第 35 卷 第 3 期
2016 年 6 月

Vol. 35 No. 3
Jun. 2016

Journal of Shandong University of Science and Technology
Natural Science

具有适型分数阶导数的非线性特征值问题的正解

董晓玉,白占兵,张　伟

（山东科技大学 数学与系统科学学院,山东 青岛 266590）

摘　要:本文研究具有适型分数阶导数的非线性特征值问题正解的存在性。首先给出 Green 函数 $G(t,s)$ 并且证明其非负标和有界性;其次,利用 Krasnosel'skii 不动点定理对该问题的特征值区间给以刻划,得到正解的存在性和多解性。

关键词:适型分数阶导数;非线性特征值问题;奇异 Green 函数;Krasnosel'skii 不动点定理

中图分类号:O175.1　　　**文献标志码:**A　　　**文章编号:**1672-3767(2016)03-0085-07

Positive Solutions for Nonlinear Eigenvalue Problems with Conformable Fractional Differential Derivatives

DONG Xiaoyu, BAI Zhanbing, ZHANG Wei

(College of Mathematics and Systems Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

Abstract: This paper established the existence of positive solutions for nonlinear eigenvalue problems with conformable fractional differential derivatives Firstly, Green's function was given and its properties were proved. Secondly, by using Krasnosel'skii fixed-point theorems, the interval of eigenvalue problems was investigated and its existence and multiplicity of positive solutions were acquired.

Key words: conformable fractional derivative; nonlinear eigenvalue problems; singular Green's function; Krasnosel' skii fixed point theorem

1　引言

近年来,分数阶微积分和分数阶微分方程在众多领域应用广泛,例如动力系统[1-2]、生物工程[3-4]、信号分析[5-6]、图像处理[7]等。其中 Henderson 等[8]在 1997 年用 Krasnosel'skill 不动点定理研究了如下整数阶的非线性特征值问题的正解:

$$u''(t) + \lambda a(t) f(u) = 0, 0 < t < 1,$$
$$u(0) = u(1) = 0。$$

2012 年 Bai 等[9]考虑了下列分数阶微分方程边值问题:

$$^{C}D^{\alpha} u(t) + \lambda h(t) f(u(t)) = 0, 0 < t < 1,$$
$$u(0) = u'(1) = u''(0) = 0。$$

收稿日期:2016-01-06

基金项目:国家自然科学基金项目(11571207)

作者简介:董晓玉(1992—),女,山东青岛人,硕士研究生,主要从事分数阶微分方程的研究.

白占兵(1971—),男,甘肃高台人,教授,博士,主要从事应用微分方程的研究,本文通信作者.

E-mail:zhanbingbai@163.com

其中，$2 < a \leqslant 3$ 是实数，${}^{C}D^{\alpha}$ 是标准 Caputo 分数导数，$\lambda > 0$ 。在一些假设下，利用锥上的不动点定理得到所研究问题的特征区间。

基于此，本论文研究最近刚给出的适型分数阶导数的非线性特征值问题：

$$D^{\alpha}u(t) + \lambda a(t) f(u(t)) = 0, 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$u(0) = u(1) = 0。\tag{2}$$

其中，$1 < a \leqslant 2$ 是实数，D^{α} 是适型分数阶导数，且满足条件：

1) $f:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是连续的，

2) $a:[0,1]\to[0,\infty)$ 连续且在任意子区间上不恒等 0，

3) $f_0 = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ 和 $f_{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在。

据我们了解，已有的关于边值问题的文章[8-9,10,12]所涉及到的 Green 函数都是连续的，但本文所处理的问题其 Green 函数是奇异的。

本文结构如下，第二部分给出适型分数阶导数的一些相关定义并且给出相应的 Green 函数；第三部分证明定义的积分算子是连续的，利用 Krasnosel′skill 不动点定理得到所考虑问题存在正解的特征值区间。

2 预备知识

为了读者的方便，此处给出一些微积分理论必要的定义。

定义 2.1[10] 连续函数 $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ 的 $\alpha\in(n,n+1]$ 阶适型分数阶导数定义为

$$D^{\alpha}f(t) = D^{\alpha-n}f^{(n)}(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f^{(n)}(t+\varepsilon t^{n+1-\alpha}) - f^{(n)}(t)}{\varepsilon}, \tag{3}$$

其中等式右端极限存在。设 $a > 0$ ，如果 f 在 $(0,a)$ 上是 α 阶可微的且 $\lim\limits_{t\to 0^+}D^{\alpha}f(t)$ 存在，则定义

$$D^{\alpha}f(0) = \lim_{t\to 0^+}D^{\alpha}f(t)。\tag{4}$$

注 2.1 给定 $\alpha\in(n,n+1]$ ，有

$$D^{\alpha}t^{k} = 0,$$

其中 $k = 0,1,\cdots,n$ 。

引理 2.1 设 $t > 0, \alpha\in(n,n+1]$ 。函数 $f(t)$ 是 $(n+1)$ 阶可微函数当且仅当 f 是 α 阶可微的，并且

$$D^{\alpha}f(t) = t^{n+1-\alpha}f^{(n+1)}(t)。$$

证明 设 $h = \varepsilon t^{n+1-\alpha} + O(\varepsilon^2)$ ，根据定义 2.1，有

$$D^{\alpha}f(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f^{(n)}(t+\varepsilon t^{n+1-\alpha}) - f^{(n)}(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f^{(n)}(t+h) - f^{(n)}(t)}{\dfrac{h}{t^{n+1-\alpha}+O(\varepsilon)}} = t^{n+1-\alpha}f^{(n+1)}(t)。$$

证毕。

定义 2.2[9] 连续函数 $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}$ 的 $\alpha\in(n,n+1]$ 分数积分定义为

$$I^{\alpha}f(t) = I^{n+1}(t^{\alpha-n-1}f(t)) = \frac{1}{n!}\int_0^t (t-s)^n s^{\alpha-n-1}f(s)\mathrm{d}s, \tag{5}$$

其中 I^{n+1} 是 $n+1$ 阶积分算子。

引理 2.2 设 $\alpha\in(n,n+1]$。f 在 I^{α} 的定义域下是一个连续函数，$t\geqslant 0$ 时 $D^{\alpha}I^{\alpha}f(t) = f(t)$ 。

证明 因为 $f(t)$ 是连续的，那么 $I^{\alpha}f(t)$ 是 $(n+1)$ 阶可微的。由引理 2.1 有

$$D^{\alpha}(I^{\alpha}f)(t) = t^{n+1-\alpha}\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}}\left(\frac{1}{n!}\int_0^t (t-s)^n s^{\alpha-n-1}f(s)\mathrm{d}s\right) =$$

$$t^{n+1-\alpha}f(t)t^{\alpha-n-1} = f(t)。$$

证毕。

引理 2.3[9] **(中值定理)** 设 $a\geqslant 0$ ，$f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 具有以下性质

1) f 在 $[a,b]$ 上是连续的，

2）对于 $\alpha \in (0,1)$，f 在 (a,b) 上是 α 阶可微的，

那么，存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $D^{\alpha} f(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{\dfrac{1}{\alpha}b^{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha}a^{\alpha}}$。

引理 2.4 设 $\alpha \in (n,n+1]$，$t>0$ 时，f 是一个 α 阶可微函数，那么 $D^{\alpha} f(t)=0$，$t\in[0,1]$，当且仅当 $f(t)=a_0+a_1 t+\cdots+a_{n-1}t^{n-1}+a_n t^n$，其中 $a_k\in \mathbf{R}$，$k=0,1,\cdots,n$。

证明 充分性由注 2.1 可证。接下来，给定 $t_1,t_2\in[0,1]$，$t_1<t_2$，由引理 2.3，存在 $\xi\in(t_1,t_2)$ 使得

$$f^{(n)}(t_2)-f^{(n)}(t_1)=D^{\alpha} f(\xi)\left(\frac{1}{\alpha}t_2^{\alpha}-\frac{1}{\alpha}t_1^{\alpha}\right)。$$

由 $D^{\alpha} f(\xi)=0$ 可知，$f^{(n)}(t_2)=f^{(n)}(t_1)$，又由 t_1,t_2 的任意性，有 $f(t)=a_0+a_1 t+\cdots+a_{n-1}t^{n-1}+a_n t^n$，$t\in[0,1]$。证毕。

根据引理 2.2 和引理 2.4，立即有下述引理。

引理 2.5 设 $\alpha\in(n,n+1]$，$u\in C(0,1)\cap L(0,1)$ 具有 α 阶分数导数并属于 $C(0,1)\cap L(0,1)$。那么

$$I^{\alpha} D^{\alpha} u(t)=u(t)+c_0+c_1 t+\cdots+c_n t^n, \tag{6}$$

其中，$c_k\in\mathbf{R}, k=0,1,\cdots,n$。

在以下的讨论中，假设 $\alpha\in(1,2]$。

下面给出线性分数阶微分方程边值问题的 Green 函数。

引理 2.6 假设 $y\in C[0,1]$，则问题

$$D^{\alpha} u(t)+y(t)=0, 0<t<1, \tag{7}$$

$$u(0)=u(1)=0, \tag{8}$$

的唯一解是

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)y(s)\mathrm{d}s,$$

其中

$$G(t,s)=\begin{cases}(1-t)s^{\alpha-1}, & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1;\\ ts^{\alpha-2}(1-s), & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1。\end{cases} \tag{9}$$

证明：利用引理 2.5 可推出方程(7)等价于积分方程

$$u(t)=-I^{\alpha} y(t)+c_0+c_1 t=-\int_0^t\int_0^{t_1} s^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t_1+c_0+c_1 t=-\int_0^t (t-s)s^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s+c_0+c_1 t,$$

对于 $c_0,c_1\in\mathbf{R}$。由(8)式，有 $c_0=0, c_1=\int_0^1 (t-s)s^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s$。因此，问题(7)，(8)的唯一解是

$$u(t)=-\int_0^t (t-s)s^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s+t\int_0^t (t-s)s^{\alpha-2}y(s)\mathrm{d}s=-\int_0^t (-ts^{\alpha-2}+s^{\alpha-1}+ts^{\alpha-2}-ts^{\alpha-1})y(s)\mathrm{d}s+$$

$$\int_t^1 (ts^{\alpha-2}-ts^{\alpha-1})y(s)\mathrm{d}s=\int_0^t (1-t)s^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s+\int_t^1 ts^{\alpha-2}(1-s)y(s)\mathrm{d}s=\int_0^1 G(t,s)y(s)\mathrm{d}s。$$

证毕。

显然 $\alpha=2$ 时，式(9)即是通常的 Green 函数。

引理 2.7 由式(9)定义的 Green 函数 $G(t,s)$ 满足以下性质：

1）$G(t,s)>0$，对任意的 $t,s\in(0,1)$；

2）$\min\limits_{\frac14\leqslant t\leqslant\frac34} G(t,s)\geqslant \frac{1}{4}\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}G(t,s)=\frac{1}{4}G(s,s), s\in(0,1)$。

证明：由 $G(t,s)$ 的表达式可知，$G(t,s)>0$，对 $t,s\in(0,1)$ 成立。下面，对给定的 $s\in(0,1)$ 可求出 $G(t,s)$ 关于 t 的偏导数，

$$\frac{\partial G(t,s)}{\partial t}=\begin{cases}-s^{\alpha-1}, & s\leqslant t;\\ s^{\alpha-2}(1-s), & t\leqslant s。\end{cases}$$

由此可知 $G(t,s)$ 关于 t 在 $s\leqslant t$ 时是递减的，$t\leqslant s$ 时是递增的。

因此，

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} G(t,s)=G(s,s)=(1-s)s^{\alpha-1},$$

且

$$\min_{\frac14\leqslant t\leqslant\frac34} G(t,s)=\begin{cases}\dfrac14 s^{\alpha-1}, & s\in(0,\dfrac12];\\ \dfrac14(1-s)s^{\alpha-2}, & s\in[\dfrac12,1)。\end{cases}$$

设

$$\gamma(s)=\frac{\min\limits_{\frac14\leqslant t\leqslant\frac34} G(t,s)}{G(s,s)}=\begin{cases}\dfrac{1}{4(1-s)}, & s\in(0,\dfrac12];\\ \dfrac{1}{4s}, & s\in[\dfrac12,1)。\end{cases}$$

显然，$\gamma(s)\geqslant\dfrac14$，$s\in(0,1)$，证毕。

此处 Green 函数有一个常数界，这在 Riemann-Liouville 导数下是无法做到的[11]。

引理 2.8[13] 设 E 是一个 Banach 空间，$T_n:E\to E$ 全连续（$n=3,4,\cdots$），$T:E\to E$。如果对于 E 中任何有界集 Ω，当 $n\to\infty$ 时，$\|T_nu-Tu\|$ 在 Ω 上一致收敛于 0，那么 $T:E\to E$ 全连续。

引理 2.9[10] 设 E 是 Banach 空间，$P\subseteq E$ 是一个锥，Ω_1,Ω_2 为 E 中的非空有界相对开集且 $\overline{\Omega_1}\subset\Omega_2$。设 $A:P\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)\to P$ 为全连续算子，满足

1）$\|Ax\|\leqslant\|x\|$，$x\in P\cap\partial\Omega_1$，且 $\|Ax\|\geqslant\|x\|$，$x\in P\cap\partial\Omega_2$，或

2）$\|Ax\|\geqslant\|x\|$，$x\in P\cap\partial\Omega_1$，且 $\|Ax\|\leqslant\|x\|$，$x\in P\cap\partial\Omega_2$

则 A 在 $P\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)$ 上有不动点。

3 主要结果

本文考查特征值问题(1)，(2)的可解性。由引理 2.6 知 $u(t)$ 是问题(1)，(2)的解，当且仅当

$$u(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s,0\leqslant t\leqslant 1。$$

令 $E=C[0,1]$，范数 $\|u\|=\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$。定义锥 P 为

$$P=\left\{u\in E\mid u(t)\geqslant 0,\min_{\frac14\leqslant t\leqslant\frac34}u(t)\geqslant\frac14\|u\|\right\}。$$

设常数 $\tau\in[0,1]$，定义如下

$$\int_{\frac14}^{\frac34}G(\tau,s)a(s)\mathrm{d}s=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_{\frac14}^{\frac34}G(t,s)a(s)\mathrm{d}s。$$

定义积分算子 $T,T_n:P\to E$ 为

$$(Tu)(t):=\lambda\int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s,$$

$$(T_nu)(t):=\lambda\int_{\frac1n}^1 G(t,s)f(u(s))\mathrm{d}s,n=3,4,\cdots。$$

引理 3.1 $T:P\to P$ 是全连续算子。

证明：首先，证明 $T_n,n=3,4,\cdots$ 是一列全连续算子。由引理 2.7，$a(s)$ 和 $f(u)$ 的非负性可知，对于任意的 $t\in[0,1]$，$u\in P$，$T_nu(t)\geqslant 0$，且

$$T_nu(t)=\lambda\int_{\frac1n}^1 G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s\leqslant\lambda\int_{\frac1n}^1 s^{\alpha-1}(1-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s,$$

所以，

$$\| T_n u \| \leqslant \lambda \int_{\frac{1}{n}}^{1} s^{\alpha-1}(1-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s。\tag{11}$$

对 $u \in P$，由引理 2.7 和(11)式得

$$\min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}} T_n u(t) = \min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}} \lambda\int_{\frac{1}{n}}^{1} G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s \geqslant \frac{\lambda}{4}\int_{\frac{1}{n}}^{1} s^{\alpha-1}(1-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s \geqslant \frac{1}{4}\| T_n u \|。$$

因此，T_n 是保锥映射。另外，标准的讨论得 $T_n:P\to P$ 全连续。

显然 $T:P\to P$。接下来证 $T_n:P\to P$ 一致收敛于 T，从而 $T:P\to P$ 也是全连续算子。

任意的 $\varepsilon>0$，令

$$K=\left[\frac{L\left(\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\alpha}\right)}{\varepsilon}\right],$$

则当 $n>K$ 时，有 $\| T_n u - Tu \| < \varepsilon$。分两种情况考虑：

1) $0<t\leqslant\frac{1}{n}$。

$$\| T_n u - Tu \| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |(T_n u)(t)-(Tu)(t)| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\int_{\frac{1}{n}}^{1} G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s - \int_0^1 G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s\right| =$$

$$\int_0^{\frac{1}{n}} G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s \leqslant L\int_0^t (1-t)s^{\alpha-1}\mathrm{d}s + L\int_t^{\frac{1}{n}} ts^{\alpha-2}(1-s)\mathrm{d}s \leqslant L\left(\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha} < \varepsilon。$$

2) $\frac{1}{n}<t$。

$$\| T_n u - Tu \| = \int_0^{\frac{1}{n}} G(t,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s \leqslant L\int_0^{\frac{1}{n}} (1-t)s^{\alpha-1}\mathrm{d}s \leqslant L\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha} < \varepsilon。$$

由引理 2.8，$T:P\to P$ 全连续。证毕。

定理 3.1 假设条件(A)，(B)和(C)都满足。那么，只要 λ 满足

$$\frac{4}{\left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(t,s)a(s)\mathrm{d}s\right)f_\infty} < \lambda < \frac{1}{\left(\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)a(s)\mathrm{d}s\right)f_0}。\tag{12}$$

边值问题(1)，(2)至少有一个解。

证明：设 λ 是(12)式中给定的。选取 $\varepsilon>0$ 使得

$$\frac{4}{\left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(t,s)a(s)\mathrm{d}s\right)(f_\infty-\varepsilon)} \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{\left(\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)a(s)\mathrm{d}s\right)(f_0+\varepsilon)}。$$

由引理 3.1 知，$T:P\to P$ 是全连续算子。对上述 $\varepsilon>0$，由 f_0 的定义知，存在 $H_1>0$，使得 $f(x)\leqslant(f_0+\varepsilon)x$，$0<x\leqslant H_1$ 时，令

$$\Omega_1 := \{u\in P \mid \| u \| < H_1\},$$

对于 $u\in\partial\Omega_1$，$0<u\leqslant H_1$。根据 Green 函数的性质有

$$(Tu)(t)\leqslant\lambda\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s \leqslant \lambda\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)a(s)(f_0+\varepsilon)\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\lambda(f_0+\varepsilon)\| u \|\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)a(s)\mathrm{d}s \leqslant \| u \|。$$

因此，$u\in P\cap\partial\Omega_1$ 时 $\| Tu \| \leqslant \| u \|$。

再由 f_∞ 的定义，存在 $\overline{H_2}>0$，使得 $x\geqslant\overline{H_2}$ 时有 $f(x)\geqslant(f_\infty-\varepsilon)x$。设 $H_2=\max\{4H_1, 4\overline{H_2}\}$，令

$$\Omega_2 := \{u\in P \mid \| u \| < H_2\}。$$

对于 $u\in\partial\Omega_2$，有 $\min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}} u(t)\geqslant\frac{1}{4}\| u \|\geqslant\overline{H_2}$，$t\in\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$，且

$$(Tu)(\tau)\geqslant\lambda\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G(\tau,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s\geqslant\lambda\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G(s,s)a(s)(f_{\infty}-\varepsilon)u(s)\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\frac{\lambda}{4}(f_{\infty}-\varepsilon)\|u\|\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G(\tau,s)a(s)\mathrm{d}s\geqslant\|u\|。$$

因此，$u\in P\cap\partial\Omega_2$ 时 $\|Tu\|\geqslant\|u\|$ 。

利用引理 2.9，算子 T 有一个不动点 $u(t)\in P\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)$ 。$u(t)$ 就是对于给定的 λ，问题(1)，(2)的期望解。证毕。

定理 3.2 假设条件(A)，(B)和(C)都满足。且

$$\frac{4}{\left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G(t,s)a(s)\mathrm{d}s\right)f_0}<\lambda<\frac{1}{\left(\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)a(s)\mathrm{d}s\right)f_{\infty}},\tag{13}$$

则边值问题(1)，(2)至少有一个解。

证明：设 λ 是(13)式中给定的。选取 $\varepsilon>0$ 使得

$$\frac{4}{\left(\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G(t,s)a(s)\mathrm{d}s\right)(f_0-\varepsilon)}\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{\left(\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)a(s)\mathrm{d}s\right)(f_{\infty}+\varepsilon)}。$$

设 T 是(9)式所定义的保锥全连续算子。对上述 $\varepsilon>0$，由 f_0 的定义知，存在 $H_1>0$ 使得 $f(x)\geqslant(f_0-\varepsilon)x$ 。$0<x\leqslant H_1$ 时，令

$$\Omega_1:=\{u\in P\mid\|u\|<H_1\},$$

有

$$(Tu)(\tau)=\lambda\int_0^1 G(\tau,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s\geqslant\lambda\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G(\tau,s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\lambda\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G(s,s)a(s)(f_0-\varepsilon)u(s)\mathrm{d}s\geqslant\frac{\lambda}{4}(f_0-\varepsilon)\|u\|\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G(\tau,s)a(s)\mathrm{d}s\geqslant\|u\|。$$

因此，$u\in P\cap\partial\Omega_1$ 时 $\|Tu\|\geqslant\|u\|$ 。

接下来，确定 Ω_2 。首先定义新函数 $f^*(t)=\max\limits_{0\leqslant u\leqslant t}f(u)$，显然 $f^*(t)$ 是非减的。而且根据 f_{∞}，存在 $\overline{H_2}>0$ 使得 $f^*(x)\leqslant(f_{\infty}^*+\varepsilon)x$，$x\geqslant\overline{H_2}$ 。设 $H_2>\max\{4H_1,\overline{H_2}\}$，

$$\Omega_2:=\{u\in P\mid\|u\|<H_2\},$$

如果 $u\in P\cap\partial\Omega_2$，有

$$(Tu)(t)\leqslant\lambda\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)a(s)f(u(s))\mathrm{d}s\leqslant\lambda\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)a(s)f^*(H_2)\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\lambda(f_{\infty}^*+\varepsilon)H_2\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)a(s)\mathrm{d}s=\lambda(f_{\infty}^*+\varepsilon)\|u\|\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)a(s)\mathrm{d}s\leqslant\|u\|,$$

因此，$\|Tu\|\leqslant\|u\|$，$u\in P\cap\partial\Omega_2$ 。问题(1)，(2)在 $P\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)$ 有一个解。证毕。

参考文献：

[1]MERAL F，ROYSTON T，MAGIN R. Fractional calculus in viscoelasticity，An experimental study[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation，2010，15(14)：939-945.

[2]武华华，孙苏菁. 基于变分方法的四阶边值问题的多重正解[J]. 山东科技大学学报(自然科学版)，2014，33(2)：96-99.
WU Huahua，SUN Sujing. Based on the variational method of the multiple positive solutions of fourth-order boundary value problem[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology(Natural Science)，2014，33(2)：96-99.

[3]OLDHAM K，SPANIER J. The fractional calculus[M]. New York：Academic Press，1974：27-36.

[4]PODLUBNY I. Fractional differential equations[M]. New York：Academic Press，1999：50-65.

[5]KILBAS A，SRIVASTAVA H，TRUJILLO J. Theory and applications of fractional differential equations[M]. Amsterdam，Elsevier Science B. V.，2006：78-84.

[6]WEITZNER H，ZASLAVSKY G. Some applications of fractional equations[J]. Communications in Nonlinear Science and

Numerical Simulation,2003,8(3/4):273-281.
[7]MACHADO J,KIRYAKOVA V,MAINARDI F. Recent history of fractional calculus[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,2011,16(3):1140-1153.
[8]HENDERSON J,WANG H. Positive solutions for nonlinear eigenvalue problems[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1997,208(1):252-259.
[9]BAI Z. Eigenvalue intervals for a class of fractional boundary value problem[J]. Computers & Mathematics with Applications 2012,64(10):3253-3257.
[10]LIU Z,LI F. Multiple Positive solutions of nonlinear two-point boundary value problem[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1996,203(3):610-625.
[11]KHALIL R,HORANI M,YOUSEF A and SABABHEH M. A new definition of fractional derivative[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2014,264(5):65-70.
[12]BAI Z,LV H. Positive solutions of boundary value problems of nonlinear fractional differential equation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2005,311(4):495-505.
[13]郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 2 版. 济南:山东科学技术出版社,2001:21-22.

(责任编辑:傅　游)