{y}}^k, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^k)$ 由式(4)迭代产生，下降序列 $\boldsymbol{\omega}^{k+1}$ 由式(31)得到，则存在 $\gamma \in (0,2)$，对任意 $\boldsymbol{\omega}^* = (\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \in W^*$，有

$$\| \boldsymbol{\omega}^{k+1} - \boldsymbol{\omega}^* \|_G^2 \leqslant \| \boldsymbol{\omega}^k - \boldsymbol{\omega}^* \|_G^2 - \frac{\gamma(2-\gamma)}{4} \| \boldsymbol{\omega}^k - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^k \|_G^2, \tag{32}$$

$$\lim_{k\to\infty} \| \boldsymbol{\omega}^k - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^k \|_G^2 = 0 。\tag{33}$$

证明：由 $\boldsymbol{\psi}^k(\alpha)$ 和 α_k^* 定义得

$\boldsymbol{\psi}^k(\gamma\alpha_k^*) = 2\gamma\alpha_k^* \varphi(\boldsymbol{\omega}^k, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^k) - (\gamma^2\alpha_k^*)\alpha_k^* \| \boldsymbol{\omega}^k - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^k \|_G^2 = \gamma(2-\gamma)\alpha_k^* \varphi(\boldsymbol{\omega}^k, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^k)$，由定理 1 知，$\| \boldsymbol{\omega}^k - \boldsymbol{\omega}^* \|_G^2 - \| \boldsymbol{\omega}^{k+1} - \boldsymbol{\omega}^* \|_G^2 \geqslant \boldsymbol{\psi}^k(\gamma\alpha_k^*)$。因此，

$$\| \boldsymbol{\omega}^{k+1} - \boldsymbol{\omega}^* \|_G^2 \leqslant \| \boldsymbol{\omega}^k - \boldsymbol{\omega}^* \|_G^2 - \gamma(2-\gamma)\alpha_k^* \varphi(\boldsymbol{\omega}^k, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^k)。$$

由 α_k^* 定义知 $\alpha_k^* \geqslant \dfrac{1}{2}$，再结合 $\varphi(\boldsymbol{\omega}^k, \tilde{\boldsymbol{\omega}}^k)$ 的定义可得式(32)，式(33)可由式(32)直接得到。

为了加速收敛，定理 2 从理论上说明了 $\gamma \in (0,2)$。此外，序列 $\{ \| \boldsymbol{\omega}^k - \boldsymbol{\omega}^* \|_G \}$ 是非增加的。

定理 3 由新下降型 PADMM 算法产生的迭代点列 $\{\boldsymbol{\omega}^k\}$ 收敛到 $\boldsymbol{\omega}^\infty \in W^*$。

证明：由定理 2 知，$\{\boldsymbol{\omega}^k\}$ 有界并且 $\lim\limits_{k\to\infty} \| \boldsymbol{\omega}^k - \tilde{\boldsymbol{\omega}}^k \|_G^2 = 0$，于是有：

$$\lim_{k\to\infty} \| \boldsymbol{x}^k - \tilde{\boldsymbol{x}}^k \|_G^2 = 0, \lim_{k\to\infty} \| \boldsymbol{y}^k - \tilde{\boldsymbol{y}}^k \|_G^2 = 0 ; \tag{34}$$

并且

$$\lim_{k\to\infty} \| \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}^k + \boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{y}}^k - \boldsymbol{b} \|_G^2 = \lim_{k\to\infty} \| \boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{\lambda}^k - \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^k) \|_G^2 = 0 。\tag{35}$$

由式(4)、式(34)、式(35)得

$$\lim_{k\to\infty} (\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}^k)^{\mathrm{T}} [f(\tilde{\boldsymbol{x}}^k) - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^k] \geqslant 0, \forall \boldsymbol{x} \in X; \tag{36}$$

$$\lim_{k\to\infty} (\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{y}}^k)^{\mathrm{T}} [g(\tilde{\boldsymbol{y}}^k) - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\tilde{\lambda}^k] \geqslant 0, \forall \boldsymbol{y} \in Y。\tag{37}$$

由于 $\{\boldsymbol{\omega}^k\}$ 有界，则该序列至少存在一个聚点，记 $\boldsymbol{\omega}^\infty$ 是序列 $\{\boldsymbol{\omega}^k\}$ 的一个聚点且存在一个子序列 $\{\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{k_j}\}$ 收敛到 $\boldsymbol{\omega}^\infty$。由式(35)～(37)可得

$$\lim_{j\to\infty} (\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}^{k_j})^{\mathrm{T}} [f(\tilde{\boldsymbol{x}}^{k_j}) - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{k_j}] \geqslant 0, \forall \boldsymbol{x} \in X;$$

$$\lim_{j\to\infty} (\boldsymbol{y} - \tilde{\boldsymbol{y}}^{k_j})^{\mathrm{T}} [g(\tilde{\boldsymbol{y}}^{k_j}) - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{k_j}] \geqslant 0, \forall \boldsymbol{y} \in Y;$$

$$\lim_{j\to\infty}(\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}^{k_j}+\boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{y}}^{k_j}-\boldsymbol{b})=0\ 。\tag{38}$$

由极限定义,式(38)可化为

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{\infty})^{\mathrm{T}}(f(\boldsymbol{x}^{\infty})-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^{\infty})\geqslant 0,\forall\,\boldsymbol{x}\in X;\\&(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}^{\infty})^{\mathrm{T}}(g(\boldsymbol{y}^{\infty})-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}^{\infty})\geqslant 0,\forall\,\boldsymbol{y}\in Y;\\&\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{\infty}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}^{\infty}-\boldsymbol{b}=0\ 。\end{aligned}\tag{39}$$

式(39)表明 $\boldsymbol{\omega}^{\infty}\in W^{*}$ 。因为 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{\omega}^{k}-\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{k}\|_{G}^{2}=0$ 且 $\{\tilde{\boldsymbol{\omega}}\}^{k_j}\to\boldsymbol{\omega}^{\infty}$,因此,对任意 $\varepsilon>0$,存在正整数 l ,使得

$$\|\boldsymbol{\omega}^{k_l}-\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{k_l}\|_{G}<\frac{\varepsilon}{2}\ \text{且}\ \|\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{k_l}-\boldsymbol{\omega}^{\infty}\|_{G}<\frac{\varepsilon}{2}\ 。\tag{40}$$

于是,对任意 $k\geqslant k_l$,因为序列 $\{\|\boldsymbol{\omega}^{k}-\boldsymbol{\omega}^{*}\|_{G}\}$ 是非增加的,根据式(40)可得

$$\|\boldsymbol{\omega}^{k}-\boldsymbol{\omega}^{\infty}\|_{G}\leqslant\|\boldsymbol{\omega}^{k_l}-\boldsymbol{\omega}^{\infty}\|_{G}\leqslant\|\boldsymbol{\omega}^{k_l}-\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{k_l}\|_{G}+\|\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{k_l}-\boldsymbol{\omega}^{\infty}\|_{G}<\varepsilon\ ,$$

因此,点列 $\{\boldsymbol{\omega}^{k}\}$ 收敛到 $\boldsymbol{\omega}^{\infty}\in W^{*}$ 。

4 算法比较

将本文提出的下降型 PADMM 算法与文献[11]中改进的 PADMM 算法进行比较[22]:文献[11]改进的算法中,下降程度为 $\boldsymbol{\Theta}^{k}(\alpha)=\|\boldsymbol{\omega}^{k}-\boldsymbol{\omega}^{*}\|_{G}^{2}-\|\boldsymbol{\omega}^{k}-\alpha(\boldsymbol{\omega}^{k}-\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{k})-\boldsymbol{\omega}^{*}\|_{G}^{2}$,且 $\boldsymbol{\Theta}^{k}(\alpha)\geqslant\boldsymbol{\psi}^{k}(\alpha)$,表明 $\boldsymbol{\psi}^{k}(\alpha)$ 是 $\boldsymbol{\Theta}^{k}(\alpha)$ 的一个下界;本文提出的下降型 PADMM 算法中, $\boldsymbol{\theta}^{k}(\alpha)=\|\boldsymbol{\omega}^{k}-\boldsymbol{\omega}^{*}\|_{G}^{2}-\|\boldsymbol{\omega}^{k+1}(\alpha)-\boldsymbol{\omega}^{*}\|_{G}^{2}$,且 $\boldsymbol{\theta}^{k}(\alpha)\geqslant\boldsymbol{\Phi}^{k}(\alpha)=\boldsymbol{\psi}^{k}(\alpha)+\|\bar{\boldsymbol{\omega}}^{k+1}(\alpha)-\boldsymbol{\omega}^{k+1}(\alpha)\|_{G}^{2}$ 。

显然, $\boldsymbol{\theta}^{k}(\alpha)$ 的下界为 $\boldsymbol{\Phi}^{k}(\alpha)$,并且 $\boldsymbol{\Phi}^{k}(\alpha)\geqslant\boldsymbol{\psi}^{k}(\alpha)$ 。因此,理论上,本研究提出的下降型 PADMM 算法比文献[11]中改进的 PADMM 算法更具有优越性。

参考文献:

[1]Dafermos S. Traffic equilibrium and variational inequalities[J]. Transportation Science,1980,14(1):42-54.

[2]Nagurney A,Ramanujam P. Transportation network policy modeling with goal targets and generalized penalty functions[J]. Transportation Science,1996,30(1):3-13.

[3]Nagurney A,Thore S,Pan J. Spatial market policy modeling with goal targets[J]. Operations Research,1996,44(2):393-406.

[4]Gabay D,Mercier B. A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximation[J]. Computers and Mathematics with Applications,1976,2(1):17-40.

[5]Gabay D. Applications of the method of multipliers to variational inequalities[J]. Studies in Mathematics and Its Applications,1983,15:299-331.

[6]Fortin M,Glowinski R. Augmented Lagrangian methods:Applications to the numerical solution of boundary-value problems[M]. Amsterdam:Elsevier,2000:18-42.

[7]Tahk M J,Sun B C. Coevolutionary augmented Lagrangian methods for constrained optimization[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation,2000,4(2):114-124.

[8]He B S,Yang H. Some convergence properties of a method of multipliers for linearly constrained monotone variational inequalities[J]. Operations Research Letters,1998,23(3):151-161.

[9]Kontogiorgis S,Meyer R R. A variable-penalty alternating directions method for convex optimization[J]. Mathematical Programming,1998,83(1-3):29-53.

[10]Ye C H,Yuan X M. A descent method for structured monotone variational inequalities[J]. Optimization Methods and Software,2007,22(2):329-338.

[11]Yuan X. An improved proximal alternating direction method for monotone variational inequalities with separable structure[J]. Computational Optimization and Applications,2011,49(1):17-29.

[12]He B S,Li M,Liao L Z. An improved contraction method for structured monotone variational inequalities [J]. Optimization,2008,57(5):643-653.

[13]Eckstein J,Bertsekas D P. On the Douglas-Rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators[J]. Mathematical Programming,1992,55(1-3):293-318.

[14]Chen G,Teboulle M. A proximal-based decomposition method for convex minimization problems[J]. Mathematical Pro-

gramming,1994,64(1-3):81-101.
[15]Hager W W,Zhang H. Self-adaptive inexact proximal point methods[J]. Computational Optimization and Applications, 2008,39(2):161-181.
[16]Rockafellar R T. Monotone operators and the proximal point algorithm[J]. Society for Industrial and Applied Mathema-tics Journal on Control and Optimization,1976,14(5):877-898.
[17]Rockafellar R T. Augmented Lagrangians and applications of the proximal point algorithm in convex programming[J]. Mathematics of Operations Research,1976,1(2):97-116.
[18]Teboulle M. Convergence of proximal-like algorithms[J]. Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Optimization,1997,7(4):1069-1083.
[19]Tseng P. Alternating projection-proximal methods for convex programming and variational inequalities[J]. Society for Industrial and Applied Mathematics Journal on Optimization,1997,7(4):951-965.
[20]He B S,Liao L Z,Han D,et al. A new inexact alternating directions method for monotone variational inequalities[J]. Mathematical Programming,2002,92(1):103-118.
[21]Xu M H. Proximal alternating directions method for structured variational inequalities[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2007,134(1):107-117.
[22]He B S,Yuan X,Zhang J J Z. Comparison of two kinds of prediction-correction methods for monotone variational inequalities[J]. Computational Optimization and Applications,2004,27(3):247-267.

(责任编辑:吕文红)

“多机器人系统分布式协同控制”专栏征稿

机器人在民用及工业生产中得到广泛的应用,是一类典型的非线性系统。过去 20 年,单个机器人控制及应用取得了极大成功。随着应用领域的拓展,医疗服务、军事和制造业等领域中多个机器人协同情况逐渐增多。多机器人协同不仅能够增强机器人系统的灵活性,而且能够完成单个机器人无法完成的任务。分布式协同控制能够通过网络,充分利用子系统信息,是解决多机器人系统协同的有效方法。近年来,复杂网络和多智能体的研究成为控制界的热点问题,取得了丰硕的研究成果,给多机器人系统分布式协同控制带来很多有益的启迪。本专栏正是在这种背景下,探索多机器人分布式协同控制的新方法和新思想,围绕以下内容,但不限于这些内容:

◇多机器人同步控制
◇基于复杂网络的多机器人一致控制
◇多 Euler-Lagrangian 系统一致性研究
◇存在运动学不确定性的多机器人协同控制
◇有限时间多机器人协同控制
◇基于状态观测器的多机器人协同控制
◇多机器人力同步控制
◇多机器人分布式协同控制新方法与新应用

专栏稿件无需任何出版费用,欢迎相关领域专家、学者和工程技术人员踊跃投稿。作者请于 2014 年 12 月 30 日前将稿件通过 http://xuebao. sdust. edu. cn/提交至学报稿件处理系统,并在备注中注明**“多机器人系统分布式协同控制”**专栏投稿。

专栏特约编辑:赵东亚

联系电话:13698651078

电子邮箱:dongyazhao@gmail. com;dyzhao@upc. edu. cn

山东科技大学学报(自然科学版) 编辑部