时间间隔服从对数分布的截断 δ 冲击模型可靠性分析

马 明,王 冬
(西北民族大学 数学与计算机科学学院,甘肃 兰州 730030)

摘 要: 讨论了一种特殊的截断 δ 冲击模型:假设系统遭受到达时间间隔服从参数为 q 的对数分布的冲击,若距上次冲击后,时间超过门限值 δ 时还没有新冲击到达,则系统失效。使用全期望公式计算了此类截断 δ 冲击模型系统寿命的概率分布、期望和系统可靠度,分析了寿命期望与参数的关系。结果表明,平均寿命关于参数 δ 单调递增,而关于参数 q 递减。

关键词: 截断 δ 冲击模型;对数分布;系统寿命;可靠度函数

中图分类号: O213.2;O13 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-3767(2015)05-0082-05

Reliability Analysis of the Censored δ Shock Model Based on Interarrival Time Following Logarithmic Distribution

Ma Ming, Wang Dong
(Mathematics and Computer Science College, Northwest University for Nationalities, Lanzhou, Gansu 730030, China)

Abstract: This paper discussed a special censored δ shock model. Assuming that the system suffered from the shock which interarrival time followed the logarithmic distribution with parameter q, the system would fail if no new shock arrived over the given threshold δ time from the last shock. The probability distribution, expectation and reliability of system were calculated by total expectations formula. And the relationship between the lifetime expectation and parameters was analyzed. The results show that the average lifetime expectation increases in parameter δ, while it decreases in parameter q.

Key words: censored δ shock model; logarithmic distribution; system lifetime; reliability function

冲击模型是可靠性理论的中心问题之一,相关研究由来已久。早在 1975 年,Barlow 和 Proschan[1] 就有较系统的论述。在此基础上,Shanthikumar 和 Sumita 作了更一般的讨论[2-3]。δ 冲击模型是由李泽慧等[4-5] 在对交通拥挤问题研究的基础上抽象出来的。马明等[6] 于 2008 年讨论了冲击模型寿命分布中多重积分的计算问题,并研究了由此积分引出的 M 函数的性质,讨论了截断 δ 冲击模型[7]。对于离散型 δ 冲击模型的研究,何雪等[8] 研究了冲击时间间隔服从泊松分布的系统寿命的概率分布和期望;张攀等[9] 基于时间点服从 0-1 分布的假设得到截断 δ 冲击模型系统寿命的分布和期望。

对于间隔服从对数分布型截断 δ 冲击模型的研究还没有具体结果,本研究探讨了冲击时间间隔服从对数分布的截断 δ 冲击模型的几个可靠性指标,包括系统寿命分布、系统平均寿命和系统可靠度,研究了寿命期望与参数之间的关系。

收稿日期: 2015-01-11
基金项目: 国家自然科学基金项目(11361049);甘肃省自然科学基金项目(1308RJZA147)
作者简介: 马 明(1971—),男,回族,内蒙古呼和浩特人,教授,博士,主要从事可靠性理论方面的研究. E-mail:mm9252@qq.com

1 系统寿命机制和相关变量

考虑冲击仅可能在整数时刻点到达的系统，假设系统在时刻 $t=0$ 时启动，系统遭受的冲击在每个整数时刻点上最多到达一次，且冲击相互独立，冲击时间间隔服从对数分布（设其参数为 q），若距上次冲击时间超过 δ 还没有新冲击到达，则系统失效，这样的系统称为时间间隔服从对数分布的离散型截断 δ 冲击模型，称 δ 为系统失效的门限值。

记 $N(n)$ 为到时刻 n 为止总共冲击的次数，$n=0,1,\cdots$；S_n 为第 n 个冲击到达的时刻，$n=1,2,\cdots$；X_n 为两次连续冲击到达的时间间隔，$n=1,2,\cdots$。

根据系统假设，X_n 满足：$p_m=P(X_n=m)=\dfrac{cq^m}{m}, 0<q<1; c=-\dfrac{1}{\ln(1-q)}, m=1,2,\cdots$。

令 $l=\min\{n\mid X_1\leqslant\delta, X_2\leqslant\delta,\cdots,X_n\leqslant\delta, X_{n+1}>\delta\}$，则由截断 δ 冲击模型系统的失效机理可得，系统寿命 $T=\sum\limits_{n=1}^{l}X_n+\delta$。

引理 1[10] 冲击到达时刻 S_m 的概率分布列为 $P(S_m=n)=c^m q^n\sum\limits_{\substack{k_i\geqslant 1\\ k_1+\cdots+k_m=n}}\prod\limits_{i=1}^{m}k_i^{-1}, n\geqslant m$。

引理 2[10] 冲击次数 $N(n)$ 的概率分布列为 $P(N(n)=m)=c^{m+1}\sum\limits_{k=m}^{n}\sum\limits_{j=n-k+1}^{\infty}\dfrac{q^{j+k}}{j}\sum\limits_{\substack{k_i\geqslant 1\\ k_1+\cdots+k_m=k}}\prod\limits_{i=1}^{m}k_i^{-1}$。

2 寿命性质

本节讨论系统寿命 T 的分布和期望。

定理 1 系统寿命 T 的分布为 $P(T=n)=\begin{cases}0, & n<\delta\\ 1-c\sum\limits_{i=1}^{\delta}\dfrac{q^i}{i}, & n=\delta\\ q^{n-\delta}\left(1-c\sum\limits_{k=1}^{\delta}\dfrac{q^k}{k}\right)\sum\limits_{m=[\frac{n}{\delta}]}^{n-\delta}c^m\sum\limits_{\substack{1\leqslant x_i\leqslant\delta\\ x_1+\cdots+x_m+\delta=n}}\prod\limits_{i=1}^{m}x_i^{-1}, & n>\delta\end{cases}$。

证明：分三种情形讨论：

$n<\delta$ 时，由寿命 T 的定义，易得 $P(T=n)=0$；$n=\delta$ 时，有 $T=n\Leftrightarrow T=\delta\Leftrightarrow X_1>\delta$，所以，$P(X_1>\delta)=1-P(X_1\leqslant\delta)=1-c\sum\limits_{i=1}^{\delta}\dfrac{q^i}{i}$；$n>\delta$ 时，使用全期望公式

$$P(T=n)=E[P(T=n)\mid N(n)]=\sum_{m=1}^{\infty}P(T=n\mid N(n)=m)P(N(n)=m)=$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}P(T=n,N(n)=m)=\sum_{m=1}^{\infty}P(X_1\leqslant\delta,\cdots,X_m\leqslant\delta,X_{m+1}>\delta,X_1+\cdots+X_m+\delta=n)\text{。}$$

因为 $1\leqslant X_i\leqslant\delta, i=1,2,\cdots,m$，所以 $m+\delta\leqslant n\leqslant(m+1)\delta$，即 $\dfrac{n}{\delta}-1\leqslant m\leqslant n-\delta$，又因为 m 是不小于 $\left(\dfrac{n}{\delta}-1\right)$ 的正整数，即 $m=[\frac{n}{\delta}],[\frac{n}{\delta}]+1,\cdots,n-\delta$，其中，$[x]$ 为不大于 x 的最大正整数，所以，

$$P(T=n)=\sum_{m=[\frac{n}{\delta}]}^{n-\delta}\sum_{\substack{1\leqslant x_i\leqslant\delta\\ x_1+\cdots+x_m=n-\delta}}P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_m=x_m,X_{m+1}>\delta)\text{。}\tag{1}$$

因为 $P(X_{m+1}>\delta)=1-[P(X_{m+1}=1)+P(X_{m+1}=2)+\cdots+P(X_{m+1}=\delta)]=1-c\sum\limits_{j=1}^{\delta}\dfrac{q^j}{n}$，且 X_i，$i=1,2,\cdots,m+1$ 是相互独立的，所以

$$P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_m=x_m,X_{m+1}>\delta)=$$
$$c\frac{q^{x_1}}{x_1}c\frac{q^{x_2}}{x_2}\cdots c\frac{q^{x_m}}{x_m}(1-c\sum_{j=1}^{\delta}\frac{q^j}{j})=c^m q^{\sum_{i=1}^{m}x_i}\prod_{i=1}^{m}x_i^{-1}(1-c\sum_{j=1}^{\delta}\frac{q^j}{j})\text{。}\tag{2}$$

将式(2)代入式(1)，得

$$P(T=n)=\sum_{m=[\frac{n}{\delta}]}^{n-\delta}\sum_{\substack{1\leqslant x_i\leqslant\delta\\ x_1+\cdots+x_m+\delta=n}}c^m\prod_{i=1}^{m}\frac{q^{n-\delta}}{x_i}(1-c\sum_{j=1}^{\delta}\frac{q^j}{j})=q^{n-\delta}(1-c\sum_{j=1}^{\delta}\frac{q^j}{j})\sum_{m=[\frac{n}{\delta}]}^{n-\delta}c^m\sum_{\substack{1\leqslant x_i\leqslant\delta\\ x_1+\cdots+x_m=n-\delta}}\prod_{i=1}^{m}x_i^{-1}\text{。}$$

定理2 系统寿命的期望为 $E(T)=\delta-\dfrac{\sum_{n=1}^{\delta}q^n}{\ln(1-q)+\sum_{n=1}^{\delta}\frac{q^n}{n}}$。

证明：

$$E[T]=E[E[T\mid X_1]]=\sum_{n=1}^{\delta}E[T\mid X_1=n]p(X_1=n)+\sum_{n=\delta+1}^{\infty}E[T\mid X_1=n]p(X_1=n)=$$
$$\sum_{n=1}^{\delta}(n+E(T))p_n+\sum_{n=\delta+1}^{\infty}\delta p_n=\sum_{n=1}^{\delta}np_n+E[T]\sum_{n=1}^{\delta}p_n+\delta[1-\sum_{n=1}^{\delta}p_n],$$

解方程得 $E[T]=\delta+\dfrac{\sum_{n=1}^{\delta}np_n}{1-\sum_{n=1}^{\delta}p_n}=\delta+\dfrac{c\sum_{n=1}^{\delta}q^n}{1-c\sum_{n=1}^{\delta}\frac{q^n}{n}}=\delta-\dfrac{\sum_{n=1}^{\delta}q^n}{\ln(1-q)+\sum_{n=1}^{\delta}\frac{q^n}{n}}$。

推论1 当 q 不变时，$E[T]$ 关于 δ 单调递增。

证明：令 $f(q)=\ln(1-q)+\sum_{n=1}^{\delta_1}\frac{q^n}{n}$，首先证明 $\forall q>0$，$f(q)<0$。因为

$$\frac{\mathrm{d}f(q)}{\mathrm{d}q}=\frac{-1}{1-q}+\sum_{n=1}^{\delta_1}q^{n-1}=\frac{-1}{1-q}+\frac{1-q^{\delta_1}}{1-q}<0,$$

当 $q=0$ 时，取得最大值 $f(0)=0$，即 $\ln(1-q)+\sum_{n=1}^{\delta_1}\frac{q^n}{n}\leqslant 0$。

对于任意的 $\delta_2>\delta_1\geqslant 1$，有

$$E[T_{\delta_2}]-E[T_{\delta_1}]=\delta_2-\delta_1+\frac{\sum_{n=1}^{\delta_1}q^n}{\ln(1-q)+\sum_{n=1}^{\delta_1}\frac{q^n}{n}}-\frac{\sum_{n=1}^{\delta_2}q^n}{\ln(1-q)+\sum_{n=1}^{\delta_2}\frac{q^n}{n}}>\frac{\sum_{n=1}^{\delta_1}q^n-\sum_{n=1}^{\delta_2}q^n}{\ln(1-q)+\sum_{n=1}^{\delta_1}\frac{q^n}{n}}>0,$$

即有 $E[T_{\delta_2}]>E[T_{\delta_1}]$。命题得证。

推论2 当 δ 不变时，$E[T]$ 关于 $q(0\leqslant q<1)$ 单调递减。

证明：令 $g(q)=\dfrac{\sum_{n=1}^{\delta}q^n}{\ln(1-q)}$，得 $g'=\dfrac{\ln(1-q)\sum_{n=1}^{\delta}nq^{n-1}+\frac{1}{1-q}\sum_{n=1}^{\delta}q^n}{(\ln(1-q))^2}$，由复合函数单调性可知，$g$ 关于 q 单增，所以 $g'\geqslant 0$。

令 $h(q)=\sum_{n=1}^{\delta}nq^{n-1}\sum_{k=1}^{\delta}\frac{q^k}{k}-\sum_{n=1}^{\delta}q^{n-1}\sum_{k=1}^{\delta}q^k=\sum_{n=1}^{\delta}\sum_{k=1}^{\delta}q^{n+k-1}\left(\frac{n}{k}-1\right)$，则

$$2h(q)=\sum_{n=1}^{\delta}\sum_{k=1}^{\delta}q^{n+k-1}(\frac{n}{k}-1+\frac{k}{n}-1)\geqslant\sum_{n=1}^{\delta}\sum_{k=1}^{\delta}q^{n+k-1}(2\sqrt{\frac{n}{k}\cdot\frac{k}{n}}-2)=0\text{。}$$

求 $E[T]$ 关于 q 的导数，得

$$\frac{\mathrm{d}E[T]}{\mathrm{d}q}=-\frac{\sum_{n=1}^{\delta}nq^{n-1}(\ln(1-q)+\sum_{k=1}^{\delta}\frac{q^k}{k})-(\sum_{n=1}^{\delta}q^{n-1}-\frac{1}{1-q})\sum_{n=1}^{\delta}q^n}{\left(\ln(1-q)+\sum_{n=1}^{\delta}\frac{q^n}{n}\right)^2}=$$

$$-\frac{\ln(1-q)\sum_{n=1}^{\delta}nq^{n-1}+\frac{1}{1-q}\sum_{n=1}^{\delta}q^{n}}{\left(\ln(1-q)+\sum_{n=1}^{\delta}\frac{q^{n}}{n}\right)^{2}}-\frac{\sum_{n=1}^{\delta}\sum_{k=1}^{\delta}q^{n+k-1}\left(\frac{n}{k}-1\right)}{\left(\ln(1-q)+\sum_{n=1}^{\delta}\frac{q^{n}}{n}\right)^{2}}=$$

$$-\frac{g'(\ln(1-q))^{2}}{\left(\ln(1-q)+\sum_{n=1}^{\delta}\frac{q^{n}}{n}\right)^{2}}-\frac{h(q)}{\left(\ln(1-q)+\sum_{n=1}^{\delta}\frac{q^{n}}{n}\right)^{2}}\leqslant 0,$$

即 $E[T]$ 是关于 q 的单调递减函数。命题得证。

为了更好地了解系统寿命与参数 q 和时间间隔 δ 的关系，表 1 列举了不同 δ 和 q 条件下 $E[T]$ 的取值。图 1 和图 2 分别表示 $\delta=2$ 和 $q=0.5$ 时，$E[T]$ 的变化趋势。

表 1　不同 $\boldsymbol{\delta}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 条件下 $\boldsymbol{E[T]}$ 的取值

Tab. 1　The values of $E[T]$ for various δ and q

δ \ q	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1	19.654 9	9.641 7	6.293 3	4.609 3	3.588 7
2	307.118 5	78.346 8	35.404 9	20.166 7	13.005 6
3	4 086.5	523.0	158.9	68.7	36.0
4	50 913	3 250	658	214	90
5	609 410	19 400	2 610	640	220

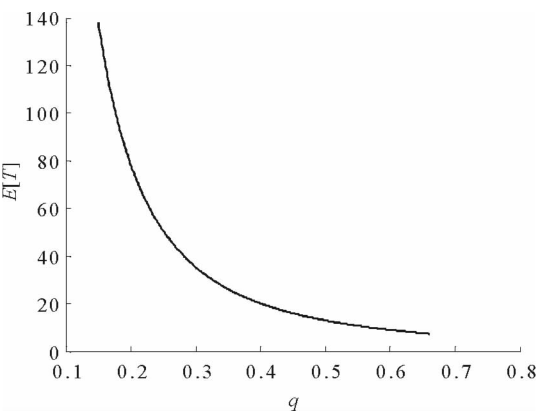

图 1　$\boldsymbol{E[T]}$关于 $\boldsymbol{q}$ 的变化曲线($\boldsymbol{\delta=2}$)

Fig. 1　The $E[T]$curves in q with $\delta=2$

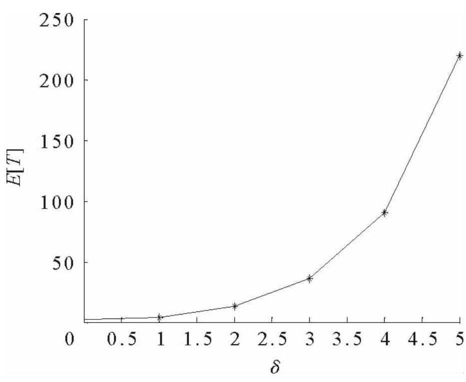

图 2　$\boldsymbol{E[T]}$关于 $\boldsymbol{\delta}$ 的变化曲线($\boldsymbol{q=0.5}$)

Fig. 2　The $E[T]$curves in δ with $q=0.5$

考虑系统寿命的可靠度函数，有定理 3 成立。

定理 3　系统的可靠度函数为

$$P(T>n)=\begin{cases}\sum_{m=\frac{n}{\delta}-1}^{\infty}\sum_{\substack{1\leqslant k_i\leqslant\delta\\ n-\delta<k_1+\cdots+k_m<n}}c^{m+1}\prod_{i=1}^{m}k_i^{-1}\sum_{k_{m+1}=n+1-\sum_{i=1}^{m}k_i}^{\infty}\frac{q^{\sum_{i=1}^{m+1}k_i}}{k_{m+1}}, & n>\delta\\ 1, & n\leqslant\delta\end{cases}。$$

证明：由系统寿命定义知，$T\geqslant\delta$，所以对任意 $n\leqslant\delta$，有 $P(T>n)=1$。

当 $n\geqslant\delta$ 时，$P(T>n)=\sum_{m=1}^{\infty}P(T>n,N(n)=m)$，在 $N(n)=m$ 的条件下，由于 $\delta\geqslant X_i\geqslant 1$，$i=1$，$2,\cdots,m$，得到 $m+\delta>n$，$(m+1)\delta>n$，$\min(n-\delta,\frac{n}{\delta}-1)=\frac{n}{\delta}-1$。

$$P(T>n)=\sum_{m=\frac{n}{\delta}-1}^{\infty}P(X_1+\cdots+X_m\leqslant n,X_1+\cdots+X_m+\delta>n,1\leqslant X_i\leqslant\delta,X_{m+1}>\delta)=$$

$$\sum_{m=\frac{n}{\delta}-1}^{\infty}\sum_{\substack{1\leqslant k_i\leqslant\delta\\ n-\delta<k_1+\cdots+k_m<n}}P(X_1=k_1,\cdots,X_m=k_m,X_{m+1}>n-\sum_{i=1}^{m}k_i)=$$

$$\sum_{m=\frac{n}{\delta}-1}^{\infty}\sum_{\substack{1\leqslant k_i\leqslant\delta\\ n-\delta<k_1+\cdots+k_m<n}}c\frac{q^{k_1}}{k_1}c\frac{q^{k_2}}{k_2}\cdots c\frac{q^{k_m}}{k_m}c\sum_{k_{m+1}=n+1-\sum_{i=1}^{m}k_i}^{\infty}\frac{q^{k_{m+1}}}{k_{m+1}}=\sum_{m=\frac{n}{\delta}-1}^{\infty}\sum_{\substack{1\leqslant k_i\leqslant\delta\\ n-\delta<k_1+\cdots+k_m<n}}c^{m+1}\prod_{i=1}^{m}k_i^{-1}\sum_{k_{m+1}=n+1-\sum_{i=1}^{m}k_i}^{\infty}\frac{q^{\sum_{i=1}^{m+1}k_i}}{k_{m+1}}。$$

命题得证。

3 结束语

假定系统受到冲击到达的时间间隔服从对数分布的条件下，分别研究了离散截断 δ 冲击模型的系统寿命分布、系统平均寿命和系统可靠度。在此基础上，讨论了寿命期望与参数之间的关系：平均寿命关于 δ 单调递增，关于 q 单调递减。本文方法可以为研究其他离散型截断 δ 冲击模型提供参考，可进一步推广到更一般的截断 δ 冲击模型。

参考文献：

[1]Barlow R E，Proschan F. Statistical theory of reliability and life testing[M]. New York：Holt，Rinehart and Winston，1975：91-97.

[2]Shanthikumar J G，Sunita U. General shock models associated with correlated renewal sequences[J]. Journal of Applied Probability，1983，20：600-614.

[3]Shanthikumar J G，Sunita U. Distribution properties of the system failure time in a general shock model[J]. Advances in Applied Probability，1984，16：363-377.

[4]李泽慧. 与泊松有关的几个概率分布及其在城市交通拥挤问题中的应用[J]. 兰州大学学报：自然科学版，1984，20(S1)：127-136.

Li Zehui. Some distribution related to Poisson processes and their application in solving the problem of traffic jam[J]. Journal of Lanzhou University：Natural Sciences，1984，20(S1)：127-136.

[5]李泽慧，黄宝胜，王冠军. 一种冲击源下冲击模型的寿命分布及其性质[J]. 兰州大学学报：自然科学版，1999，35(4)：1-7.

Li Zehui，Huang Baosheng，Wang Guanjun. Life distribution and its properties of shock models under random shocks[J]. Journal of Lanzhou University：Natural Sciences，1999，35(4)：1-7.

[6]马明. δ 冲击模型寿命分布的积分计算及 M 函数的性质[J]. 山东大学学报：理学版，2008，43(12)：15-19.

Ma Ming. Computation of the integral of lifetime distribution in δ shock model and properties of M function[J]. Journal of Shandong University：Natural Science，2008，43(12)：15-19.

[7]Ma Ming，Li Zehui. Life behavior of censored δ shock model[J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics，2010，41(2)：401-420.

[8]何雪，冶建华，陈丽雅. 冲击间隔服从泊松分布的 δ 冲击模型的可靠性分析[J]. 贵州师范大学学报：自然科学版，2012，30(6)：65-68.

He Xue，Ye Jianhua，Chen Liya. The reliability analysis of the δ shock model based on interarrival time follows Poisson distribution[J]. Journal of Guizhou Normal University：Natural Sciences，2012，30(6)：65-68.

[9]张攀，马明，余进玉，等. 时间点服从 0-1 分布的离散型截断 δ 冲击模型的寿命性质[J]. 甘肃联合大学学报：自然科学版，2012，26(5)：24-26.

Zhang Pan，Ma Ming，Yu Jinyu，et al. Lifetime behavior of discrete censored δ shock model on arrival times obey the 0-1 distribution[J]. Journal of Gansu Lianhe University：Natural Sciences，2012，26(5)：24-26.

[10]马明，王冬，梁宜英. 时间点服从对数分布的冲击模型的特征量分布[J]. 菏泽学院学报，2014，36(5)：14-17.

Ma Ming，Wang Dong，Liang Yiying. The distribution of characteristic quantity based on the shock model of the logarithmic time interval[J]. Journal of Heze University，2014，36(5)：14-17.

（责任编辑：吕文红）