Jacobi 函数方程与 Riemann $\xi(s)$ 函数零点

刘法胜

（山东科技大学 交通学院，山东 青岛 266590）

摘　要：利用 Jacobi 函数方程和 Schwarz 反射原理，给出 Riemann zeta 函数零点满足的方程，进而推得零点均落在实部为 1/2 的临界线上。如此，所有与 Riemann 猜想等价的命题和以 Riemann 假设作为前提条件的结论都成立。

关键词：黎曼猜想；Jacobi 函数方程；反射原理

中图分类号：O156.4　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-3767(2016)01-0097-05

Properties of Jacobi Functional Equation and Zeros of Riemann $\xi(s)$ Function

LIU Fasheng

(College of Transportation, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

Abstract: Using the properties of theta-series (Jacobi functional equation) and the Schwarz reflection principle, this paper presents an equation which meets the zeros of Riemann Zeta function and it is then deduced that all zeros are on the critical line where the real part is 1/2. Thus, all propositions equivalent to Riemann hypothesis and all conclusions with Riemann hypothesis as preconditions are true.

Key words: Riemann hypothesis (RH); Jacobi functional equation; reflection principle

1　研究背景

Riemann 猜想(RH，Riemann hypothesis)源于 Dirichlet 级数函数：

$$\zeta(s)=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}。\tag{1.1}$$

其中：$s=\sigma+\mathrm{i}t$，$\mathrm{Re}(s)=\sigma>1$。

文献[1]和[2]列出了有关 Riemann 猜想的重大历史事件。1737 年，Euler 给出了著名的乘积公式，即对所有大于 1 的实数 s，有

$$\zeta(s)=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{s}}=\prod_{p}(1-p^{-s})^{-1}。\tag{1.2}$$

其中，n 为自然数，p 为素数。Euler 乘法公式建立起了 Dirichlet 级数函数和素数分布的密切联系，也可以说建立了自然数加法运算和素数乘积运算之间的一种联系。

1792 年，Guass 提出后来被称为素数定理的结论。1859 年，Riemann 在文献[3]中，将(1.1)解析延拓到除 $s=1$ 外的整个复平面上，并提出 Riemann 猜想：Riemann ζ 函数的所有非平凡零点都在临界线 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 上。

由 Euler 乘积公式(1.2)可以得到 Riemann ζ 函数在 $\mathrm{Re}(s)>1$ 的区域内没有零点。1896 年，Hadamard 和 Poussion 分别独立证明了素数定理。素数定理等价于 Riemann ζ 函数在 $\mathrm{Re}(s)=1$ 上没有零点。

收稿日期：2015-06-28

作者简介：刘法胜(1957—)，男，山东临朐人，教授，博士生导师，主要从事交通运输规划与管理方面的研究.

E-mail：fashengliu@163.com

1914 年,丹麦数学家 Bohr 与德国数学家 Landau 证明了包含临界线的无论多么窄的带状区域都包含了 Riemann ζ 函数的几乎所有非平凡零点。同一年,英国数学家 Hardy 证明了 Riemann ζ 函数有无穷多个非平凡零点位于临界线上。

1942 年,挪威数学家 Selberg 证明了有正百分比的非平凡零点在临界线上。Levinson 在 1974 年证明了至少有 34% 的零点位于临界线上。直到 1989 年,美国数学家 Conrey 证明了至少有 40% 的零点位于临界线上。

RH 之所以重要,其原因之一是 RH 有诸多重要等价命题和以其作为假设而成立的重要结论。文献[2]中给出了 32 个重要等价命题;李修贤[4] 在学位论文"Riemann 猜想与素数分布"中专门罗列了 34 个与 Riemann 猜想等价结论。RH 的各种等价结论和基于 RH 而成立的结论使人们有理由相信 RH 的正确性,因而,人们更愿意称 Riemann 猜想为 Riemann 假设。

关于数值计算验证或者说试图举出反例的工作,极大促进了 RH 的相关研究。1932 年,数学家 Siegel 从 Riemann 的手稿中获得了重大发现——计算 Riemann ζ 函数非平凡零点的方法,称为 Riemann-Siegel 公式。至 1969 年,350 万个零点得到验证,全部位于临界线上,这无疑大大增强了数学家们对 RH 的信心。到 2004 年,Gourdon 用计算机验证了 Riemann ζ 函数的前 10^{13} 个零点都落在 RH 的临界线上。

Riemann 猜想的提出已经过去近两个世纪,而猜想是否成立,一直未得到肯定。RH 被公认为是"外行不懂,专家证明不了的世界难题"[2]。

Riemann 的著名论文[3]"论小于给定数的素数分布"中已经意识到猜想是成立的。令人惋惜的是,Riemann 提出 RH 七年后就撒手人寰。考察提出 RH 的原始论文[3] 发现,Riemann 通过 Jacobi 函数方程,给出了 Riemann ζ 函数的解析延拓表达[5]21。Edwards[6],Karatsuba[7] 都有用 theta 级数函数和 Jacobi 函数方程处理 Riemann ζ 函数解析延拓论述。Jacobi 函数方程与 Riemann ζ 函数关系密切,前者自变量的倒数与后者变量的共轭变量对应。Riemann 原意就是要去证明 RH,只是未能如愿,才以猜想的形式给出了著名的 RH。倘若,Riemann 当时就沿着此路给出 RH 的证明,或者后来人及时补上其证明,或许 RH 不会如此出名。RH 的诸多重要等价问题和基于 RH 的重要结果进一步凸显了 RH 的重要性,而等价问题的难以证明则说明,除了 Riemann 当初猜想的基于 Jacobi 变换的思路外,恐怕还没有发现更有效的思路。

现在可以说,RH 的极限情形和具体零点计算,只是增大了 RH 成立的可能性,将 Jacobi 函数方程性质和反射原理结合应用是证明 RH 的有效方法。

2 以 Theta 级数表达的 Riemann ζ 函数解析延拓显表达

Dirichlet 级数函数有多种解析延拓途径,由于解析延拓的唯一性原理,各种延拓形式上不同,本质上是等价的[5-7]。Riemann 利用 theta 函数级数和 Jacobi 方程,将 ζ 函数解析延拓到除 1 之外的整个复数平面上[3,5]。

由于 RH 起源于 Dirichlet 级数函数的解析延拓,而基于 theta 级数表达的 Riemann ζ 函数解析延拓用到著名的 Jacobi 函数方程关系,为了本文的完整性和可读性,此处以定理形式给出该既有结果[5]。

定理 1[8]

$$\theta(x^{-1}) = \sqrt{x}\theta(x); \tag{2.1}$$

$$2\omega(x)+1 = x^{-\frac{1}{2}}[2\omega(x^{-1})+1]。 \tag{2.2}$$

其中,$\theta(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-n^2\pi x}$,$\omega(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n^2\pi x}$,$x>0$。

证明见文献[8]188 页,也可参考文献[5] 5 ~ 8 页给出的另一证明。

定理 2[5] 下述函数是 Dirichlet 级数函数在复平面上除 $s=1$ 外的解析延拓:

$$A(s)=\pi^{\frac{s}{2}}\Gamma^{-1}\left(\frac{s}{2}\right)\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^{\infty}\omega(x)\left(x^{\frac{s}{2}}+x^{\frac{1-s}{2}}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}。 \tag{2.3}$$

其中,$\omega(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n^2\pi x}$。

记 $A(s)=\zeta(s)$,为 Riemann ζ 函数。鉴于该定理在 RH 中的重要性,此处给出其证明之一,详细过程见文

献[5]11 页。

证明：$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)=\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^{\infty}\omega(x)(x^{\frac{s}{2}}+x^{\frac{1-s}{2}})\frac{\mathrm{d}x}{x}$，其中，$\omega(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n^2\pi x}$。

用积分公式表示 Gamma 函数，对于 $\mathrm{Re}(s)>0$ 和自然数 n，有

$$\Gamma(\frac{s}{2})=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-u}u^{\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}u=n^s\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi n^2x}\pi^{\frac{s}{2}}x^{\frac{s}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x}。$$

此处，作 $u=\pi n^2x$ 的变量替换，结果有 $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})n^s=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi n^2x}x^{\frac{s}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$。

先假设 $\mathrm{Re}(s)>1$ 并对所有 n 求和，得 $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi n^2x}x^{\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}x$。

改变求和（$\sum$）与积分（$\int$）的顺序（绝对收敛可以改变顺序），则有

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)=\int_0^{\infty}\omega(x)x^{\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}x。$$

利用 Jacobi 方程(2.2)，并做积分变量 $x\to x^{-1}$ 于下述第二个积分中，有

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)=\int_0^{\infty}\omega(x)x^{\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}x=\int_0^1\omega(x)x^{\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}x+\int_1^{\infty}\omega(x)x^{\frac{s}{2}-1}\mathrm{d}x=$$

$$\int_1^{\infty}[\omega(x^{-1})x^{-\frac{s}{2}-1}+\omega(x)x^{\frac{s}{2}-1}]\mathrm{d}x=\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^{\infty}\omega(x)(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{\frac{-s-1}{2}})\mathrm{d}x。\tag{2.4}$$

定理得证。

当 $x\to\infty$ 时，$\omega(x)=\sum_1^{\infty}\mathrm{e}^{-n^2\pi x}=O(\mathrm{e}^{-\pi x})$，因而，对于任意 K，作为复变量上 s 的函数的上述广义积分在 $\mathrm{Re}(s)>K$ 内绝对一致收敛。等式关系是在 $\mathrm{Re}(s)>1$ 的假设下证得的，但是等式右端对所有 s 有定义，即，该公式给出了 Dirichlet 级数函数（式(1.1)）在整个复平面上（奇点 1 除外）的解析延拓显表达式。记为

$$A(s)=\zeta(s)=\pi^{\frac{s}{2}}\Gamma^{-1}(\frac{s}{2})[\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^{\infty}\omega(x)(x^{\frac{s}{2}}+x^{\frac{1-s}{2}})\frac{\mathrm{d}x}{x}]。$$

尽管对Dirichlet级数函数有多种解析延拓方法和形式，但由于解析延拓唯一性定理，它们本质上是等价的。不同的解析延拓方式会有不同的方便之处，基于 theta 函数级数和 Jacobi 方程，将 Dirichlet 级数函数解析延拓为上述显形式更方便。

至此，可以说，解析延拓后的 Riemann ζ 函数是整个复平面上除了简单极点 1(其留数为 1) 以外所有点上的解析函数。

现在，可以在复平面上考虑 Riemann ζ 函数的零点了。人们对其零点感兴趣，是因为它们包含着素数的信息。然而，人们并非对 Riemann ζ 函数的所有零点都感兴趣，所有实部在区间[0,1] 外的平凡零点被列为 RH 陈述之外。

在讨论其零点之前，先给出一个 Riemann ζ 函数的方程。注意到在 $A(s)$ 中，把 s 与 $1-s$ 作替换，等式成立。因此，有函数方程：

$$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s);$$

$$\xi(s)=\xi(1-s)。\tag{2.5}$$

记
$$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(s-1)s\int_1^{\infty}\omega(x)(x^{\frac{s}{2}}+x^{\frac{1-s}{2}})\frac{\mathrm{d}x}{x}。\tag{2.6}$$

通过上述辅助函数，Riemann 猜想(RH) 可以表达为 Riemann $\xi(s)$ 函数的所有零点都落在 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 的直线上。即 $\xi(s)=0\Rightarrow\mathrm{Re}(s)=1/2$。

由于所有 Riemann $\xi(s)$ 函数的零点关于直线 $\mathrm{Im}(s)=0$ 和直线 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 对称，且 $\xi(0)=\xi(1)=1/2$，并且，对于任意 t，$1+\mathrm{i}t$ 不可能成为 Riemann 函数的零点[5]。因此，只须证明在 $0<\mathrm{Re}(s)<1$ 的带型区

域内 RH 成立即可。

3 有关引理

为行文方便，给出以下引理[3,5]。

引理 1 设 x 是正实数，对多值对数函数只取其主枝，则

$$x^{\frac{s}{2}}=x^{\frac{\sigma+it}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{\sigma\ln x}{2}+i\frac{t}{2}\ln x}=\mathrm{e}^{\frac{\sigma\ln x}{2}}[\cos(\frac{t}{2}\ln x)+\mathrm{i}\,\sin(\frac{t}{2}\ln x)];\tag{3.1}$$

$$x^{\frac{1-s}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{(1-\sigma)\ln x}{2}}[\cos(\frac{t}{2}\ln x)-\mathrm{i}\,\sin(\frac{t}{2}\ln x)]。$$

引理 2 所有 Riemann $\xi(s)$ 的非平凡零点都在 $0\leqslant \mathrm{Re}(s)\leqslant 1$ 带型区域内，且关于 $\mathrm{Im}(s)=0$ 和 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 对称。换言之，每当 s_n 是 $\xi(s)$ 的一个零点，那么 $1-s_n$，$\bar{s}_n$ 和 $1-\bar{s}_n$ 也都是 $\xi(s)$ 的零点。即，$\xi(s)=0\Leftrightarrow\xi(1-s)=0\Leftrightarrow\xi(\bar{s})=0\Leftrightarrow\xi(1-\bar{s})=0$。

详细的证明请参考文献[5] 22 页定理 1。前面的等价性证明可以由式(2.6)给出；后半部分的等价性由反射原理给出，因为这里在实数轴上函数取值为实数，故由 Schwarz 反射定理，得引理 2。

引理 3 设 $t>0$，则

$$\alpha(t)=\int_0^{\infty}\frac{1}{t}(\mathrm{e}^{-\frac{1-\sigma}{t}y}-\mathrm{e}^{\frac{-\sigma}{t}y})\sin y\mathrm{d}y=\frac{(2\sigma-1)t}{(t^2+\sigma^2)[(1-\sigma)^2+t^2]}。\tag{3.2}$$

证明：

$$\int\mathrm{e}^{-\alpha y}\cos y\mathrm{d}y=\frac{1}{1+\alpha^2}\mathrm{e}^{-\alpha y}(\sin y-\alpha\cos y);$$

$$\int\mathrm{e}^{-\alpha y}\sin y\mathrm{d}y=\frac{-1}{1+\alpha^2}\mathrm{e}^{-\alpha x}(\cos y+\alpha\sin y);$$

$$\alpha(t)=\int_0^{\infty}\frac{1}{t}(\mathrm{e}^{-\frac{1-\delta}{t}y}-\mathrm{e}^{\frac{-\delta}{t}y})\sin y\mathrm{d}y;$$

$$\alpha(t)=\frac{1}{t}[\frac{t^2}{t^2+(1-\delta)^2}-\frac{t^2}{t^2+\delta^2}]=\frac{(2\delta-1)t}{(t^2+\delta^2)[(1-\delta)^2+t^2]}。$$

引理 4 如果 $f(x)$ 为单调连续函数，且 $\int_0^{\infty}f(x)\sin x\mathrm{d}x=A$，则 $f(x)\rightarrow 0(x\rightarrow\infty)$。

现在可以探讨 Riemann $\xi(s)$ 函数的零点了。

4 Riemann $\xi(s)$ 函数的零点

由式(2.6)，设 $s=\sigma+\mathrm{i}t$ 为 Riemann $\xi(s)$ 的零点：

$$\mathrm{Im}\,\frac{1}{s(1-s)}=\mathrm{Im}\int_1^{\infty}\omega(x)(x^{\frac{s}{2}}+x^{\frac{1-s}{2}})\frac{\mathrm{d}x}{x};\tag{4.1}$$

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{s(1-s)}=\mathrm{Re}\int_1^{\infty}\omega(x)(x^{\frac{s}{2}}+x^{\frac{1-s}{2}})\frac{\mathrm{d}x}{x}。\tag{4.2}$$

设 $t>0$，令 $\frac{t}{2}\ln x=y$ 由定理 1(式(2.2))和引理 1(式(3.1))得：

$$\omega(\mathrm{e}^{\frac{2}{t}y})=[\mathrm{e}^{-\frac{y}{t}}(2\omega\mathrm{e}^{-\frac{2}{t}y}+1)-1]/2;\tag{4.3}$$

$$\frac{(2\delta-1)t}{(\delta^2+t^2)[(1-\delta)^2+t^2]}=\int_0^{\infty}\frac{2}{t}\omega\mathrm{e}^{\frac{2}{t}y}(\mathrm{e}^{\frac{\delta}{t}y}-\mathrm{e}^{\frac{1-\delta}{t}y})\sin y\mathrm{d}y。\tag{4.4}$$

由式(4.3)可得

$$\frac{(2\sigma-1)t}{(\sigma^2+t^2)[(1-\sigma^2)+t^2]}=\int_0^{\infty}\frac{2}{2t}[\mathrm{e}^{-\frac{y}{t}}(2\omega\mathrm{e}^{-\frac{2}{t}y}+1)-1](\mathrm{e}^{\frac{\rho}{t}y}-\mathrm{e}^{\frac{1-\rho}{t}y})\sin y\mathrm{d}y=$$

$$\int_0^\infty \frac{2}{-(-t)}\omega \mathrm{e}^{-\frac{2}{t}y}(\mathrm{e}^{-\frac{1-\delta}{t}y}-\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{t}y})\sin y\mathrm{d}y+\int_0^\infty \frac{1}{t}[(\mathrm{e}^{-\frac{1-\delta}{t}y}-\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{t}y})-(\mathrm{e}^{\frac{\delta}{t}y}-\mathrm{e}^{\frac{1-\delta}{t}y})]\sin y\mathrm{d}y,$$

又由引理 2，$-t$ 亦满足式(4.4)

$$\frac{(2\sigma-1)t^2}{(\sigma^2+t^2)[(1-\sigma^2)+t^2]}=\int_0^\infty 2\omega \mathrm{e}^{-\frac{2}{t}y}(\mathrm{e}^{-\frac{1-\delta}{t}y}-\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{t}y})\sin y\mathrm{d}y, \tag{4.5}$$

所以有
$$\frac{2(2\sigma-1)t^2}{(\sigma^2+t^2)[(1-\sigma^2)+t^2]}=\int_0^\infty [(\mathrm{e}^{-\frac{1-\sigma}{t}y}-\mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{t}y})-(\mathrm{e}^{\frac{\sigma}{t}y}-\mathrm{e}^{\frac{1-\sigma}{t}y})]\sin y\mathrm{d}y,$$

即
$$2\frac{(2\sigma-1)t^2}{(\sigma^2+t^2)[(1-\sigma^2)+t^2]}=\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty [(\mathrm{e}^{-\frac{1-\sigma}{t}y}-\mathrm{e}^{-\frac{\sigma}{t}y})-(\mathrm{e}^{\frac{\sigma}{t}y}-\mathrm{e}^{\frac{1-\sigma}{t}y})]\sin y\mathrm{d}y。$$

由引理 3 和引理 4 得

$$\frac{(2\sigma-1)t^2}{(\sigma^2+t^2)[(1-\sigma^2)+t^2]}=\lim_{N\to\infty}\int_0^\infty -(\mathrm{e}^{\frac{\sigma}{t}y}-\mathrm{e}^{\frac{1-\sigma}{t}y})\sin y\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{e}^{\frac{\sigma}{t}y}-\mathrm{e}^{\frac{1-\sigma}{t}y}=0,y\to\infty。$$

故有 $\sigma=\frac{1}{2}$。

5 Riemann $\xi(s)$ 函数零点计算

由式(4.2)，下面函数的零点即为 Riemann $\xi(s)$ 函数零点的虚部值：

$$f(t)=-1+\frac{1+4t^2}{2}\int_1^\infty \omega(x)\mathrm{e}^{\frac{1}{4}\ln x}\cos(\frac{t}{2}\ln x)\frac{\mathrm{d}x}{x}。 \tag{5.1}$$

其中，$\omega(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n^2\pi x}$。

利用Matlab进行数值计算，通过计算函数值的变号，容易给出函数零点范围，Riemann$\xi(s)$ 函数在 $t>0$ 的前 10 个零点范围是：$\frac{1}{2}+(14,14.5)\mathrm{i}$；$\frac{1}{2}+(21,21.5)\mathrm{i}$；$\frac{1}{2}+(25,25.5)\mathrm{i}$；$\frac{1}{2}+(30,30.5)\mathrm{i}$；$\frac{1}{2}+(32.5,33)\mathrm{i}$；$\frac{1}{2}+(37.5,38)\mathrm{i}$；$\frac{1}{2}+(40.5,41)\mathrm{i}$；$\frac{1}{2}+(43,43.5)\mathrm{i}$；$\frac{1}{2}+(48,48.5)\mathrm{i}$；$\frac{1}{2}+(49.5,50)\mathrm{i}$。与既有实际结果相吻合[1]。

函数(5.1)包含了全部素数分布信息，素数分布性质可以通过研究该函数的零点分布得到。

参考文献：

[1]卢昌海. 黎曼猜想漫谈[M]. 北京：清华大学出版社，2012.
[2]BORWEIN P，CHOI S，ROONEY B. The Riemann hypothesis：A resource for the afficionado and virtuoso alike[M]. New York：Springer，2008.
[3]RIEMANN B. Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse[M]//Gesammelte Mathematische Werke Und Wissenschaftlicher Nachlass. Berlin：Monats. Preuss，1859：671-680.
[4]李修贤. 黎曼猜想与素数分布[D]. 济南：山东大学，2012.
[5]KARATSUBA A A，VORONIN S M. The Riemann zeta-function[M]. Translated by KOBLITZ N. Berlin：Walter de Gruyter，1992.
[6]EDWARDS H M. Riemann's zeta function[M]. New York：Dover Publications，Inc.，1974.
[7]TITCHMARSH E C. The theory of the Riemann zeta-function[M]. Oxford：Clarendon Press，1951.
[8]EVEREST G，WARD T. An introduction to number theory[M]. New York：Springer，2005.

（责任编辑：吕文红）