具有脉冲毒素输入的随机收获模型最优捕获策略

刘文昌，孟新柱

（山东科技大学 数学与系统科学学院，山东 青岛 266590）

摘　要：考虑一类具有脉冲毒素输入的随机收获模型，研究在收获项受到白噪声干扰下的最优捕获策略。利用随机微分方程和脉冲微分方程理论，讨论确定性模型的灭绝与持久性；研究随机干扰条件下关于种群灭绝性和持久性的阈值；获得了产量最优和经济最优的捕获策略。研究结果表明，随机干扰不利于经济开发。

关键词：脉冲效应；随机扰动；随机持久；最优捕获

中图分类号：O175　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-3767(2015)05-0098-06

Optimal Harvesting Strategies for Stochastic Harvest Model with Impulsive Toxicant Input

Liu Wenchang，Meng Xinzhu

(College of Mathematics and Systems Science，Shandong University of Science and Technology，Qingdao，Shandong 266590，China)

Abstract：This paper studies the optimal harvesting strategy under white noise interference for a stochastic harvest model with impulsive toxicant input. By using stochastic differential equations and impulsive differential equations，this paper first discussed the permanence and extinction of the deterministic model，then investigated the threshold of population extinction and persistence under stochastic disturbance，and finally obtained the optimal harvesting strategies in both yield and economy. Results show that stochastic disturbance goes against economic development.

Key words：impulsive effects；stochastic disturbance；stochastic permanence；optimal harvesting

生物资源的开发利用一直是经济可持续发展的研究热点。自然界中的生物种群经常会受到某些偶然因素的干扰，如火灾、地震、种植、收获等，使得生物的内在规律和生活环境发生突然变化，在数学领域中，人们将这些变化描述成脉冲现象。

近年来，许多学者研究了毒素对种群的影响[1-2]以及生物的最优捕获问题[3-6]，但是这些文献大多是研究确定性模型，而在毒素输入较大时，种群最终将会灭绝，在这个过程中种群数量将逐渐减少，因而受随机因素的影响会越来越大，确定性模型难以准确描述系统的状态，且得到的阈值将会和实际情况相差很大。因此，在一些情况下，随机模型更具有合理性。最近，一些作者[7-9]研究了噪声对种群灭绝性和持久性的影响。在此基础上，本研究结合脉冲毒素对种群的影响，建立随机模型，讨论收获受到随机干扰时的最优捕获策略。

1　确定性系统的灭绝性和持久性

首先讨论确定性模型，通过对确定性系统的灭绝性和持久性的研究，获得阈值并进行讨论。

设 $x(t)$，$C_0(t)$，$C_e(t)$ 分别表示时刻 t 的种群数量、生物个体体内毒素浓度和环境毒素浓度，r 表示不存

收稿日期：2015-04-09

基金项目：国家自然科学基金项目(11371230)；山东省自然科学基金项目(ZR2012AM012)；山东科技大学科研创新团队项目(2014TDJH102)；山东科技大学研究生创新基金项目(YC140107)；山东科技大学教学研究“群星计划”基金项目(QX2013227)

作者简介：孟新柱(1972—)，男，山东菏泽人，教授，博士，主要从事生物数学方面的研究，本文通信作者.

E-mail：mxz721106@sdust.edu.cn

在毒素时生物的内禀增长率，a 表示生物种内制约因子，E 表示捕获率。

假设环境容纳量足够大，由生物体内排泄到环境中的毒素对环境中毒素浓度的影响忽略不计，通过对 Hallam [1] 关于单种群在污染环境中生存的经典的确定性数学模型的简化，获得脉冲毒素输入环境下的单种群捕获模型：

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t)=[x(t)(r-ax(t)-C_0(t))-Ex(t)]\mathrm{d}t, & t\neq n\tau, n\in \mathbf{Z}^+ \\ \mathrm{d}C_0(t)=[kC_e(t)-(g+m)C_0(t)]\mathrm{d}t, & t\neq n\tau, n\in \mathbf{Z}^+ \\ \mathrm{d}C_e(t)=-hC_e(t)\mathrm{d}t, & t\neq n\tau, n\in \mathbf{Z}^+ \\ \Delta x(t)=0,\Delta C_0(t)=0,\Delta C_e(t)=\mu, & t=n\tau, n\in \mathbf{Z}^+ \end{cases}。\tag{1}$$

为了方便进行数学上的推导，给出以下符号和定义：

本文中，$S(t)$，$x(t)$，$C_0(t)$ 在 $t=n\tau$ 上连续，$C_e(t)$ 在 $t=n\tau$ 上左连续，$C_e(n\tau^+)=\lim\limits_{t\to n\tau^+}C_e(t)$，$f$ 是在 $[0,+\infty)$ 上的可积函数，记 $[f(t)]\triangleq \dfrac{1}{t}\int_0^t f(\theta)\mathrm{d}\theta$。

定义 1.1 如果 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$，则称种群 $x(t)$ 是灭绝的。

定义 1.2 如果存在一个正常数 λ，使得 $\lim\limits_{t\to+\infty}\inf[x(t)]\geqslant\lambda$，则称种群 $x(t)$ 是持久的。

下面给出系统(1)子系统的一些基本性质：

$$\begin{cases} C'_0(t)=kC_e(t)-(g+m)C_0(t), & t\neq n\tau, n\in \mathbf{Z}^+ \\ C'_e(t)=-hC_e(t), & t\neq n\tau, n\in \mathbf{Z}^+ \\ \Delta C_0(t)=0,\Delta C_e(t)=\mu, & t=n\tau, n\in \mathbf{Z}^+ \end{cases}。\tag{2}$$

引理 1.1 $(C_0^*(t),C_e^*(t))$ 是系统(2)的唯一正 $\tau-$ 周期解，系统(2)的任意解 $(C_0(t),C_e(t))$ 在 $t\to+\infty$ 时，$C_0(t)\to C_0^*(t)$ 和 $C_e(t)\to C_e^*(t)$，并且，如果 $C_0(0)>C_0^*(0)$ 和 $C_e(0)>C_e^*(0)$，则当 $t\geqslant 0$ 时，$C_0(t)>C_0^*(t)$ 和 $C_e(t)>C_e^*(t)$，

$$\begin{cases} C_0^*(t)=C_0^*(0)\mathrm{e}^{-(g+m)(t-n\tau)}+\dfrac{k\mu(\mathrm{e}^{-(g+m)(t-n\tau)}-\mathrm{e}^{-h(t-n\tau)})}{(h-g-m)(1-\mathrm{e}^{-h\tau})} \\ C_e^*(t)=\dfrac{\mu\mathrm{e}^{-h(t-n\tau)}}{1-\mathrm{e}^{-h\tau}} \\ C_0^*(0)=\dfrac{k\mu(\mathrm{e}^{-(g+m)\tau}-\mathrm{e}^{-h\tau})}{(h-g-m)(1-\mathrm{e}^{-(g+m)\tau})(1-\mathrm{e}^{-h\tau})} \\ C_e^*(0)=\dfrac{\mu}{1-\mathrm{e}^{-h\tau}} \end{cases}, t\in(n\tau,(n+1)\tau], n\in\mathbf{Z}^+。$$

计算得

$$\lim_{t\to+\infty}[C_0(t)]=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t C_0(s)\mathrm{d}s=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t C_0^*(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{\tau}\int_{n\tau}^{(n+1)\tau}C_0^*(t)\mathrm{d}t=\frac{k\mu}{h(g+m)\tau}\triangleq\bar{C}_0。\tag{3}$$

1.1 确定性系统的灭绝性

当 $x=0$ 时，系统(1)的解称为灭绝周期解，满足定理 1.1。

定理 1.1 如果 $\tau<\dfrac{k\mu}{h(g+m)(r-E)}$，则系统(1)的灭绝周期解 $(0,C_0^*(t),C_e^*(t))$ 是全局渐近稳定的，即系统是灭绝的。

证明：由引理 1.1 可知，唯一正周期解 $C_0^*(t)$ 和 $C_e^*(t)$ 在脉冲下的形式分别为：

$C_0^*(t)=C_0^*(0)\mathrm{e}^{-(g+m)(t-n\tau)}+\dfrac{k\mu(\mathrm{e}^{-(g+m)(t-n\tau)}-\mathrm{e}^{-h(t-n\tau)})}{(h-g-m)(1-\mathrm{e}^{-h\tau})}$，$t\in(n\tau,(n+1)\tau]$，$n\in\mathbf{Z}^+$，初始值为

$$C_0^*(0)=\frac{k\mu(\mathrm{e}^{-(g+m)\tau}-\mathrm{e}^{-h\tau})}{(h-g-m)(1-\mathrm{e}^{-(g+m)\tau})(1-\mathrm{e}^{-h\tau})};$$

$C_e^*(t)=\dfrac{\mu\mathrm{e}^{-h(t-n\tau)}}{1-\mathrm{e}^{-h\tau}}$，$t\in(n\tau,(n+1)\tau]$，$n\in\mathbf{Z}^+$，初始值为 $C_e^*(0)=\dfrac{\mu}{1-\mathrm{e}^{-h\tau}}$。

灭绝周期解 $(0,C_0^*(t),C_e^*(t))$ 的稳定性由以下雅可比矩阵 J 直接线性化求得

$$\boldsymbol{J}(t)=\begin{pmatrix} r-E-C_0^*(t) & 0 & 0 \\ 0 & -(g+m) & k \\ 0 & 0 & -h \end{pmatrix},$$

然后通过变换得到
$$\boldsymbol{M}(\tau)=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\int_0^\tau r-E-C_0^*(t)\mathrm{d}t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-(g+m)\tau} & * \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-h\tau} \end{pmatrix}。$$

其中，$*$ 式在后文的计算中不涉及，因此这里没有必要写出具体表达式。

通过计算得 $\lambda_1=\mathrm{e}^{\int_0^\tau r-E-C_0^*(t)\mathrm{d}t}$，$\lambda_2=\mathrm{e}^{-(g+m)\tau}<1$，$\lambda_3=\mathrm{e}^{-h\tau}<1$ 。根据 Floquet 理论可知，如果 $\lambda_1<1$，即当 $\tau<\dfrac{k\mu}{h(g+m)(r-E)}$ 时，则灭绝周期解 $(0,C_0^*(t),C_e^*(t))$ 是稳定的。因此，该系统灭绝。

1.2 确定性系统的持久性

定理 1.2 如果 $\tau>\dfrac{k\mu}{h(g+m)(r-E)}$，则系统(1)是持久的，并且

$$\lim_{t\to+\infty}[x(t)]\geqslant\frac{r-E-\dfrac{k\mu}{h(g+m)\tau}}{a}。$$

证明： 由系统(1)的第一个方程，得

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{x(t)}=[r-E-ax(t)-C_0(t)]\mathrm{d}t, \tag{4}$$

对方程(4)两边积分并除以 t，得

$$\frac{\ln x(t)}{t}-\frac{\ln x_0}{t}=r-E-\frac{a}{t}\int_0^t x(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{t}\int_0^t C_0(t)\mathrm{d}t=r-E-[C_0(t)]-a[x(t)],$$

因此，

$$a[x(t)]=r-E-[C_0(t)]+\frac{\ln x_0}{t}-\frac{\ln x(t)}{t}\geqslant\begin{cases} r-E-[C_0(t)]+\dfrac{\ln x_0}{t}, & 0<x(t)<1 \\ r-E-[C_0(t)]+\dfrac{\ln x_0}{t}-\dfrac{\ln x(t)}{t}, & 1\leqslant x(t) \end{cases}。 \tag{5}$$

对式(5)两边求极限，得

$$\lim_{t\to+\infty}[x(t)]\geqslant\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{a}\left[r-E-[C_0(t)]+\dfrac{\ln x_0}{t}\right], & 0<x(t)<1 \\ \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{a}\left[r-E-[C_0(t)]+\dfrac{\ln x_0}{t}-\dfrac{\ln x(t)}{t}\right], & 1\leqslant x(t) \end{cases}。$$

当 $x(t)\geqslant1$ 时，有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln x(t)}{t}=0$，$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln x_0}{t}=0$ 。所以 $\lim\limits_{t\to+\infty}[x(t)]\geqslant\dfrac{r-E-\frac{k\mu}{h(g+m)\tau}}{a}$，即，当 $\tau>\dfrac{k\mu}{h(g+m)(r-E)}$ 时，有 $\lim\limits_{t\to+\infty}[x(t)]>0$，所以种群 $x(t)$ 持久生存。证明完毕。

2 随机模型的灭绝性与持久性

2.1 随机模型的建立

假设只有捕获率 E 受到白噪声的干扰，也就是把系统(1)中的 E 换成 $E+\rho\dot{B}_t$，其中 $\dot{B}_t$ 是白噪声，而 ρ 表示噪声的强度。于是确定性生物增长捕获方程就变成随机方程：

$$\mathrm{d}x(t)=x(t)[r-E-ax(t)-C_0(t)]\mathrm{d}t+\rho x(t)\mathrm{d}B_t,$$

其中，B_t 是一维标准布朗运动。于是模型(1)可以写成污染环境下脉冲随机干扰收获的生物资源捕获模型：

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t) = x(t)[r-E-ax(t)-C_0(t)]\mathrm{d}t+\rho x(t)\mathrm{d}B_t, & t\neq n\tau, n\in\mathbf{Z}^+ \\ \mathrm{d}C_0(t) = [kC_e(t)-(g+m)C_0(t)]\mathrm{d}t, & t\neq n\tau, n\in\mathbf{Z}^+ \\ \mathrm{d}C_e(t) = -hC_e(t)\mathrm{d}t, & t\neq n\tau, n\in\mathbf{Z}^+ \\ \Delta x(t)=0, \Delta C_0(t)=0, \Delta C_e(t)=\mu, & t=n\tau, n\in\mathbf{Z}^+ \end{cases}, \tag{6}$$

初值条件 $x(0)=x_0>0$，模型中其他参数的含义与前文相同。

2.2 随机系统的灭绝性与持久性

定义 2.1 如果存在一个正常数 λ，使得 $\liminf\limits_{t\to+\infty}[x(t)]\geqslant\lambda$，则称随机系统(6)中的种群 $x(t)$ 是随机持久的。

定理 2.1 对于随机模型(6)，如果 $\tau<\dfrac{k\mu}{h(g+m)\left(r-E-\dfrac{\rho^2}{2}\right)}$，则系统将趋于灭绝。

证明： 由伊藤公式，有

$$\mathrm{d}\ln x=\frac{\mathrm{d}x}{x}-\frac{(\mathrm{d}x)^2}{2x^2}=\left[r-E-C_0(t)-\frac{\rho^2}{2}-ax\right]\mathrm{d}t+\rho\mathrm{d}B_t, \tag{7}$$

对方程(7)的两边积分并除以 t，得

$$\frac{\ln x(t)}{t}=r-E-\frac{\rho^2}{2}-\frac{a}{t}\int_0^t x(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{t}\int_0^t C_0(t)\mathrm{d}t+\frac{\ln x_0}{t}+\rho\frac{B_t}{t}, \tag{8}$$

$$\frac{\ln x(t)}{t}\leqslant r-E-\frac{\rho^2}{2}-[C_0(t)]+\frac{\ln x_0}{t}+\rho\frac{B_t}{t}。 \tag{9}$$

由强大数定律[10-11]可知，$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{B_t}{t}=0$ a. s.，且 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln x_0}{t}=0$ a. s.。对(9)式两边求上极限，由式(3)以及 $\tau<\dfrac{k\mu}{h(g+m)\left(r-E-\dfrac{\rho^2}{2}\right)}$，可得 $\limsup\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln x(t)}{t}\leqslant r-E-\dfrac{\rho^2}{2}-\dfrac{k\mu}{h(g+m)\tau}<0$，所以，$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$ a. s.，即系统最终趋于灭绝。

定理 2.2 对于随机模型(6)，如果 $\tau>\dfrac{k\mu}{h(g+m)\left(r-E-\dfrac{\rho^2}{2}\right)}$， 则系统是随机持久的。

证明： 由方程(8)可知

$$a[x(t)]=r-E-\frac{\rho^2}{2}-\frac{1}{t}\int_0^t C_0(t)\mathrm{d}t+\frac{\ln x_0}{t}-\frac{\ln x(t)}{t}+\rho\frac{B_t}{t}\geqslant$$

$$\begin{cases} r-E-\dfrac{\rho^2}{2}-[C_0(t)]+\dfrac{\ln x_0}{t}+\rho\dfrac{B_t}{t}, & 0<x(t)<1 \\ r-E-\dfrac{\rho^2}{2}-[C_0(t)]+\dfrac{\ln x_0}{t}-\dfrac{\ln x(t)}{t}+\rho\dfrac{B_t}{t}, & 1\leqslant x(t) \end{cases}, \tag{10}$$

由强大数定律[10-11]可知 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{B_t}{t}=0$，又因为当 $x(t)\geqslant 1$ 时，有 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln x(t)}{t}=0$ a. s.，$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln x(0)}{t}=0$ a. s.，所以，对式(10)两边求下极限，由式(3)以及 $\tau>\dfrac{k\mu}{h(g+m)\left(r-E-\dfrac{\rho^2}{2}\right)}$，得

$$\liminf_{t\to+\infty}[x(t)]\geqslant\frac{r-E-\dfrac{\rho^2}{2}-\dfrac{k\mu}{h(g+m)\tau}}{a}>0 \text{ a. s.},$$

即系统是随机持久的。

由定理 2.1 和定理 2.2 可知，$\tau=\dfrac{k\mu}{h(g+m)\left(r-E-\dfrac{\rho^2}{2}\right)}$ 是随机持久和灭绝的阈值。也就是说，当 $\tau>$

$\dfrac{k\mu}{h(g+m)\left(r-E-\dfrac{\rho^2}{2}\right)}$ 时，系统是持久的；而当 $\tau<\dfrac{k\mu}{h(g+m)\left(r-E-\dfrac{\rho^2}{2}\right)}$ 时，系统将趋于灭绝。

3 最优捕获策略

根据方程(7)可求得式(4)的解关于时间的平均值的极限为：

$$\lim_{t\to+\infty}[x(t)]=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s=\lim_{t\to+\infty}\frac{r-E-\dfrac{\rho^2}{2}-[C_0(t)]}{a}=\frac{r-E-\dfrac{\rho^2}{2}-\dfrac{k\mu}{h(g+m)\tau}}{a}\triangleq x^*。$$

相应于 E 的单位时间产量

$$F(E)=x^*E=\frac{E\left[r-E-\dfrac{\rho^2}{2}-\dfrac{k\mu}{h(g+m)\tau}\right]}{a}。$$

推论 1 $F(E)$ 是关于 E 的一元二次方程，所以，当 $E_0<r-\dfrac{\rho^2}{2}-\dfrac{k\mu}{h(g+m)\tau}$ 时，$F(E)$ 有唯一极值点 $E_0=\dfrac{1}{2}\left(r-\dfrac{\rho^2}{2}-\dfrac{k\mu}{h(g+m)\tau}\right)$，因而，最优捕获努力量为 $E_s^*=\dfrac{1}{2}\left(r-\dfrac{\rho^2}{2}-\dfrac{k\mu}{h(g+m)\tau}\right)$，最大持续产量的数学期望的最大值为 $F_s^*=\dfrac{1}{4a}\left(r-\dfrac{\rho^2}{2}-\dfrac{k\mu}{h(g+m)\tau}\right)^2$，相应最大持续产量的数学期望最大值的方差为 $D_s^*=\dfrac{\rho^2}{16a^2}\left(r-\dfrac{\rho^2}{2}-\dfrac{k\mu}{h(g+m)\tau}\right)^3$。

由于资源的开发是经济行为，所以不可避免地需要将经济因素考虑到捕获模型中。

推论 2 设捕获物的市场单价 $p>0$，单位捕获量的成本为 $q>0$，所以可持续的最大净收益为

$$Y(E_s^*)=\max_{E_0\in\left(0,r-\frac{\rho^2}{2}-\frac{k\mu}{h(g+m)\tau}\right)}Y(E_0)=\max_{E_0\in\left(0,r-\frac{\rho^2}{2}-\frac{k\mu}{h(g+m)\tau}\right)}(F(E_0)p-qE_0)。$$

当 $E_0<r-\dfrac{\rho^2}{2}-\dfrac{k\mu}{h(g+m)\tau}$ 时，存在唯一最优捕获努力量为 $E_s^*=\dfrac{1}{2}\left(r-\dfrac{\rho^2}{2}-\dfrac{k\mu}{h(g+m)\tau}-\dfrac{aq}{p}\right)$，相应的可持续净收益的数学期望的最大值为 $Y(E_s^*)=\dfrac{2rp-\dfrac{2k\mu}{h(g+m)\tau}-2aq-p\rho^2}{16ap}$，相应的可持续净收益的数学期望的最大值的方差为 $D_s^*=\dfrac{\rho^2p^2}{16a^2}\left(r-\dfrac{\rho^2}{2}-\dfrac{k\mu}{h(g+m)\tau}\right)^3$。

4 结论

讨论了污染环境下的脉冲随机捕获模型，获得了脉冲随机捕获系统中生物灭绝和持久生存的阈值，得出如下结论：

1）从推论 1 和推论 2 可知，随机干扰不利于可再生生物资源的开发，$E_0\geqslant r-\dfrac{\rho^2}{2}-\dfrac{k\mu}{h(g+m)\tau}$ 时，最优捕获策略是不存在的。

2）从 F_s^* 和 $Y(E_s^*)$ 可以看出，随机干扰的强度越大，最优捕获努力量和可持续产出的数学期望的最大值就越小，这与现实生活中的经验是一致的。

3）在随机模型中，脉冲周期仍然对生物的灭绝和持久有着非常重要的影响，脉冲收获量过大或者脉冲周期过小，会造成生物种群灭绝。

参考文献：

[1]Hallam T G,Clark C E,Lassider R R. Effects of toxicants on populations:A qualitative approach I. Equilibrium environmental exposure[J]. Ecological Modelling,1983,18(3):291-304.

[2]Hallam T G,Deluna J L. Effects of toxicant on populations:A qualitative approach III. Environmental and food chain path-

ways[J]. Journal of Theoretical Biology, 1984, 109(3): 411-429.
[3]Fan M, Wang K. Study on harvested population with diffusional migration[J]. Journal of System Sciences and Complexity, 2001, 14(2): 139-148.
[4]Wang J, Wang K. The optimal harvesting problems of a stage-structured population[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 148(1): 235-247.
[5]鲁红英，王克．一类自治单种群模型及其最优捕获策略[J]．系统科学与数学，2010，30(1)：33-42.
Lu Hongying, Wang Ke. A class of Autonomous single-species models and their optimal harvesting polices[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2010, 30(1): 33-42.
[6]Zhang X Y, Shuai Z S, Wang K. Optimal impulsive harvesting policy for single population[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2003, 4(4): 639-651.
[7]Liu M, Wang K. Persistence and extinction of a stochastic single-species model under regime switching in a polluted environment Ⅱ[J]. Journal of Theoretical Biology, 2010, 267(3): 283-291.
[8]Liu M, Wang K. Persistence and extinction of a single-species population system in a polluted environment with random perturbations and impulsive toxicant input[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2012, 45(12): 1541-1550.
[9]Liu Y L, Liu Q, Liu Z H. Dynamical behaviors of a stochastic delay logistic system with impulsive toxicant input in a polluted environment[J]. Journal of Theoretical Biology, 2013, 329: 1-5.
[10]Mao X, Yuan C. Stochastic Differential equations with Markovian switching[M]. London: Imperial College Press, 2006: 16-17.
[11]Gray A, Greenhalgh D, Hu L, et al. A stochastic differential equation SIS epidemic model[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2011, 71(3): 876-902.

（责任编辑：吕文红）

（上接第 46 页）

[8]Hall L. Simulations and analyses of train-induced ground vibrations in finite element models[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2003(5): 403-413.
[9]中华人民共和国国家标准．GB10071-88，城市区域环境振动测量方法[S].
[10]Woods R D. Screening of surface waves in soils[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1968, 94: 951-979.
[11]贾润德．地铁列车引起的地面振动及隔振措施研究[D]．北京：北京交通大学，2008：81-82.
[12]申跃奎．地铁激励下振动的传播规律及建筑物隔振减振研究[D]．上海：同济大学，2007：67-68.
[13]Kuhlenmeyer R L, Lysmer J. Finite element method accuracy for wave propagation problems[J]. Journal of Soil Mechanics and Foundation Engineering, ASCE, 1973, 99(SM5): 421-427.
[14]陈育民，徐鼎平．FLAC/FLAC^{3D}基础与工程实例[M]．北京：中国水利水电出版社，2009：190-191.
[15]于梅．机密仪器环境振动测量和评价方法的研究[J]．振动与冲击，2010，29(8)：214-221.
Yu Mei. Research review on measurement and evaluation methods of environmental vibration for precision instruments[J]. Journal of Vibration and Shock, 2010, 29(8): 214-221.

（责任编辑：吕海亮）