带乘性噪声的随机控制系统鲁棒 H_2/H_∞ 控制设计

蒋登辉,李 艳
(山东科技大学 电气与自动化工程学院,山东 青岛 266590)

摘 要:本文主要研究了状态方程和输出方程均带有多个噪声源的无限时域离散随机控制系统的 H_2/H_∞ 控制器的设计问题。首先给出一个随机有界实引理(SBRL);然后,利用随机有界实引理和系统的精确可观测性,给出了随机控制系统最优解的存在定理。该定理表明随机 H_2/H_∞ 控制设计与四个耦合的广义代数 Riccati 方程的解的存在性有关。最后,给出了一个仿真实例来说明设计的效用。

关键词:随机控制系统;随机有界实引理;精确可观测性; H_2/H_∞ 控制;广义代数 Riccati 方程

中图分类号:O231 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-3767(2016)03-0092-07

Robust H_2/H_∞ Control of Stochastic Control Systems with Multiplicative Noise

JIANG Denghui, LI Yan
(College of Electrical Engineering and Automation, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

Abstract: The paper mainly investigated the mixed H_2/H_∞ control design of infinite horizon discrete-time stochastic control systems with multiplicative noise in both state and output equation. Firstly, a stochastic bounded real lemma (SBRL) was built. Secondly, on the basis of SBRL and exact observability, an optimal solution existence theorem of the stochastic H_2/H_∞ control system was obtained, which indicates that the stochastic control design is related to the solution of the four coupled general algebraic Riccati equations (GAREs). Finally, a numerical example was proposed to illustrate the effectiveness of the design.

Key words: stochastic control system; stochastic bounded real lemma; exact observability; H_2/H_∞ control; general algebraic Riccati equation

所谓的 H_2/H_∞ 控制是指寻找一个控制器不仅满足 H_∞ 性能指标的要求,而且当最坏扰动存在时,使得 H_2 成本函数最小。混合 H_2/H_∞ 控制作为一种重要的鲁棒控制方法得到了广泛的研究,并在工程实际中得到了应用。文献[1-4]是针对于确定性系统而言的,文献[5]研究了离散时间马尔科夫跳变系统的混合 H_2/H_∞ 控制,文献[6]考虑了利用 Riccati 方程的方法解决带有随机加性噪声的线性系统的问题,文献[7]则研究了不确定多时滞广义系统的鲁棒控制问题。文献[8]和[9]分别研究了 H_2/H_∞ 控制在 CDMA 系统的随机功率控制和硬盘驱动器的抗干扰设计。

近年来,随着 H_2/H_∞ 控制器的设计及其应用的逐渐普遍,带有乘性噪声的连续和离散时间系统的随机 H_∞ 控制和混合 H_2/H_∞ 控制问题已经成为一个热门的研究课题。文献[10]给出了基于线性矩阵不等式的随机有界实引理,这一引理在随机 H_∞ 滤波器设计中起着非常重要的作用。文献[11]很好地解决了带乘性

收稿日期:2015-12-31
基金项目:国家自然科学基金项目(61402265);山东科技大学群星计划项目(qx2013111)
作者简介:蒋登辉(1990—),女,山东泰安人,硕士研究生,主要从事随机鲁棒控制研究.
李 艳(1975—),女,山东泰安人,讲师,博士,主要从事随机鲁棒控制研究,本文通信作者.
E-mail:liyanghd@163.com

噪声的马尔可夫跳系统的精确可观测性和精确可检测性的问题，并提出了相应的 PBH 判据，对系统的鲁棒 H_2/H_∞ 控制进行了详细的设计；文献[12]对状态依赖噪声的系统进行了讨论，获得了关于随机 H_2/H_∞ 控制设计的成果。张维海等[13]针对一类状态和扰动依赖噪声的系统进行了 H_2/H_∞ 控制器设计。尽管关于 H_2/H_∞ 控制器设计理论已经十分成熟，但是考虑到工程实践中输出过程也受到噪声的影响的实际，例如在动力调谐陀螺中，过大的输出噪声会引起视轴的抖动较大，从而影响它的跟踪精度和稳定精度。因此本文研究状态方程和输出方程均带有多个噪声源的离散随机控制系统的 H_2/H_∞ 控制器设计问题。

本文的主要内容安排如下：第一节介绍离散随机控制系统模型，并给出相关定义和重要引理；第二节提出设计目标和要求，并获得 H_2/H_∞ 控制设计。第三节采用逆向迭代算法来求解四个广义代数 Riccati 方程，并对系统进行了数值仿真。第四节总结全文。

为了简便，本文采用以下基本数学符号：用 $\mathbf{R}^n$ 来表示 n 维实向量的线性空间，$\mathbf{R}_{m\times n}$ 来表示所有 $m\times n$ 阶实矩阵的线性空间，$N=\{0,1,2,\cdots\}$，$\boldsymbol{U}'$ 表示矩阵 $\boldsymbol{U}$ 的转置，$\boldsymbol{U}\geqslant 0(\boldsymbol{U}>0)$ 是一个非负正定(正定)矩阵，在 $\mathbf{R}^n$ 中的标准向量范数用 $\|\cdot\|$ 表示，矩阵 $\boldsymbol{U}$ 的诱导范数用 $\|\boldsymbol{U}\|$ 表示，$L^2(\infty,\mathbf{R}^k)$ 表示 $\mathbf{R}^k$ 值平方可积随机向量空间。

1 带乘性噪声的随机控制系统模型和基本概念

本文考虑以下状态、控制输入和输出均带乘性噪声的随机控制系统：

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}(k+1)=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{X}(k)+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{u}(k)+\sum_{i=1}^m(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}(k)+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{u}(k))p_i(k),\\ \boldsymbol{Z}(k)=\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{X}(k)+\sum_{i=1}^m\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{X}(k)p_i(k),\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}_0\in\mathbf{R}^n,k\in N。\end{cases}\tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{X}(k)$ 表示系统的状态；控制输入 $\boldsymbol{u}(k)=\boldsymbol{F}\boldsymbol{X}(k)$；$\boldsymbol{Z}(k)$ 是系统输出；$p_i(k)$ 是定义在完备概率空间上的一个随机变量序列，是一个二阶矩过程，其期望和协方差分别是 $E(p_i(k))=0$，$E(p_i(m)p_i(j))=\delta_{mj}$，$m,j\in N$。$\delta_{mj}$ 是克罗内克函数，当 $m=j$ 时，$\delta_{mj}=1$；如果 $m\neq j$，那么 $\delta_{mj}=0$。$\boldsymbol{A}_i$，$\boldsymbol{B}_i$ 和 $\boldsymbol{C}_i$（$i=1,2,\cdots,m$）是具有适当维数的常数矩阵。为了方便，系统(1)也表示为 $\left(\boldsymbol{A}_0,\sum_{i=1}^m\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{B}_0,\sum_{i=1}^m\boldsymbol{B}_i\mid\boldsymbol{C}_0,\sum_{i=1}^m\boldsymbol{C}_i\right)$。

定义 1[14] 若对 $\forall\boldsymbol{X}_0\in\mathbf{R}^n$，有 $\lim\limits_{k\to\infty}E\|\boldsymbol{X}(k,\boldsymbol{X}_0)\|^2=0$，那么当 $\boldsymbol{u}(k)\equiv 0$ 时，离散随机控制系统(1)是均方稳定的，简称是稳定的。

定义 2[14] 如果存在反馈矩阵 $\boldsymbol{F}\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 使得闭环随机控制系统(1)是稳定的，那么随机控制系统(1)是可镇定的。

定义 3[14] 对于系统(1)，当 $\boldsymbol{u}(k)\equiv 0$ 时，如果对于任意的 $k\in N$，$\boldsymbol{Z}(k)\equiv 0\Rightarrow\boldsymbol{X}(0)=0$，那么称随机控制系统(1)是精确可观测的。

引理 1[15] 考虑系统(1)当 $\boldsymbol{u}(k)\equiv 0$ 时，

1)如果系统 $\left(\boldsymbol{A}_0,\sum_{i=1}^m\boldsymbol{A}_i\right)$ 是稳定的，则下面的离散 Lyapunov 方程

$$-\boldsymbol{L}+\sum_{i=0}^m\boldsymbol{A}'_i\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_i+\sum_{i=0}^m\boldsymbol{C}'_i\boldsymbol{C}_i=0。\tag{2}$$

有唯一的解 $\boldsymbol{L}\geqslant 0$。

2)如果系统 $\left(\boldsymbol{A}_0,\sum_{i=1}^m\boldsymbol{A}_i\mid\boldsymbol{C}_0,\sum_{i=1}^m\boldsymbol{C}_i\right)$ 是精确可观测的，当且仅当(2)有唯一正定解 $\boldsymbol{L}$ 时，系统 $\left(\boldsymbol{A}_0,\sum_{i=1}^m\boldsymbol{A}_i\right)$ 是稳定的。

引理 2 对于系统(1)，令 $\boldsymbol{B}_i=0(i=1,2,\cdots,m)$，即

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}(k+1)=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{X}(k)+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{u}(k)+\sum_{i=1}^m\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}(k)p_i(k),\\ \boldsymbol{Z}(k)=\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{X}(k)+\sum_{i=1}^m\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{X}(k)p_i(k),\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}_0\in\mathbf{R}^n,k\in N。\end{cases}\tag{3}$$

如果系统 $(\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{B}_0,\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}_i)$ 是可镇定的并且 $(\boldsymbol{A}_0,\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}_i \mid \boldsymbol{C}_0,\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{C}_i)$ 是精确可观测的，那么下面的广义代数 Riccati 方程

$$-\boldsymbol{L}+\sum_{i=0}^{m}\boldsymbol{A}'_i\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_i+\sum_{i=0}^{m}\boldsymbol{C}'_i\boldsymbol{C}_i-\boldsymbol{A}'_0\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}'_0\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}_0)^{-1}\boldsymbol{B}'_0\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_0=0 \tag{4}$$

有唯一解 $\boldsymbol{L}>0$，而且

$$\min\sum_{k=0}^{\infty}E\Big\{\boldsymbol{X}'(k)\big(\sum_{i=0}^{m}\boldsymbol{C}'_i\boldsymbol{C}_i\big)\boldsymbol{X}(k)+\boldsymbol{u}'(k)\boldsymbol{u}(k)\Big\}=\boldsymbol{X}'_0\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}_0,$$

并且最优控制为

$$\boldsymbol{u}^*(k)=-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}'_0\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}_0)^{-1}\boldsymbol{B}'_0\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{X}(k)。$$

引理 2 由文献[16]中的引理 3 变换而来，两者证明过程基本相同，在此不再赘述。

接下来引进一个随机有界实引理。首先考虑下面的随机控制系统：

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}(k+1)=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{X}(k)+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{v}(k)+\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}(k)+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{v}(k))p_i(k),\\ \boldsymbol{Z}(k)=\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{X}(k)+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{X}(k)p_i(k),\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}_0\in\mathbf{R}^n,k\in N。\end{cases} \tag{5}$$

其中，$\boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^{n_v}$ 是指外部干扰，$\boldsymbol{Z}\in\mathbf{R}^{n_z}$ 是控制输出。

定义 4 系统(5)中，如果扰动输入 $v(k)\in l_w^2(N,\mathbf{R}^{n_v})$，控制输出为 $\boldsymbol{Z}(k)\in l_w^2(N,\mathbf{R}^{n_z})$，由 $\Gamma\boldsymbol{v}(k):=\boldsymbol{C}x(k;0,\boldsymbol{v})$ 定义的扰动算子 $\Gamma:l_w^2(N,\mathbf{R}^{n_v})\rightarrow l_w^2(N,\mathbf{R}^{n_z})$，对于 $\forall\boldsymbol{v}(k)\in l_w^2(N,\mathbf{R}^{n_v})$，$\boldsymbol{X}(0)=0$，其范数如下：

$$\begin{aligned}\|\Gamma\|=&\sup_{\boldsymbol{v}(k)\in l_w^2(N,\mathbf{R}^{n_v}),\boldsymbol{v}\neq0,\boldsymbol{X}_0=0}\frac{\|\boldsymbol{Z}(k)\|_{l_w^2(N,\mathbf{R}^{n_z})}}{\|\boldsymbol{v}\{\boldsymbol{WTBX}(\boldsymbol{k})\|_{\boldsymbol{l}_{\boldsymbol{w}}^2(N,\mathbf{R}^{n_v})}}=\\ &\sup_{\boldsymbol{v}(k)\in l_w^2(N,\mathbf{R}^{n_v}),\boldsymbol{v}\neq0,\boldsymbol{X}_0=0}\frac{\left(\sum_{k=0}^{\infty}E\|\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{X}(k)+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{X}(k)p_i(k)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum_{k=0}^{\infty}E\|\boldsymbol{v}(k)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\\ &\sup_{\boldsymbol{v}(k)\in l_w^2(N,\mathbf{R}^{n_v}),\boldsymbol{v}\neq0,\boldsymbol{X}_0=0}\frac{\left\{\sum_{k=0}^{\infty}E\left[\boldsymbol{X}'(k)\left(\sum_{i=0}^{m}\boldsymbol{C}'_i\boldsymbol{C}_i\right)\boldsymbol{X}(k)\right]\right\}^{\frac{1}{2}}}{\left[\sum_{k=0}^{\infty}E(\boldsymbol{v}'(k)\boldsymbol{v}(k))\right]^{\frac{1}{2}}}。\end{aligned}$$

对文献[6]中的引理 4 做一个简单推广，可以得到以下引理：

引理 3 如果系统(5)是内部稳定的，并且对于任意给定的 $\gamma>0$，满足 $\|\Gamma\|<\gamma$，则下列广义代数 Riccati 方程

$$\begin{cases}-\boldsymbol{L}+\sum_{i=0}^{m}\boldsymbol{A}'_i\boldsymbol{L}\boldsymbol{A}_i-\sum_{i=0}^{m}\boldsymbol{C}'_i\boldsymbol{C}_i-\\ \left(\sum_{i=0}^{m}\boldsymbol{A}'_i\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}_i\right)\left(\gamma^2\boldsymbol{I}+\sum_{i=0}^{m}\boldsymbol{B}'_i\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}_i\right)^{-1}\left(\sum_{i=0}^{m}\boldsymbol{A}'_i\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}_i\right)'=0,\\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{L})=\gamma^2\boldsymbol{I}+\sum_{i=0}^{m}\boldsymbol{B}'_i\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}_i>0\end{cases} \tag{6}$$

存在一个稳定解 $\boldsymbol{L}\leqslant0$，即当 $\boldsymbol{F}=-\left(\gamma^2\boldsymbol{I}+\sum_{i=0}^{m}\boldsymbol{B}'_i\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}_i\right)^{-1}\left(\sum_{i=0}^{m}\boldsymbol{A}'_i\boldsymbol{L}\boldsymbol{B}_i\right)'$ 时，系统 $\left(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{F},\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{F})\right)$ 是稳定的。相反，如果系统(5)内部稳定且系统(6)有稳定解 $\boldsymbol{L}\leqslant0$，则 $\|\Gamma\|<\gamma$。

2 无限时域离散随机控制系统的鲁棒 H_2/H_∞ 控制设计

本节我们利用代数 Riccati 方程得出随机 H_2/H_∞ 控制问题的解。考虑如下离散随机控制系统：

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}(k+1)=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{X}(k)+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{v}(k)+\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{X}(k)+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{v}(k))p_i(k)+\overline{\boldsymbol{B}}_0\boldsymbol{u}(k),\\ \boldsymbol{Z}(k)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{X}(k)+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{X}(k)p_i(k)\\ \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)\end{bmatrix},\\ \boldsymbol{D}'\boldsymbol{D}=\boldsymbol{I},\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}_0\in\mathbf{R}^n,k\in\mathbf{N}。\end{cases} \tag{7}$$

其中，$\boldsymbol{u}(k)\in l_w^2(N,\mathbf{R}^{n_u})$ 是控制输入，$\boldsymbol{v}(k)$ 是一个外部干扰。$p_i(k)$ 的定义与系统(1)中的定义相同。给定一个扰动衰减水平 $\gamma>0$，定义两个相关的性能指标：

$$J_1^\infty(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\sum_{k=0}^{\infty}E[\gamma^2\|\boldsymbol{v}(k)\|^2-\|\boldsymbol{Z}(k)\|^2],\tag{8}$$

$$J_2^\infty(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\sum_{k=0}^{\infty}E[\|\boldsymbol{Z}(k)\|^2]。\tag{9}$$

系统(7)的无限时域随机 H_2/H_∞ 控制器设计要求如下：

给定一个标量 $\gamma>0$，尽可能地让控制器 $\boldsymbol{u}^*(k)\in l_w^2(N,\mathbf{R}^{n_u})$ 可以满足：

1) $\boldsymbol{u}^*(k)$ 使得系统(7)稳定，即当 $\boldsymbol{v}(k)\equiv 0$，$\boldsymbol{u}(k)=\boldsymbol{u}^*(k)$，对于任意初始值 $\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}_0$，系统(7)的状态轨迹满足 $\lim_{k\to\infty}E\|\boldsymbol{X}(k)\|^2=0$。

2) $\|\Gamma_{\boldsymbol{u}^*}\|=\sup\limits_{\boldsymbol{v}(k)\in l_w^2(N,\mathbf{R}^{n_v}),\boldsymbol{v}\neq 0,\boldsymbol{X}_0=0}\dfrac{\left(\sum_{k=0}^{\infty}E\|\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{X}(k)+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{X}(k)p_i(k)\|^2+\|\boldsymbol{u}^*(k)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum_{k=0}^{\infty}E\|\boldsymbol{v}(k)\|^2\right)^{\frac{1}{2}}}<\gamma$。

3)如果系统(7)中存在最坏的扰动 $\boldsymbol{v}^*(k)\in l_w^2(N,\mathbf{R}^{n_v})$，$\boldsymbol{u}^*(k)$ 能最大限度地使得输出能量(9)最小。

如果上述的 $(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)$ 存在，那么无限时域随机 H_2/H_∞ 控制问题是可解的。显然，$(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)$ 是方程(8)和(9)的纳什平衡点，并且满足：

$$J_1^\infty(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)\leqslant J_1^\infty(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}),J_2^\infty(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)\leqslant J_2^\infty(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}^*)。\tag{10}$$

定理1 对于系统(7)，假设以下四个广义代数 Riccati 方程

$$\begin{cases}-\boldsymbol{L}_1+(\boldsymbol{A}_0+\overline{\boldsymbol{B}}_0\boldsymbol{F}_2)'\boldsymbol{L}_1(\boldsymbol{A}_0+\overline{\boldsymbol{B}}_0\boldsymbol{F}_2)+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}'_i\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_i\\ -\sum_{i=0}^{m}\boldsymbol{C}'_i\boldsymbol{C}_i-\boldsymbol{F}'_2\boldsymbol{F}_2-\boldsymbol{F}_3\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{L}_1)^{-1}\boldsymbol{F}'_3=0,\\ \boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{L}_1)>0;\end{cases}\tag{11}$$

$$\boldsymbol{F}_1=-\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{L}_1)^{-1}\boldsymbol{F}'_3;\tag{12}$$

$$\begin{aligned}&-\boldsymbol{L}_2+(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{F}_1)'\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{F}_1)+\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{F}_1)'\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{F}_1)+\\&\sum_{i=0}^{m}\boldsymbol{C}'_i\boldsymbol{C}_i-\boldsymbol{F}_4\boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{L}_2)^{-1}\boldsymbol{F}'_4=0;\end{aligned}\tag{13}$$

$$\boldsymbol{F}_2=-\boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{L}_2)^{-1}\boldsymbol{F}'_4\tag{14}$$

有解 $(\boldsymbol{L}_1,\boldsymbol{L}_2;\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2)$，并且满足 $\boldsymbol{L}_1<0$ 和 $\boldsymbol{L}_2>0$。其中，

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}_3=(\boldsymbol{A}_0+\overline{\boldsymbol{B}}_0\boldsymbol{F}_2)'\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{B}_0+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}'_i\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{B}_i,\\ \boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{L}_1)=\gamma^2\boldsymbol{I}+\sum_{i=0}^{m}\boldsymbol{B}'_i\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{B}_i,\\ \boldsymbol{F}_4=(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{F}_1)'\boldsymbol{L}_2\overline{\boldsymbol{B}}_0,\\ \boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{L}_2)=\boldsymbol{I}+\overline{\boldsymbol{B}}'_0\boldsymbol{L}_2\overline{\boldsymbol{B}}_0。\end{cases}\tag{15}$$

如果系统 $\left(\boldsymbol{A}_0,\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}_i\mid\boldsymbol{C}_0,\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{C}_i\right)$ 和 $\left(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{F}_1,\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{F}_1)\mid\boldsymbol{C}_0,\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{C}_i\right)$ 是精确可观测的，那么 H_2/H_∞ 控制问题有以下最优解：

$$\boldsymbol{u}^*(k)=\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{X}(k),\ \boldsymbol{v}^*(k)=\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{X}(k)。\tag{16}$$

首先，给出引理4，将用于定理1的证明。

引理4 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3,\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{L}_1)$ 的定义同定理1，$\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{D}_2$ 由下式表示：

$$\boldsymbol{D}_1=\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^{m}\boldsymbol{C}_i\\ \boldsymbol{F}_2\end{bmatrix},\boldsymbol{D}_2=\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^{m}\boldsymbol{C}_i\\ \boldsymbol{F}_2\\ \boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{L}_1)^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{F}'_3\end{bmatrix},$$

有以下结论：

1)如果随机系统 $\left(\boldsymbol{A}_0,\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}_i\mid\boldsymbol{C}_0,\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{C}_i\right)$ 是精确可观测的，那么系统 $\left(\boldsymbol{A}_0+\overline{\boldsymbol{B}}_0\boldsymbol{F}_2,\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}_i\mid\boldsymbol{D}_2\right)$ 也是精

确可观测的。

2)如果随机控制系统 $\left(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{F}_1,\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{F}_1)\mid \boldsymbol{C}_0,\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{C}_i\right)$ 是精确可观测的,那么随机控制系统 $\left(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{F}_1+\overline{\boldsymbol{B}}_0\boldsymbol{F}_2,\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{F}_1)\mid \boldsymbol{D}_1\right)$ 也是精确可观测的。

定理1的证明分为以下三个步骤:

步骤1: $(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)\in l_w^2(N,\mathbf{R}^{n_u})\times l_w^2(N,\mathbf{R}^{n_v})$;$\left(\boldsymbol{A}_0+\overline{\boldsymbol{B}}_0\boldsymbol{F}_2,\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}_i\right)$ 是稳定的。由此可知,方程(11)和(13)可分别改写为

$$-\boldsymbol{L}_1+(\boldsymbol{A}_0+\overline{\boldsymbol{B}}_0\boldsymbol{F}_2)'\boldsymbol{L}_1(\boldsymbol{A}_0+\overline{\boldsymbol{B}}_0\boldsymbol{F}_2)+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}_i'\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_i-\boldsymbol{D}'_2\boldsymbol{D}_2=0, \tag{17}$$

$$-\boldsymbol{L}_2+(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{F}_1+\overline{\boldsymbol{B}}_0\boldsymbol{F}_2)'\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{F}_1+\overline{\boldsymbol{B}}_0\boldsymbol{F}_2)+\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{A}_i'+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{F}_1)'\boldsymbol{L}_2(\boldsymbol{A}_i'+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{F}_1)+\boldsymbol{D}'_1\boldsymbol{D}_1=0。 \tag{18}$$

其中 $\boldsymbol{D}_1$ 和 $\boldsymbol{D}_2$ 的定义同引理4。

在引理4中,因为系统 $\left(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{F}_1,\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{F}_1)\mid \boldsymbol{C}_0,\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{C}_i\right)$ 是精确可观测的,所以系统 $\left(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{F}_1+\overline{\boldsymbol{B}}_0\boldsymbol{F}_2,\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{F}_1)\mid \boldsymbol{D}_1\right)$ 也是精确可观测的,故由引理2和方程(18)可知系统 $\left(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{F}_1+\overline{\boldsymbol{B}}_0\boldsymbol{F}_2,\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{F}_1)\right)$ 是稳定的。因此有

$$\boldsymbol{u}^*(k)=\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{X}(k)\in l_w^2(N,\mathbf{R}^{n_u}),\boldsymbol{v}^*(k)=\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{X}(k)\in l_w^2(N,\mathbf{R}^{n_v})。$$

同理,根据引理2、引理4和方程(17),得出系统 $\left(\boldsymbol{A}_0+\overline{\boldsymbol{B}}_0\boldsymbol{F}_2,\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}_i\right)$ 在 $\boldsymbol{u}^*(k)=\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{X}(k)$ 下是内部能稳的。

步骤2: 这一步证明 $\|\Gamma_{\boldsymbol{u}^*}\|<\gamma$。将 $\boldsymbol{u}(k)=\boldsymbol{u}^*(k)=\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{X}(k)$ 代入系统(7)的状态方程中,根据文献[10]中的注2.9,若系统 $\left(\boldsymbol{A}_0+\overline{\boldsymbol{B}}_0\boldsymbol{F}_2,\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}_i\right)$ 是稳定的,则对于任意的 $\boldsymbol{v}(k)\in l_w^2(N,\mathbf{R}^{n_v})$,有 $\boldsymbol{X}(k)\in l_w^2(N,\mathbf{R}^{n})$。从而根据有界实引理3,可以直接得出 $\|\Gamma_{\boldsymbol{u}^*}\|<\gamma$。

步骤3: 当系统(7)中存在最坏的干扰 $\boldsymbol{v}^*$ 时,$\boldsymbol{u}^*$ 同样会减少系统的输出能量。

首先证明 $\boldsymbol{v}^*$ 存在且 $\boldsymbol{v}^*(k)=\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{X}(k)$。将 $\boldsymbol{u}^*(k)=\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{X}(k)$ 代入系统(7),根据方程(11)有

$$\begin{aligned}
J_1^T(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v})=&\sum_{k=0}^{T}E[\gamma^2\|\boldsymbol{v}(k)\|^2-\|\boldsymbol{Z}(k)\|^2]=\\
&\sum_{k=0}^{T}E\left[\gamma^2\boldsymbol{v}'(k)\boldsymbol{v}(k)-\boldsymbol{X}'(k)\left(\sum\nolimits_{i=0}^{m}\boldsymbol{C}'_i\boldsymbol{C}_i+\boldsymbol{F}'_2\boldsymbol{F}_2\right)X(k)\right]+\\
&\boldsymbol{X}'(0)\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{X}_0-E(\boldsymbol{X}'(T+1)\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{X}(T+1))+\sum_{k=0}^{T}E\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}(k)\\ \boldsymbol{v}(k)\end{bmatrix}'\boldsymbol{Q}_1(\boldsymbol{L}_1)\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}(k)\\ \boldsymbol{v}(k)\end{bmatrix}=\\
&\boldsymbol{X}'(0)\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{X}_0-E[\boldsymbol{X}'(T+1)\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{X}(T+1)]+\\
&\sum_{k=0}^{T}E[\boldsymbol{v}(k)-\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{X}(k)]'\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{L}_1)[\boldsymbol{v}(k)-\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{X}(k)],
\end{aligned}$$

其中,

$$\boldsymbol{Q}_1(\boldsymbol{L}_1)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M} & \boldsymbol{L}\\ \boldsymbol{L}' & \boldsymbol{R}\end{bmatrix},\boldsymbol{L}=(\boldsymbol{A}_0+\overline{\boldsymbol{B}}_0\boldsymbol{F}_2)'\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{B}_0+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}'_i\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{B}_i,\boldsymbol{R}=\boldsymbol{B}'_0\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{B}_0+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{B}'_i\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{B}_i,$$

$$\boldsymbol{M}=-\boldsymbol{L}_1+(\boldsymbol{A}_0+\overline{\boldsymbol{B}}_0\boldsymbol{F}_2)'\boldsymbol{L}_1(\boldsymbol{A}_0+\overline{\boldsymbol{B}}_0\boldsymbol{F}_2)+\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}'_i\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_i,$$

由于 $\lim_{T\to\infty}E\|\boldsymbol{X}(T)\|^2=0$,可得:

$$J_1^{\infty}(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v})=\boldsymbol{X}'_0\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{X}_0+\sum_{k=0}^{T}E[\boldsymbol{v}(k)-\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{X}(k)]'\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{L}_1)[\boldsymbol{v}(k)-\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{X}(k)]\geqslant$$

$$J_1^\infty(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}'_0\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{X}_0。$$

从上式可以看出，$\boldsymbol{v}^*(k)=\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{X}(k)\in l_w^2(N,\mathbf{R}^{n_v})$ 是对应于 $\boldsymbol{u}^*$ 的最坏的扰动。

将 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^*=\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{X}(k)$ 代入系统(7)中，从而变为了优化问题 $\min_{\boldsymbol{u}\in l_w^2(N,\mathbf{R}^{n_u})}J_2^\infty(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}^*)$，即一个标准线性二次最优控制问题。由于 $\left(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{F}_1+\overline{\boldsymbol{B}}_0\boldsymbol{F}_2,\sum_{i=1}^m(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{F}_1)\right)$ 的稳定性，且系统 $\left(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{F}_1,\overline{\boldsymbol{B}}_0,\sum_{i=1}^m(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{F}_1)\right)$ 是可镇定的，并且假设 $\left(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{F}_1,\sum_{i=1}^m(\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{F}_1)\middle|\boldsymbol{C}_0,\sum_{i=1}^m\boldsymbol{C}_i\right)$ 是精确可观测的，根据引理 2，可以得出 $\min_{\boldsymbol{u}\in l_w^2(N,\mathbf{R}^{n_u})}J_2^\infty(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}^*)=J_2^\infty(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*)=\boldsymbol{X}'_0\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{X}_0$。证毕。

3 数值仿真

本文采用逆向迭代算法来求解四个耦合方程(7)～(10)。给出下面的一个二维数值仿真，假设迭代次数是 100 次，在随机控制系统(1)中，假设 $m=2$，$\gamma=0.997$，

$$\boldsymbol{A}_0=\begin{pmatrix}0.65&0\\0&0.9\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}0.45&0\\0&0.55\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0.25&0\\0&0.35\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_0=\begin{pmatrix}0.3\\0.35\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}0.6\\0.55\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}0.45\\0.85\end{pmatrix},\overline{\boldsymbol{B}}_0=\begin{pmatrix}0.2\\0.15\end{pmatrix},\boldsymbol{C}_0=\begin{pmatrix}0.75\\0.55\end{pmatrix},\boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix}0.15\\0.55\end{pmatrix},\boldsymbol{C}_2=\begin{pmatrix}0.3\\0.55\end{pmatrix},\boldsymbol{D}'\boldsymbol{D}=1$$

通过运用逆向迭代算法，获得耦合方程(7)～(10)的最优解如下：

$$\begin{cases}\boldsymbol{L}_1(0)=\begin{pmatrix}L_1(1,1)&L_1(1,2)\\L_1(2,1)&L_1(2,2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1.9190&-1.7630\\-1.7630&-2.2588\end{pmatrix}\\\boldsymbol{L}_2(0)=\begin{pmatrix}L_2(1,1)&L_2(1,2)\\L_2(2,1)&L_2(2,2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.1832&1.9519\\1.9519&2.8291\end{pmatrix}\\\boldsymbol{F}_1=(F_1(1,1)\quad F_1(1,2))=(-0.3853\quad -0.5626)\\\boldsymbol{F}_2=(F_2(1,1)\quad F_2(1,2))=(-0.2208\quad -0.3546)\end{cases}$$

通过解可知，$\boldsymbol{L}_1<0$，$\boldsymbol{L}_2>0$。迭代过程如图 1 和图 2 所示，图中横坐标是迭代次数 N，纵坐标是最优解 $\boldsymbol{L}_1(0)$、$\boldsymbol{L}_2(0)$、$\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 矩阵中每个元素的值，$\boldsymbol{L}_1(0)$、$\boldsymbol{L}_2(0)$ 为对称矩阵。图形清晰地表明了逆向迭代算法的收敛性和快速性。

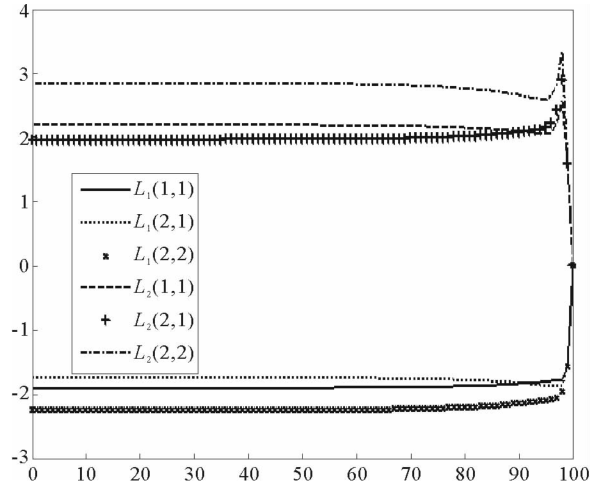

图 1　$\boldsymbol{L}_1$ 和 $\boldsymbol{L}_2$ 的迭代过程

Fig. 1　The iterative process of $\boldsymbol{L}_1$ and $\boldsymbol{L}_2$

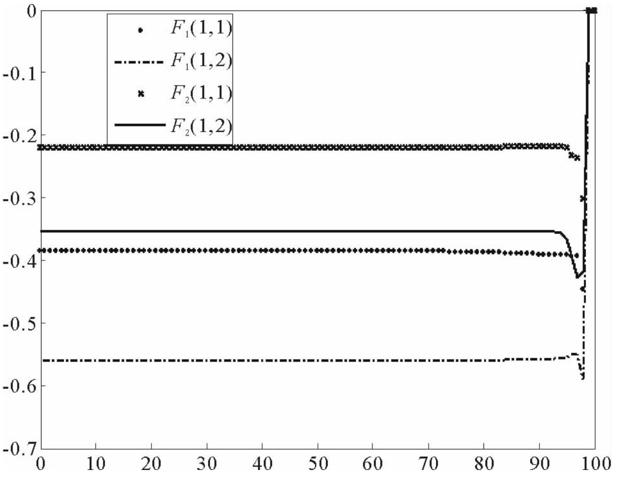

图 2　$\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的迭代过程

Fig. 2　The iterative process of $\boldsymbol{F}_1$ and $\boldsymbol{F}_2$

4 结论

本文研究了带乘性噪声的离散随机控制系统的控制器设计问题，通过精确可观测性和一个有界实引理，得出了最优的鲁棒 H_2/H_∞ 控制设计，该设计与四个耦合的广义代数 Riccati 方程有关。使用逆向迭代算法对四个方程进行了求解，并通过数值仿真验证了算法的有效性和设计的正确性。

参考文献：

[1]BASAR T,BERNHAR P. H_∞ -optimal control and related minimax design problems:A dynamic game approach[M]. First. France:Springer Science & Business Media,1995:11-399.

[2]LIMEBEER D,ANDERSON B,HENDEL B,et al. A Nash game approach to mixed H_2/H_∞ control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,1994,39(1):69-82.

[3]KHARGONEKAR P P,ROTEA M A. Mixed H_2/H_∞ control:A convex optimization approach[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,1991,36(7):824-837.

[4]SZNAIER M,ROTSEIN H. An exact solution to general 4-blocks discrete-time mixed H_2/H_∞ problems via convex optimization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,1994,43(10):2251-2256.

[5]COSTA O L V,MARQUES R P. Mixed H_2/H_∞ control of discrete-time Markovian jump linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,1998,43(1):95-100.

[6]CHEN X,MOORE J B,ZHOU X Y,et al. Solvability and asymptotic behavior of generalized Riccati equations arising in indefinite stochastic LQ controls[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2001,46(1):428-440.

[7]王中凤,张高民,王玉芬. 不确定多时滞广义系统的鲁棒 H_∞ 控制[J]. 山东科技大学学报(自然科学版),2009,28(2):106-110.
WANG Zhongfeng,ZHANG Gaomin,WANG Yufen. Robust H_∞ control for uncertain generalized systems with multiple time-delays[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology(Natural Science),2009,28(2):106-110.

[8]QIAN L J,GAJIC Z. Variance minimization stochastic power control in CDMA systems[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications,2002,5(1) :1763-1767.

[9]DU C L,XIE L H,TEOH J N,et al. An improved mixed H_2/H_∞ control design for hard disk drives[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology,2005,13(5):832-839.

[10]EL BOUHTOURI A,HINRICHSEN D,Pritchard A J. H_∞ -type control for discrete-time stochastic systems[J]. International Journal of Robust Nonlinear Control,1999,9(13):923-948.

[11]侯婷. 离散时间 Markov 跳变系统的稳定性和鲁棒 H_2/H_∞ 控制[D]. 青岛:山东科技大学,2010:9-97.

[12]CHEN B S,ZHANG W H. Stochastic H_2/H_∞ control with state-dependent noise[J]. Automatic Control,IEEE Transactions on,2004,49(1):45-57.

[13]ZHANG W H,HUANG Y L,Zhang H S. Stochastic H_2/H_∞ control for discrete-time systems with state and disturbance dependent noise[J]. Automatica,2007,43(3):513-521.

[14]谭成. 随机系统的稳定性、能观测性及能检测性研究[D]. 青岛:山东科技大学,2012:10-37.

[15]LI Z Y,WANG Y,ZHOU B,et al. Detectability and observability of discrete-time stochastic systems and their applications [J]. Automatica,2009,45(5):1340-1346.

[16]ZHANG W H,HUANG Y L,XIE L H. Infinite horizon stochastic H_2/H_∞ control for discrete-time systems with state and disturbance dependent noise[J]. Automatic,2008,44(9):2306-2316.

（责任编辑：傅　游）