

# 基于增量谐波平衡法的杜芬方程非线性区间 多值自动求解算法

张纯金<sup>1</sup>, 任勇生<sup>1</sup>, 纪淑娟<sup>2</sup>

(1. 山东科技大学 机械电子工程学院, 山东 青岛 266590; 2. 山东科技大学 信息科学与工程学院, 山东 青岛 266590)

**摘要:**以典型的非线性振动系统杜芬方程为例, 研究应用增量谐波平衡法自动求解非线性方程区间内多值的问题。在非线性区间内选择一个与幅频特性曲线趋向相似的谐波项系数作为主动变量, 根据振幅的变化情况, 自动选择不同谐波项系数, 直到求出所有的值, 所求出的值与四阶 Runge-Kutta 法的结果相比精确度相当, 验证了算法的正确性。

**关键词:**增量谐波平衡法; 非线性振动; 杜芬方程; 幅频响应

中图分类号: O322

文献标志码: A

文章编号: 1672-3767(2015)05-0092-06

## Automatic Multivalued Algorithm of Nonlinear Interval of Duffing Equation Based on Incremental Harmonic Balance Method

Zhang Chunjin<sup>1</sup>, Ren Yongsheng<sup>1</sup>, Ji Shujuan<sup>2</sup>

(1. College of Mechanical and Electronic Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China; 2. College of Information Science and Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

**Abstract:** Taking the typical nonlinear vibration Duffing equation as an example, this paper studied the problem of solving multi-values of nonlinear equation intervals using the incremental harmonic balance (IHB) method. With a harmonic coefficient in the nonlinear interval as the active variable, which was similar to the tendency of the amplitude-frequency curve, different harmonic coefficients were automatically selected according to the change of amplitude, until all values were calculated. The calculated values were compared with the results obtained by four-order Runge-Kutta method. The results show that the two methods are equally precise, verifying the correctness of this algorithm.

**Key words:** incremental harmonic balance method; nonlinear vibration; Duffing equation; amplitude frequency corresponding

增量谐波平衡 (incremental harmonic balance, IHB) 法是 Lau 等<sup>[1]</sup> 在 1981 年提出的, 该方法把牛顿-拉夫逊增量迭代法和谐波平衡方法结合起来研究非线性振动问题。增量谐波平衡法具有公式推导容易、可以灵活地选择控制参数等特点, 不但能有效地研究小振幅弱非线性振动, 而且能研究大振幅强非线性振动问题。因此, 增量谐波平衡法已成为研究非线性振动的一种有效工具, 并得到广泛应用<sup>[2-4]</sup>。

增量谐波平衡法虽然具有很多优点, 但是仍存在一些问题。例如, 求解非线性振动时要经过增量、积分

收稿日期: 2015-03-31

基金项目: 国家自然科学基金项目(11272190, 10972124)

作者简介: 张纯金(1977—), 男, 山东鄄城人, 工程师, 博士研究生, 主要从事非线性振动方面的研究。

E-mail: zhangchjin@163.com

转换,然后变成线性矩阵方程,最后迭代求值找到平衡点,因此每次只能求解一个对应值。而非线性系统的特点是在一定振动频率区间内对应多个解,如何逐个求出非线性系统多值区间内的所有值,是非线性系统求解过程中必须解决的一个关键问题。陈树辉等<sup>[5]</sup>建立了以频率增量或振幅增量或二者交替使用追踪响应曲线的方法,Cheung 等<sup>[6]</sup>提出以弧长增量追踪曲线的变化。以上方法在系数稳定增长的情况下是可行的,但是在一些谐波参数系数跳变的情况下,很难得到计算结果,必须结合具体情况进行求值。为了解决非线性区间的多值求解问题,本研究以 IHB 方法为基础,针对强迫杜芬方程,应用自动求解算法来实现多值区间的求解,同时对求解结果进行验证。

## 1 强迫杜芬方程 IHB 计算流程

强迫杜芬方程的非线性常微分方程可以定义为

$$\ddot{x} + c\dot{x} + k_1x + k_3x^3 = F\cos \omega t \quad (1)$$

其中: $x$  是系统的位置坐标, $\dot{x}$  是系统的速度, $\ddot{x}$  是系统的加速度, $c$  是阻尼系数, $t$  是时间, $F$  是强迫力, $\omega$  是频率。

首先,对式(1)进行变换,选用无关时间变量  $\tau$ ,令  $\tau = \omega t$ ,式(1)变为关于新的时间变量  $\tau$  的微分方程:

$$\omega^2 x'' + c\omega x' + k_1x + k_3x^3 = F\cos \tau \quad (2)$$

IHB 求解非线性方程主要包括 Newton-Raphson 增量过程和 Galerkin 过程。其中,Newton-Raphson 增量过程的具体求解步骤如下。

设  $x_0, \omega_0$  是振动方程(2)的解,则其临近点可用参数增量表示为

$$x = x_0 + \Delta x, \omega = \omega_0 + \Delta \omega \quad (3)$$

其中: $\Delta x, \Delta \omega$  为增量。

把式(3)代入式(2),略去高价小量,整理后可得到以  $\Delta x, \Delta \omega$  为未知量的增量方程:

$$\omega_0^2 \Delta x'' + c\omega_0 \Delta x' + (k_1 + 3k_3x_0^2) \Delta x = R_1 - (2\omega_0 x_0'' + c\dot{x}_0) \Delta \omega \quad (4)$$

其中, $R_1$  称为不平衡力,

$$R_1 = F\cos \tau - (\omega_0^2 x_0'' + c\omega_0 x_0' + k_1x_0 + k_3x_0^3) \quad (5)$$

当  $x_0, \omega_0$  为准确解时, $R_1 = 0$ 。

Galerkin 过程作为 IHB 方法的第二步,具体求解过程如下。

设杜芬方程(4)有周期解  $x$ ,把  $x$  写成 Fourier 级数为

$$x(\tau) = a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i \cos i\tau + b_i \sin i\tau) \quad (6)$$

记初始近似解为  $x = \mathbf{X}\mathbf{A}_0$ 。 (7)

其中: $\mathbf{X} = [1 \quad \cos \tau \quad \cdots \quad \cos i\tau \quad \sin \tau \quad \sin 2\tau \quad \cdots \quad \sin i\tau]$ ,  $\mathbf{A}_0 = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_i \quad b_1 \quad \cdots \quad b_i]^T$ ,  $\Delta x = \mathbf{X}\Delta\mathbf{A}$ ,  $\Delta\mathbf{A} = [\Delta a_0 \quad \Delta a_1 \quad \cdots \quad \Delta a_i \quad \Delta b_1 \quad \cdots \quad \Delta b_i]^T$ 。 (8)

把式(7)、式(8)代入式(4),对式(4)在周期  $2\pi$  内进行 Galerkin 积分可得:

$$\int_0^{2\pi} \delta \Delta x (\omega_0^2 \Delta \ddot{x} + c\omega_0 \Delta \dot{x} + (k_1 + 3k_3x_0^2) \Delta x) d\tau = \int_0^{2\pi} \delta \Delta x R_1 d\tau - \int_0^{2\pi} \delta \Delta x (2\omega_0 \ddot{x}_0 + c\dot{x}_0) \Delta \omega d\tau$$

把上式合并化简为

$$\left\{ \int_0^{2\pi} \mathbf{X}^T [\omega_0^2 \ddot{\mathbf{X}} + c\omega_0 \dot{\mathbf{X}} + (k_1 + 3k_3x_0^2) \mathbf{X}] d\tau \right\} \Delta \mathbf{A} = \left\{ \int_0^{2\pi} \mathbf{X}^T \mathbf{R}_1 d\tau - \int_0^{2\pi} \mathbf{X}^T (2\omega_0 \ddot{\mathbf{X}} + c\dot{\mathbf{X}}) \mathbf{A}_0 d\tau \right\} \Delta \omega$$

即等价于  $\mathbf{K}\Delta\mathbf{A} = \mathbf{R} + \mathbf{R}_m\Delta\omega$ 。 (9)

其中: $\mathbf{K} = \int_0^{2\pi} \mathbf{X}^T [\omega_0^2 \ddot{\mathbf{X}} + c\omega_0 \dot{\mathbf{X}} + (k_1 + 3k_3x_0^2) \mathbf{X}] d\tau$ ,  $\mathbf{R}_m = - \int_0^{2\pi} \mathbf{X}^T (2\omega_0 \ddot{\mathbf{X}} + c\dot{\mathbf{X}}) \mathbf{A}_0 d\tau$ ,  $\mathbf{R} = \int_0^{2\pi} \mathbf{X}^T \mathbf{R}_1 d\tau$ 。

式(9)即杜芬方程 IHB 方法的计算公式,该公式未知量的数目比方程的数目多一个,求解时必须指定某一增量,比如可以指定  $\Delta\omega$  为控制增量进行迭代计算,直至不平衡力  $\mathbf{R}_1$  趋近于零,此时得到  $\mathbf{A}$  作为相应外激励频率下的稳态强迫周期振动的振幅向量。由此方法所得数据即可绘制出强迫振动的幅频响应曲线图。

## 2 强迫杜芬方程非线性区间多值特点

利用第 1 节给出的方法和步骤,求解强迫杜芬方程的幅频特性曲线。可假设方程(1)中系数  $c=0, k_1=1, k_3=0.05, F=1$ 。设  $\omega$  为控制增量,当  $\Delta\omega$  取正增量,  $\omega$  逐渐增大时,振幅由图 1 的  $AFB$  段向右延伸,在  $\omega_2$  时箭头指示方向,向下跳转到  $CD$  段,形成  $AFBCD$  段图像;当  $\Delta\omega$  取负增量,  $\omega$  逐渐减小时,从图 1 的  $DCE$  段向左延伸,在  $\omega_1$  时向上跳转到  $FA$  段。两个图像合并得到图 1。

由图 1 可见,在  $BE$  段内没有求出所对应的值,主要原因是增量谐波平衡法在转换为线性矩阵系统后,每次只能求出一个值。而在区间  $[\omega_1, \omega_2]$  上,同一频率对应三个不同的振幅值,求出  $BE$  段内的值是关键。求不出值的原因有两个:①当  $\Delta\omega$  增加时,振动幅值剧烈增长,根据式(5),因计算误差较大而舍弃;②当  $\omega$  在一定区间时,振动幅值增长不再沿  $\omega$  方向发展,而趋向相反的方向,所以不能求出对应的值。

从式(6)可以看出,系统的振幅由谐波项系数组成,振动幅值的大小与谐波项系数息息相关,当以  $\omega$  为增量时,谐波项系数剧烈增长是导致误差太大的原因。此时,可以变换为以此谐波项系数为主动增量,其他系数及  $\omega$  为被动增量,以有效克服这些弊端。

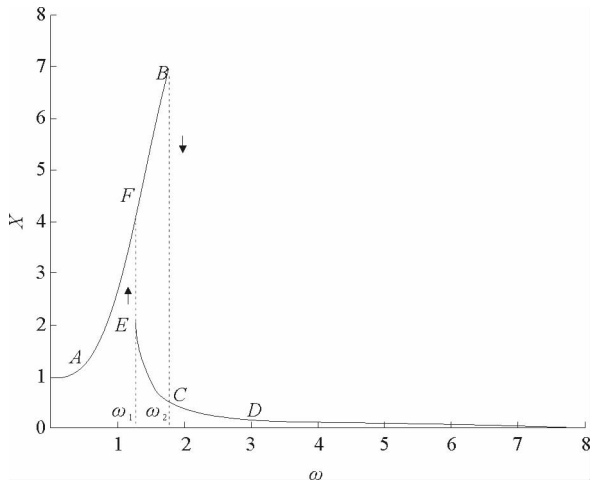


图 1 以  $\omega$  为增量的幅频图

Fig. 1 The amplitude frequency diagram with  $\omega$  as incremental coefficient

## 3 多值自动求解算法

多值自动求解算法是在非线性方程多值情况下,以  $\omega$  为主动变量不能全部求出所有对应值,而采取的以变换为某一谐波项系数为主动变量,求解非线性振动方程的一种方法。根据第 2 节的分析,  $BE$  段内没有求出所对应的值,主要因为以  $\omega$  为主动增量谐波系数增长与系数方向变化产生了矛盾。经过求值发现,此段主要与谐波项系数  $a_1$  有关,因而把谐波项系数  $a_1$  变换成主动增量,具体做法如下。

把式(9)转换为以  $\Delta a_1$  为增量的方程:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & -r_{m1} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & -r_{m2} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1} & -r_{mn} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_0 \\ \Delta\omega \\ \vdots \\ \Delta b_{\frac{n-1}{2}} \end{bmatrix} = \mathbf{R} + \begin{bmatrix} -k_{12} \\ -k_{22} \\ \vdots \\ -k_{n2} \end{bmatrix} \Delta a_1,$$

化简可得:

$$\mathbf{K}_s \Delta \mathbf{A}_s = \mathbf{R} + \mathbf{R}_s \Delta a_1, \mathbf{K}_s = [\mathbf{K}_1 \quad -\mathbf{R}_m \quad \mathbf{K}_3 \quad \cdots \quad \mathbf{K}_n]_{n \times 1}. \quad (11)$$

其中,  $\mathbf{K}_i = [k_{1i} \quad k_{2i} \quad \cdots \quad k_{ni}]^T$ ,  $\Delta \mathbf{A}_s = [\Delta a_0 \quad \Delta\omega \quad \Delta a_2 \quad \cdots \quad \Delta b_{\frac{n-1}{2}}]^T$ ,  $\mathbf{R}_s = [-\mathbf{K}_2]_{n \times 1}$ 。

式(11)即以  $\Delta a_1$  为增量的方程。根据此方程可以求出其他谐波项系数增量及  $\Delta\omega$  值。具体求解时可取图 1 中  $E$  点附近的一点作为初始值,  $\Delta a_1$  取正增量,与式(9)做类似的迭代求值,最后得到图 2。

从图 2 可以看出,  $\omega_2$  值比图 1 中  $\omega_2$  大, 主要原因是选择了  $\Delta a_1$  为控制增量, AFB 段向上得到延伸; 在 DEC 段, 伴着  $\Delta a_1$  为增量计算出了 AGC 段的值(图 2)。在  $\omega_1 - \omega_2$  频段内每个  $\omega$  值对应 3 个幅值, 上下两端值是以  $\Delta\omega$  为增量得到的, 而中间值是通过谐波系数  $\Delta a_1$  为增量得到的值。

杜芬方程选择不同的阻尼系数、非线性系数等参数时, 得到的幅频特性曲线也不同, 要根据不同条件自动得到振幅与频率所有对应的值, 必须寻求频率与振幅的变化规律。

根据频率求值时, 谐波项的变化情况, 可以定义增长率  $k$ ,  $k$  为谐波项系数变化与频率变化的比值, 并取增长率绝对值最大的一项作为判定是否满足更换主动增量的条件。式(12)给出求最大系数变化率的公式, 根据实际情况, 据此条件来判定是否需要将系数更换为主动增量。

$$k = \max \left[ \left| \frac{\Delta a_0}{\Delta \omega} \right|, \left| \frac{\Delta a_1}{\Delta \omega} \right|, \dots, \left| \frac{\Delta b_n}{\Delta \omega} \right| \right]. \quad (12)$$

同样, 以谐波项系数为变量计算,  $k < 2$  时, 再变换为以  $\omega$  为增量的方程。

以上思路绘成流程如图 3 所示。图 3 是根据系数与频率的变化情况自动选择某个谐波系数, 求出所对应的值。

总之, 在多值区间求解时, 必须根据谐波项系数与频率的增长情况自动转换成某一谐波项系数为主动增量才能求出所有对应值。

#### 4 求值结果验证与分析

为了检验第 3 节所求得值是否是杜芬方程中的一个值, 与数值积分四阶 Runge-Kutta 法计算结果进行比较, 检验这两种方法求得的结果是否一致。Runge-Kutta 法具有精度高、收敛、稳定、不需要计算高阶导数等优点, 能有效验证具有初始值的非线性方程。

在  $[\omega_1, \omega_2]$  上取曲线上三个点 E, G, H(图 2), 取 E 点位于幅频特性曲线的上端值, G 点取中间值, 取 H 点位于幅频曲线下端值。首先用四价 Runge-Kutta 数值积分法来分析 E 点。把前面通过 IHB 方法求得的谐波项系数及其对应的  $\omega$  分别抽取一个值写出:

$$E(1.527\ 000) = \{0, 6.216\ 387, 0, 0.176\ 178, 0, 4.830\ 483 \times 10^{-3}, 0, 1.325\ 954 \times 10^{-4}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 6.397\ 528, 0, 4, -0.000\ 696\};$$

$$G(1.527\ 975) = \{0, -5.483\ 064, 0, -0.116\ 201, 0, -2.428\ 536 \times 10^{-3}, 0, -5.065\ 793 \times 10^{-5}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -5.601\ 744, 0, 1, 0.000\ 201\};$$

$$H(1.527\ 203) = \{0, -0.763\ 064, 0, -0.000\ 278, 0, -1.062\ 007 \times 10^{-7}, 0, -4.008\ 068 \times 10^{-11}, 0, 0,$$

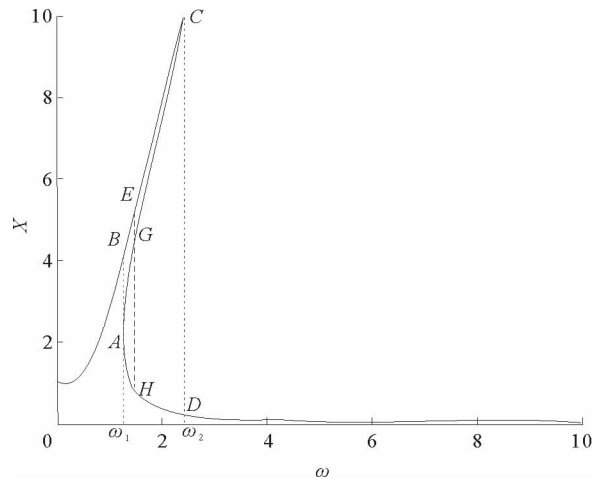


图 2 IHB 方法生成的完整幅频图

Fig. 2 The complete amplitude frequency diagram generated by using IHB method

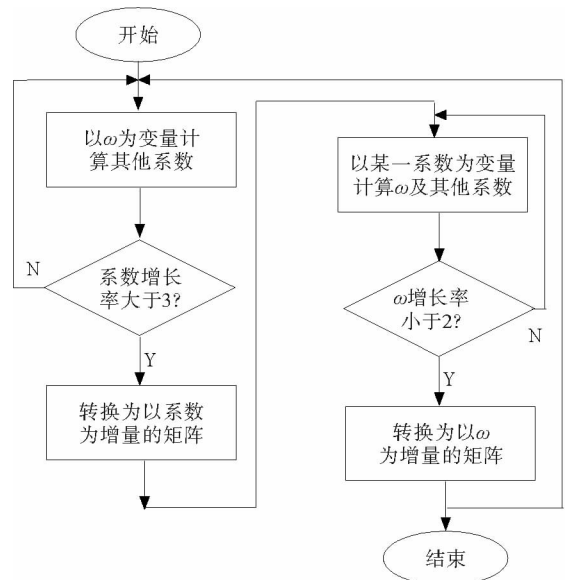


图 3 自动求解算法流程图

Fig. 3 The flow chart of automatic solution algorithm

$0, 0, 0, 0, 0, -0.763\ 343, 0, 2.000\ 000, 0\}$ ;

$E, G, H$  对应 Fourier 级数式(6)中的谐波项系数,对式(6)求导,得到对应点的速度

$$V = \dot{x}(\tau) = \sum_{i=1}^n (ib_i \cos i\tau - ia_i \sin i\tau), \quad (13)$$

把  $E, G, H$  代入式(6)和式(13),得到四价 Runge-Kutta 法积分的起始点。把式(1)转换为

$$\begin{cases} \dot{y} = \dot{x} \\ \dot{y} = F \cos \omega t - (cy + k_1 x + k_3 x^3) \end{cases}, \quad (14)$$

把  $E$  点代入并利用式(14)采用四阶 Runge-Kutta 积分得到相轨迹如图 4 所示。

把式(6)变换为

$$x(t) = a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i \cos i\omega t + b_i \sin i\omega t), \quad (15)$$

求导得到

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n (b_i i\omega \cos i\omega t - a_i i\omega \sin i\omega t). \quad (16)$$

以时间为变量,把  $E$  点带入式(15)和式(16),就得到以 IHB 方法的相轨迹,如图 5 所示。比较图 4 和图 5,发现两图是完全重合的,说明采用 IHB 方法与 Runge-Kutta 法计算具有相同的精确度。采用同样方法验证  $H$  点,也可得到相同的结论。

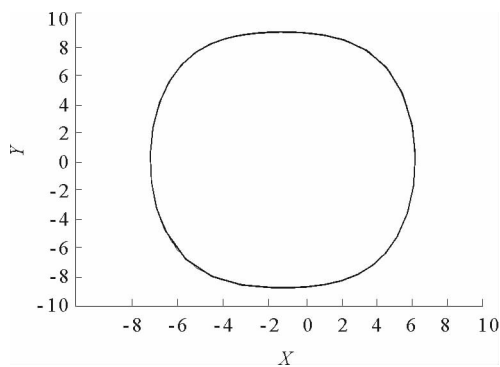


图 4 采用 Runge-Kutta 法得到的相轨迹图

Fig. 4 The phase trajectory diagram generated by using Runge-Kutta method

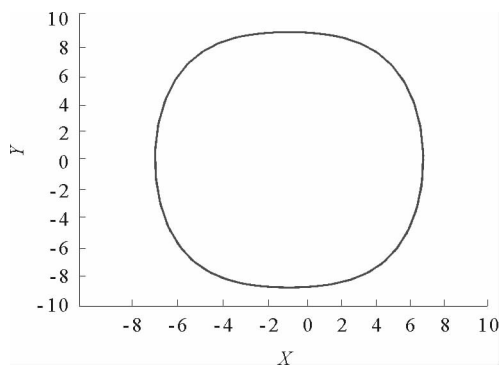


图 5 采用 IHB 法得到的相轨迹图

Fig. 5 The phase trajectory diagram generated by using IHB method

把中间  $G$  点进行代入,发现在起始的一段时间内,这两个图形是重合的,如图 6 所示,也就证明了通过转换  $a_1$  为增量求得的一段值是杜芬方程的值。

随着时间的延长,采用 Runge-Kutta 法绘制的线逐渐脱离平衡点,围着开始的轨迹旋转(图 7),说明此点是不稳定点<sup>[7]</sup>。由于采用四阶 Runge-Kutta 积分法在积分过程中有舍去误差的原因,逐渐脱离了稳定区域,从而说明采用变换谐波项系数的方法求得的点是合理的。

## 5 结束语

采用 IHB 方法把杜芬方程强迫振动的幅频特性多值区间逐一求出,说明根据频率与谐波项系数的增长变化关系而设计的自动求解算法,可以求出非线性振动响应的多个振动幅值,并用 Runge-Kutta 法验证了正确性。此算法可以推广到以增量谐波平衡法为基础的其他非线性振动方程的求解过程。

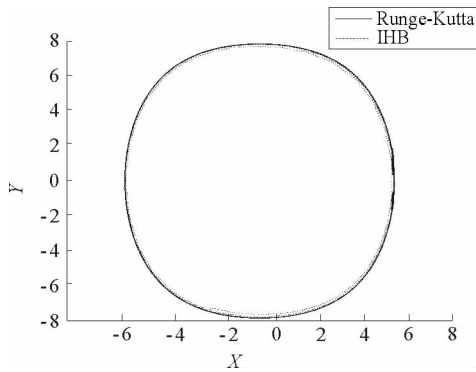


图6 G点在起始一段时间内的相轨迹图

Fig. 6 The phase trajectory diagram generated by G value a period of time after the initial point

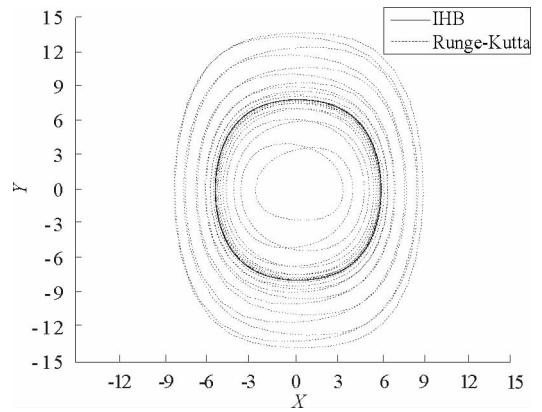


图7 G点带入长时间的相轨迹图

Fig. 7 The phase trajectory diagram generated by G value after long time period

### 参考文献:

- [1] Lau S L, Cheung Y K. Amplitude incremental variational principle for nonlinear vibration of elastic systems[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1981, 48: 959-964.
- [2] 白鸿柏, 黄协清. 三次非线性粘性阻尼双线性滞迟振动系统 IHB 分析方法[J]. 西安交通大学学报, 1998, 32(10): 35-39  
Bai Hongbai, Huang Xieqing. Response of forced vibration of bilinear hysteretic oscillator[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 1998, 32(10): 35-39.
- [3] 杨少普, 申永军, 刘献栋. 基于增量谐波平衡法的齿轮系统非线性动力学[J]. 振动与冲击, 2005, 24(3): 40-42.  
Yang Shaopu, Shen Yongjun, Liu Xiandong. Nonlinear dynamics of gear system based on incremental harmonic balance method[J]. Journal of Vibration and Shock, 2005, 24(3): 40-42.
- [4] 陈树辉, 黄建亮, 余锦炎. 轴向运动梁横向非线性振动研究[J]. 动力学与控制学报, 2004, 2(1): 40-45.  
Chen Shuhui, Huang Jianliang, She Jinyan. Study on the laterally nonlinear vibration of axially moving beams[J]. Journal of Dynamics and Control, 2004, 2(1): 40-45.
- [5] 陈树辉. 强非线性振动系统的定量分析方法[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 169-211.
- [6] Cheung Y K, Chen S H, Lau S L. Application of incremental harmonic balance method to cubic nonlinear system[J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, 140(2): 273-286.
- [7] 刘延柱, 陈立群. 非线性振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003: 57-123.

(责任编辑: 吕文红)