

# 基于宏观实验数据的堆石料细观本构模型参数反演

李守巨,李 德,于 申

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室,辽宁 大连 116024)

**摘 要:**如何精确估计岩石材料细观本构模型参数是制约离散元方法发展与应用的瓶颈之一。提出基于响应面法的堆石料细观本构模型参数反演方法。建立一种用于岩石细观本构模型参数反演的响应面函数形式,在宏观实验数据与细观模型参数之间建立桥梁,实现岩石试样变形与模型参数之间关系的高精度非线性映射。基于堆石料试样的宏观实验数据和响应面函数模型,将模型参数反演问题转化为优化问题处理,反演确定岩石材料细观本构模型参数。结果表明:堆石料细观本构模型参数,包括法向接触刚度、切向接触刚度及摩擦系数,随围压增加而稍有增加;材料的法向接触刚度与切向接触刚度近似相等。反演分析预测的偏应力-轴向应变曲线与试验曲线吻合较好,实验验证了所提出反演方法的有效性。

**关键词:**参数反演;颗粒流;离散元法;响应面方法;优化算法;堆石料;本构模型

中图分类号:TU 443

文献标志码:A

文章编号:1672-3767(2015)05-0020-07

## Meso-parameter Inversion of Constitutive Model for Rockfill Materials Based on Macro Experimental Data

Li Shouju, Li De, Yu Shen

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology,  
Dalian, Liaoning 116024, China)

**Abstract:** How to precisely determine the meso-parameters of constitutive model for rock materials has become a key problem affecting the development and practical applications of discrete element methods. This paper proposed a meso-parameter inversion method of constitutive model for rockfill materials based on response surface methodology. The response surface function was set up to achieve the high precision nonlinear mapping between the deformation data of rock specimen and the meso-parameters of constitutive model for rock materials by bridging the macro experimental data and the model meso-parameters. Based on the macro experimental data and the response surface function model, the meso-parameters of constitutive model for rockfill materials were determined by turning the inversion into optimization algorithm. The results show that the meso-parameters of constitutive model for rockfill materials, including normal contact stiffness, tangent contact stiffness and friction coefficient, increase slightly as the confining pressure rises, and that the normal contact stiffness and the tangent contact stiffness are approximately the same. With a good agreement between the predicted and experimental deviatoric stress-axial strain curves, the effectiveness of the proposed inversion method is validated by experimental data.

**Key words:** parameter inversion; particle flow code; discrete element method; response surface methodology; optimization algorithm; rockfill materials; constitutive model

堆石料因具有透水性强、压实性能好、抗剪强度高、沉降变形小、易破碎等工程特性而被广泛用于堆石坝、挡土墙、铁路路基、海岸护坡、建筑物基础和各种填方工程中,故关于堆石料力学特性的研究显得十分重要。近年来,离散元法以其独特的优势在岩土力学中受到广泛的应用,其基本思想是把整个介质视为由一系

收稿日期:2015-06-24

基金项目:国家重点基础研究发展计划(“973”计划)项目(2015CB057804);国家自然科学基金项目(51105048,51209028);工业装备结构分析国家重点实验室开放基金项目(S14206)

作者简介:李守巨(1960—),男,辽宁辽中人,教授,博士,主要从事岩石力学与参数反演研究。E-mail:lishouju@dlut.edu.cn

列离散的颗粒(单元)组成,以牛顿运动定律与力-位移定律为依据,对问题进行力学分析,PFC(particle flow code)则是在其基础上开发的颗粒流离散元程序。目前,离散单元法已成功应用于巷道支护、边坡工程、地下隧洞开挖、动载稳定性问题等岩土工程领域<sup>[1]</sup>。使用离散单元法对岩土材料进行颗粒流模拟的研究方兴未艾。黄冬梅等<sup>[2]</sup>运用扫描电镜拍摄了岩石破坏断口裂纹的细观结构图像,综合应用图像分析技术和分形几何理论,编制了 Matlab 程序,计算出细观结构图像的分形维数,并简要分析了大理岩细观结构具有的分形特征。周建等<sup>[3]</sup>使用 PFC 程序对砂性土坡和黏性土坡的破坏过程分别进行了数值模拟,研究了土性对边坡破坏形式的影响。张翀等<sup>[4]</sup>采用二维离散单元法建立了四种不同颗粒形状的颗粒流模型,对双轴压缩试验进行了数值模拟,研究了颗粒形状对颗粒流试样宏观特性的影响。苏利军等<sup>[5]</sup>建立了岩石与滚刀的二维颗粒流模型,对 TBM 滚刀破岩过程进行了数值模拟,并就滚刀刀圈断面形状、刀刃角、刀刃宽度等参数对岩石破坏过程的影响进行了分析。Cai 等<sup>[6]</sup>采用 FLAC(fast lagrangian analysis of continua)程序与 PFC 程序相耦合的方法,对大型地下洞室的开挖过程进行了数值模拟。Belheine 等<sup>[7]</sup>基于三维离散单元法,引入扭矩传递法则进行修正,建立三轴压缩试验滚阻模型,进行了三种围压情形下的数值模拟,标定了滚阻模型的细观参数。Coetzee 等<sup>[8]</sup>基于二维离散单元法,采用直剪试验和压缩试验相结合的方法对谷料细观参数进行了标定,并使用所标定的细观参数对筒仓放料和铲斗填充的过程进行数值模拟。Mahmud 等<sup>[9]</sup>基于离散单元法,根据不同的颗粒间摩擦系数及孔隙率建立了两组颗粒流模型,数值模拟应力比-轴向应变曲线和体积应变-轴向应变曲线,并就摩擦系数对滑动摩擦角及滑动接触比的影响进行分析。Zhang 等<sup>[10]</sup>根据已有单轴压缩强度试验数据和经验公式,提出单轴压缩强度与试样体积之间的关系表达式,基于颗粒流方法,对试样单轴压缩试验进行了数值模拟,并就试样尺寸、裂纹模式及分形维数对数值模拟结果的影响进行了研究。诸多学者将堆石料视为颗粒材料,对其力学特性进行颗粒流数值模拟。刘君等<sup>[11]</sup>考虑堆石料颗粒的破碎情况,建立二维堆石料簇颗粒模型,进行了三种围压情形下的平面应变试验数值模拟,标定了堆石料细观参数,并对细观参数的合理性、数值模拟过程剪切带的形成机理进行了探讨。陈绍杰等<sup>[12]</sup>应用 Lyapunov 评价准则对六种岩石单轴压缩过程的变形模量时间序列进行了分析。根据变形模量的变化定性,描述了岩石在加载过程中弹性、塑性和破坏三种状态。邵磊等<sup>[13]</sup>基于离散单元法,根据试样的孔隙率和级配建立了三维堆石料颗粒流模型,对堆石料大三轴排水剪切试验进行了数值模拟。刘东等<sup>[14]</sup>分别建立了堆石体随机散粒体模型和圆盘颗粒流模型,对比研究不同围压及不同应力比参数下两种模型的偏应力-轴向应变曲线和体积应变-轴向应变曲线。杨贵等<sup>[15]</sup>采用 PFC 程序对粗粒料真三轴试验进行数值模拟,并使用统一各向同性破坏准则对粗粒料真三轴试验及 PFC 数值模拟结果进行了模拟。

虽然基于离散单元法的颗粒流程序已经广泛应用于诸多岩土工程问题的分析,但颗粒流模型细观参数(包括法向接触刚度、切向接触刚度、摩擦系数、密度等)的选取却仍是一个难题。通用的方法是尝试法(“hit-and-miss”),但该方法的合理性、可靠性却缺乏充足的依据。本研究基于响应面方法,根据堆石料三轴压缩试验数据及 PFC 数值模拟结果对堆石料颗粒流模型细观参数进行了反演分析,为细观参数的准确估计提供新的方法和思路。

### 1 堆石料三轴压缩试验颗粒流模拟

PFC<sup>2D</sup> (Particle Flow Code in 2 Dimensions)程序基于离散单元法来模拟圆盘颗粒的运动及其相互作用,如 Cundall 等<sup>[16]</sup>所描述。在颗粒离散元中,作用在颗粒接触处的本构模型由三部分组成:接触刚度模型、库伦滑移模型和粘结模型。接触刚度模型用于表征颗粒接触力和相对位移之间的弹性关系。滑移模型用于表征切向和法向接触力之间的关系。粘结模型用于表征接触所能够承受的极限法向力和切向力。离散元接触模型如图 1 所示。

使用接触刚度模型来描述法向接触力和切向接触力与相对位移

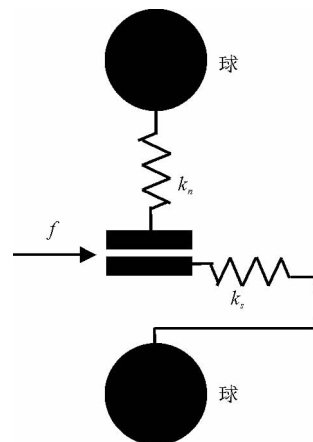


图 1 离散元接触模型(球-球)  
Fig. 1 DEM contact model(ball-ball)

之间的关系为

$$F_n = k_n U_n ; \tag{1}$$

$$\Delta F_s = -k_s \Delta U_s . \tag{2}$$

其中： $F_n$  为法向力， $k_n$  为法向刚度（割线刚度）， $U_n$  为法向位移。 $\Delta F_s$  为切向力增量， $k_s$  为切向刚度（切线刚度）， $\Delta U_s$  为剪切位移增量。PFC<sup>2D</sup> 提供两种接触刚度模型：线性模型与简化的 Hertz-Mindlin 模型。滑移模型由颗粒接触摩擦系数  $f$ （无量纲）表征， $f$  取为两个接触实体之间的最小值（球-球与球-墙）。PFC<sup>2D</sup> 提供两种粘结模型：接触粘结模型和平行粘结模型，接触粘结只能传递力而平行粘结能传递力和力矩。PFC<sup>2D</sup> 还为用户自定义接触本构模型提供了开发接口。

试验所用垫层料取自蒲石河抽水蓄能电站输水洞开挖出的岩石，堆石料试样直径  $D$  为 300 mm，高度  $H$  为 700 mm，堆石料颗粒级配见表 1。

表 1 堆石料颗粒级配

Tab.1 Particle size distribution of rockfill materials

粒度/mm	80~60	60~40	40~20	20~10	10~5	5~0.075	<0.075
堆石料组成/%	8	12	18	14	13	30	5

根据堆石料试样尺寸和孔隙率，采用 PFC<sup>2D</sup> 程序生成堆石料颗粒流模型。试样和模型简图如图 2 所示，模型由 1 596 个颗粒组成。根据堆石料级配计算平均粒径，其颗粒大小近似取为 20 mm，模型孔隙率为 0.14，颗粒密度取为 2 800 kg/m<sup>3</sup>。将堆石料三轴压缩试验简化为二维问题，堆石料压缩试验数值模拟过程简述如下：①建立试样模型，包括生成加载墙和围压墙，生成堆石料颗粒；②压缩试样，控制上下墙体的速度来模拟加载，通过伺服机制控制侧向墙体的速度，以使围压处于要求值；③输出偏应力-轴向应变曲线，输出对应点数据。实验室试验时，侧向约束为柔性边界（膜边界），而数值模拟时，侧向约束为刚性墙边界。对此，PFC<sup>2D</sup> 用户手册建议，开始压缩时，侧向墙刚度取为颗粒刚度的 1/10~1/2 以模拟实际试验的柔性边界条件。

颗粒流模型的细观参数包括法向接触刚度、切向接触刚度、摩擦系数、接触粘结强度、平行粘结强度等参数。由于堆石料颗粒之间粘结强度很低，可以忽略不计，故本文研究堆石料的细观参数包括法向接触刚度  $k_n$ ，切向接触刚度  $k_s$  和摩擦系数  $f$ 。通过调整堆石料细观参数，分析各参数对堆石料宏观物理力学特性的影响，图 3~5 为围压 1 200 kPa 下不同法向接触刚度、切向接触刚度及摩擦系数对数值模拟结果的影响。

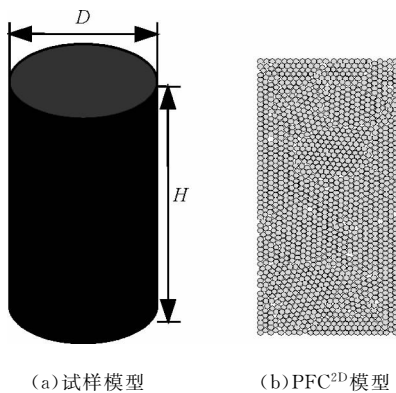


图 2 堆石料试样及 PFC<sup>2D</sup> 模型

Fig.2 Specimen and PFC<sup>2D</sup> model of rockfill materials

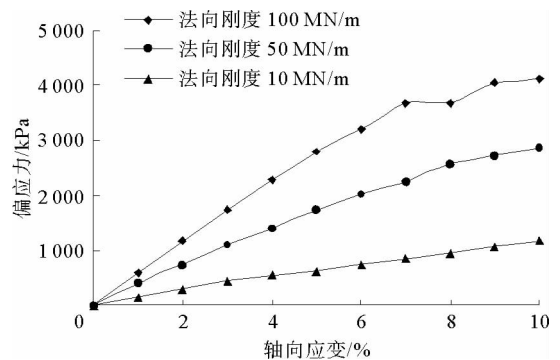


图 3 不同法向接触刚度下的偏应力-轴向应变曲线  
(围压:1 200 kPa)

Fig.3 Deviatoric stress-axial strain curves in different normal stiffness for a confining pressure of 1200 kPa

由图 3~5 可以看出，随法向接触刚度、切向接触刚度及摩擦系数的增加，堆石料峰值强度相应增加，宏观初始变形模量也增加。

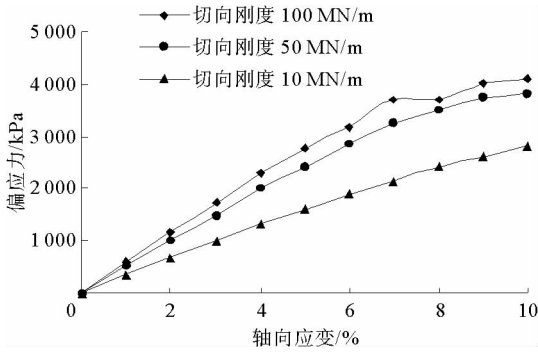


图 4 不同切向接触刚度下的轴向应变-偏应力曲线(围压:1 200 kPa)

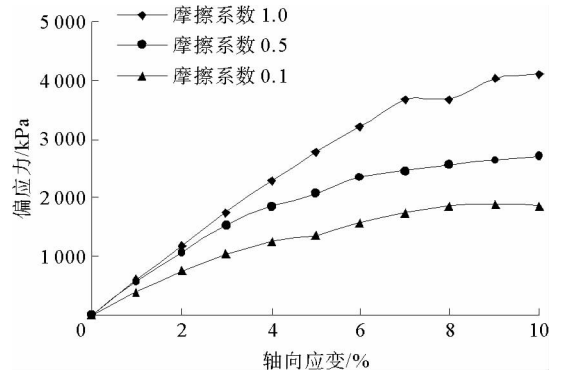


图 5 不同摩擦系数下的轴向应变-偏应力曲线(围压:1 200 kPa)

Fig. 4 Deviatoric stress-axial strain curves in different tangent stiffness for a confining pressure of 1200 kPa

Fig. 5 Deviatoric stress-axial strain curves in different friction coefficient for a confining pressure of 1200 kPa

## 2 基于响应面法的堆石料细观参数反演

根据经验估计的堆石料细观参数见表 2,初步标定的堆石料细观参数仅能说明使用某一组细观参数,恰好能使 PFC<sup>2D</sup>数值模拟结果与试验结果基本吻合,但是细观参数选取的合理性、可靠性还有待研究。为克服这一缺点,本文基于响应面法对堆石料细观参数进行了反演分析。

表 2 初步估计的堆石料细观参数

Tab. 2 Initial calibrated meso-parametes of rockfill materials

围压 $\sigma_c$ / kPa	法向接触刚度 $\bar{k}_n$ / ( $10^6$ N/m)	切向接触刚度 $\bar{k}_s$ / ( $10^6$ N/m)	摩擦系数 $\bar{f}$
400	8.0	8.0	0.9
600	12.0	12.0	0.9
1 200	14.0	14.0	1.0

自 1951 年 Box 和 Wilson<sup>[17]</sup> 提出响应面法的概念之后,经过半个多世纪的发展,响应面法在食品学、化工、土木工程、医药学、生物学和结构优化等领域获得了广泛应用。响应面方法是一种用于开发、改进、优化的统计和数学方法。响应面中的响应又可理解成灵敏度,其根据性能响应试验(有计划的批量实体试验或批量数值试验)回归得到高维超曲面,为构造近似模型提供了一种方法,响应面函数形式的选取通常使用线性或二次多项式的形式。本文使用批量 PFC<sup>2D</sup>数值试验作为样本,选取不含交叉项的二次多项式作为响应面函数。

待反演的堆石料细观参数与偏应力之间的函数关系为

$$s_k(\bar{x}) = a + \sum_{i=1}^3 b_i \bar{x}_i + \sum_{i=1}^3 c_i \bar{x}_i^2, \quad (3)$$

$$\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3]^T = [\bar{k}_n, \bar{k}_s, \bar{f}]^T, \quad (4)$$

$$\bar{k}_n = \frac{k_n}{\bar{k}_n}, \bar{k}_s = \frac{k_s}{\bar{k}_s}, \bar{f} = \frac{f}{\bar{f}}. \quad (5)$$

其中: $s_k$  表示第  $k$  个载荷步的偏应力; $a, b_i$  及  $c_i$  表示多项式待定系数; $\bar{x}$  表示无量纲自变量向量; $\bar{k}_n, \bar{k}_s$  及  $\bar{f}$  分别表示无量纲法向接触刚度、切向接触刚度及摩擦系数; $\bar{k}_n, \bar{k}_s$  及  $\bar{f}$  表示根据经验估计的堆石料细观参数;

现以第 1 个载荷步为例,将方程(3)展开,如式(6)~(12)所示:

$$s_1^1(\bar{x}) = s(\bar{k}_n, \bar{k}_s, \bar{f}), \quad (6)$$

$$s_1^2(\bar{x}) = s(\bar{k}_n + \Delta \bar{k}_n, \bar{k}_s, \bar{f}), \quad (7)$$

$$s_1^3(\bar{x}) = s(\bar{k}_n - \Delta \bar{k}_n, \bar{k}_s, \bar{f}), \quad (8)$$

$$s_1^4(\bar{\mathbf{x}}) = s(\bar{k}_n, \bar{k}_s + \Delta\bar{k}_s, \bar{f}), \tag{9}$$

$$s_1^5(\bar{\mathbf{x}}) = s(\bar{k}_n, \bar{k}_s - \Delta\bar{k}_s, \bar{f}), \tag{10}$$

$$s_1^6(\bar{\mathbf{x}}) = s(\bar{k}_n, \bar{k}_s, \bar{f} + \Delta\bar{f}), \tag{11}$$

$$s_1^7(\bar{\mathbf{x}}) = s(\bar{k}_n, \bar{k}_s, \bar{f} - \Delta\bar{f}). \tag{12}$$

其中： $\Delta\bar{k}_n = 0.1$ ， $\Delta\bar{k}_s = 0.1$ ， $\Delta\bar{f} = 0.1$ ，表示无量纲法向接触刚度、切向接触刚度及摩擦系数的增量。 $s_i^j$  ( $i=1, 2, \dots, 7$ ) 表示第 1 个载荷步 7 种参数组合下的偏应力，由 PFC<sup>2D</sup> 计算。由式(6)~(12)可知，共有 7 个方程，7 个待定系数，可由 Matlab 求解线性方程组，其他载荷步情形下类比处理。在围压 400 kPa 条件下，不同载荷步及不同参数组合情形下的 PFC<sup>2D</sup> 数值模拟结果列于表 3，由 Matlab 求得的响应面函数系数列于表 4，其中， $k$  表示载荷步。因篇幅所限，在围压 600 kPa 和 1 200 kPa 条件下，求得的响应面函数系数从略。

表 3 PFC<sup>2D</sup> 计算偏应力 (围压: 400 kPa)

Tab. 3 Deviatoric stress computed by PFC<sup>2D</sup> for a confining pressure of 400 kPa

kPa

$k$	$s^1$	$s^2$	$s^3$	$s^4$	$s^5$	$s^6$	$s^7$
1	419	447	408	422	408	416	410
2	785	841	761	785	760	790	747
3	1 080	1 136	1 061	1 096	1 059	1 106	1 018
4	1 248	1 409	1 075	1 283	1 264	1 311	1 203
5	1 482	1 604	1 490	1 472	1 478	1 561	1 412
6	1 688	1 829	1 675	1 715	1 706	1 784	1 608
7	1 859	1 980	1 719	1 812	1 851	2 004	1 716
8	2 040	2 047	1 793	1 985	2 033	2 100	1 872
9	2 046	2 011	1 778	2 044	2 073	2 243	1 672
10	2 019	1 802	1 715	1 912	1 914	2 113	1 584

表 4 响应面函数系数 (围压: 400 kPa)

Tab. 4 Coefficients of response surface functions for a confining pressure of 400 kPa

$k$	$a$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$c_1$	$c_2$	$c_3$
1	-26	-1 505	870	1 230	850	-400	-600
2	-1 255	-2 800	2 625	3 515	1 600	-1 250	-1 650
3	-120	-3 325	685	4 040	1 850	-250	-1 800
4	1 793	2 870	-5 005	-1 260	-600	2 550	900
5	6 447	-12 430	1 370	-155	6 500	-700	450
6	9 443	-12 030	-4 455	-720	6 400	2 250	800
7	-4 291	3 205	5 305	1 240	-950	-2 750	100
8	-20 630	25 270	5 960	11 940	-12 000	-3 100	-5 400
9	-24 579	31 465	-2 645	20 555	-15 150	1 250	-8 850
10	-54 751	52 535	21 190	36 745	-26 050	-10 600	-17 050

定义堆石料细观本构模型参数反演的目标函数为

$$\min J = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [s_k(\bar{\mathbf{x}}) - s_k^m]^2}. \tag{13}$$

其中： $J$  为目标函数， $s_k^m$  为第  $k$  个载荷步偏应力观测值， $N$  是总载荷步数，本例  $N=10$ 。拟牛顿法是解决无约束优化问题的有效方法之一，其中效果较好的有 DFP(Davidon-Fletcher-Powell)算法和 BFGS(Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno)算法，一般认为，BFGS 算法比 DFP 算法具有更好的数值稳定性。基于上述考虑，采用 BFGS 算法。使用 Matlab 科学计算软件编制 BFGS 优化算法程序，对堆石料细观参数进行反演分析，最终经过优化所得的细观参数值列于表 5。根据表 5 可知，随着围压的增加，堆石料法向接触刚度、切向接触刚度及摩擦系数都会增加，但摩擦系数增加幅度不明显而且法向接触刚度略大于切向接触刚度。堆石

料宏观变形模量和细观接触刚度都随着围压增加而增加,恰好表明宏细观之间的对应关系。

表 5 反演的堆石料细观参数

Tab. 5 Inverted meso-parameters of rockfill materials

围压 $\sigma_c$ / kPa	法向接触刚度 $k_n/(10^6 \text{ N/m})$	切向接触刚度 $k_s/(10^6 \text{ N/m})$	摩擦系数 $f$
400	86.504	83.224	0.917 5
600	12.888	12.445	0.919 2
1 200	14.431	13.712	1.038 9

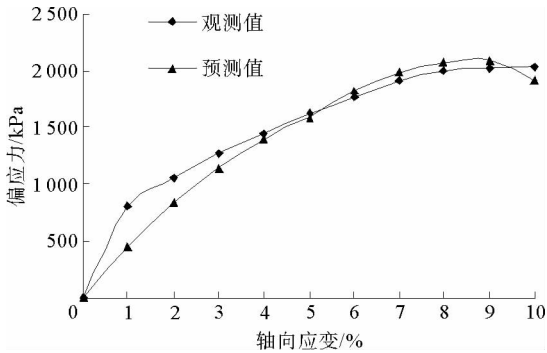


图 6 试验曲线与预测曲线对比(围压:400 kPa)

Fig. 6 Comparison between experimental and predicted curves for a confining pressure of 400 kPa

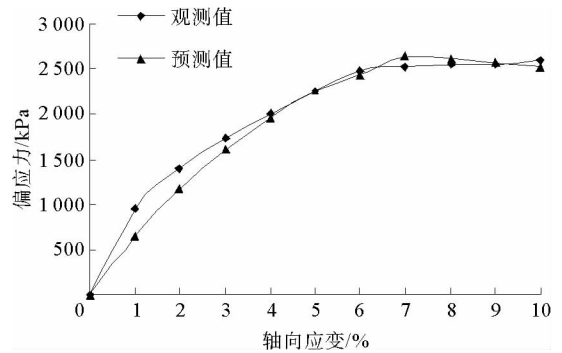


图 7 试验曲线与预测曲线对比(围压:600 kPa)

Fig. 7 Comparison between experimental and predicted curves for a confining pressure of 600 kPa

根据反演的堆石料细观参数模拟了堆石料的应力-应变特性,如图 6~8 所示。由图 6~8 可以看出,预测曲线与试验曲线基本吻合,验证了该反演方法的有效性、合理性。而且基于响应面方法的堆石料细观参数反演选用 7 组数值试验作为样本进行分析,其可靠性相较于单一的尝试法也有所提高。

对响应面法预测能力进行评估,采用相关系数作为评价指标,计算不同围压下的预测曲线与试验曲线之间的相关系数  $R^2$ ,分别为 0.942 3(围压:400 kPa), 0.973 5(围压:600 kPa), 0.9885(围压:1 200 kPa)。相关系数  $R^2$  是一个在  $[0, 1]$  之间变化的值,其值越接近 1 说明误差的影响越小。由  $R^2$  可知,基于响应面法的堆石料颗粒流模型细观参数反演方法的预测能力比较准确与可靠。

### 3 结论

- 1)提出了基于响应面法的堆石料颗粒流模型细观参数反演方法,该方法预测的堆石料应力-应变曲线与试验曲线基本吻合,验证了该方法的有效性,为堆石料细观本构模型参数估计提供新的方法和思路。
- 2)研究表明,堆石料细观参数随围压的增加而增加,摩擦系数增加幅度不明显,法向接触刚度略大于切向接触刚度,但材料的法向接触刚度与切向接触刚度近似相等。
- 3)进一步的工作包括对堆石料颗粒尺寸效应的研究,根据堆石料颗粒级配建立更为贴近原型的材料几何模型;同时将该方法推广到平行粘结本构模型(parallel bond model)细观参数反演,用于模拟岩石和混凝土材料(非散体材料)的开裂问题。

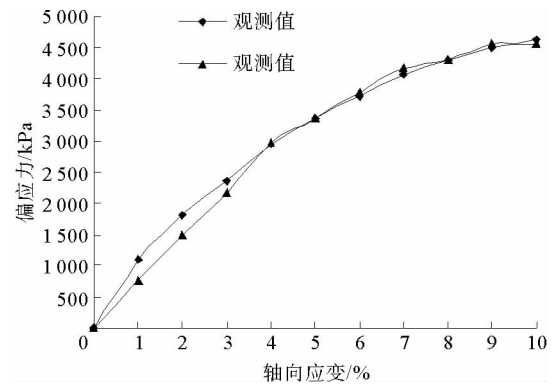


图 8 试验曲线与预测曲线对比(围压:1 200 kPa)

Fig. 8 Comparison between experimental and predicted curves for a confining pressure of 1200 kPa



参考文献:

- [1]周先齐,徐卫亚,钮新强,等. 离散单元法研究进展及应用综述[J]. 岩土力学,2007,28(增 1):408-416.  
Zhou Xianqi,Xu Weiya,Niu Xinqiang,et al. A review of distinct element method researching progress and application[J]. Rock and Soil Mechanics,2007,28(S1):408-416.
- [2]黄冬梅,常西坤,林晓飞,等. 单轴压缩下岩石断口裂纹的分形特性研究[J]. 山东科技大学学报:自然科学版,2014,33(2):58-62.  
Huang Dongmei,Chang Xikun,Lin Xiaofei,et al. The fractal dimension of rock crack under uniaxial compression[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology:Natural Science,2014,33(2):58-62.
- [3]周健,王家全,曾远,等. 土坡稳定分析的颗粒流模拟[J]. 岩土力学,2009,30(1):86-90.  
Zhou Jian,Wang Jiaquan,Zeng Yuan,et al. Simulation of slope stability analysis by particle flow code[J]. Rock and Soil Mechanics,2009,30(1):86-90.
- [4]张肿,舒贻平. 颗粒形状对颗粒流模拟双轴压缩试验的影响研究[J]. 岩土工程学报,2009,31(8):1281-1286.  
Zhang Chong,Shu Ganping. Effect of particle shape on biaxial tests simulated by particle flow code[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering,2009,31(8):1281-1286.
- [5]苏利军,孙金山,卢文波. 基于颗粒流模型的 TBM 滚刀破岩过程数值模拟研究[J]. 岩土力学,2009,30(9):2823-2829.  
Su Lijun,Sun Jinshan,Lu Wenbo. Research on numerical simulation of rock fragmentation by TBM cutters using particle flow method[J]. Rock and Soil Mechanics,2009,30(9):2823-2829.
- [6]Cai M,Kaiser P K,Morioka H,et al. FLAC/PFC coupled numerical simulation of AE in large-scale underground excavations [J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences,2007,44(4):550-564.
- [7]Belheine N,Plassiard J P,Donzé F V,et al. Numerical simulation of drained triaxial test using 3D discrete element modeling [J]. Computers and Geotechnics,2009,36(1):320-331.
- [8]Coetzee C J ,Els D N J. Calibration of discrete element parameters and the modelling of silo discharge and bucket filling[J]. Computers and Electronics in Agriculture,2009,65(2):198-212.
- [9]Sazzad M M,Islam M S. Macro and micro mechanical responses of granular material under varying interparticle friction[J]. Journal of Civil Engineering,2008,36(2):87-96.
- [10]Zhang Q,Zhu H,Zhang L,et al. Study of scale effect on intact rock strength using particle flow modeling[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences,2011,48(8):1320-1328.
- [11]刘君,刘福海,孔宪京. 考虑破碎的堆石料颗粒流数值模拟[J]. 岩土力学,2008,29(增 1):107-112.  
Liu Jun,Liu Fuhai,Kong Xianjing. Particle flow code numerical simulation of particle breakage of rockfill[J]. Rock and Soil Mechanics,2008,29(S1):107-112.
- [12]陈绍杰,刘江波,王怀远,等. 岩石单轴压缩过程变形模量的最大 Lyapunov 指数分析[J]. 山东科技大学学报:自然科学版,2014,33(2):48-52.  
Chen Shaojie,Liu Jiangbo,Wang Huaiyuan,et al. Maximum Lyapunov index analysis of rock deformation modulus under uniaxial compression[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology:Natural Science,2014,32(2):48-52.
- [13]邵磊,迟世春,贾宇峰. 堆石料大三轴试验的细观模拟[J]. 岩土力学,2009,30(增 1):239-243.  
Shao Lei,Chi Shichun,Jia Yufeng. Meso-mechanical simulation of a large scale triaxial test of rockfill materials[J]. Rock and Soil Mechanics,2009,30(S1):239-243.
- [14]刘东,谢婷婷,马刚,等. 颗粒形状对堆石体真三轴数值试验力学特性的影响[J]. 水电能源科学,2011,29(9):68-71.  
Liu Dong,Xie Tingting,Ma Gang,et al. Numerical simulation of true triaxial test for behavior of rockfill based on grain shape[J]. Water Resources and Power,2011,29(9):68-71.
- [15]杨贵,肖扬,高德清. 粗粒料三维颗粒流数值模拟及其破坏准则研究[J]. 岩土力学,2010,31(增 2):402-406.  
Yang Gui,Xiao Yang,Gao Deqing. Study of three-dimensional particle flow numerical simulation and failure criterion for coarse-grained soils[J]. Rock and Soil Mechanics,2010,31(S2):402-406.
- [16]Cundall P A,Strack O D L. A discrete numerical method for granular assemblies[J]. Geotechnique,1979,29(1):47-65.
- [17]Box G E P,Wilson K B. On the experimental attainment of optimum conditions[J]. Journal of the Royal Statistical Society, 1951,13(1):1-45.

(责任编辑:吕海亮)