引用格式:高玲玲,王向荣. 基于分数布朗运动的 Knight 不确定环境下的期权定价[J]. 山东科技大学学报(自然科学版),2018, 37(2):53-58.
GAO Lingling, WANG Xiangrong. Option pricing under Knight uncertainty based on fractional brownian motion market[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science), 2018, 37(2):53-58.

基于分数布朗运动的 Knight 不确定环境下的期权定价

高玲玲[1],**王向荣**[2]
(1. 山东科技大学 信息工程系,山东 泰安 271000; 2. 山东科技大学 数学与系统科学学院,山东 青岛 266590)

摘　要:研究了 Knight 不确定环境下的金融市场。假设标的资产服从分数布朗运动过程,在 Knight 不确定环境下,得到了欧式期权的动态定价模型和最小期权定价模型。并借助于拟鞅方法、等价概率测度理论求出了该模型的显示解。

关键词:Knight 不确定性;分数布朗运动;期权定价

中图分类号:O211.63　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-3767(2018)02-0053-06
DOI: 10.16452/j.cnki.sdkjzk.2018.02.008

Option Pricing Under Knight Uncertainty Based on Fractional Brownian Motion

GAO Lingling[1], WANG Xiangrong[2]
(1. Department of Information Engineering, Shandong University of Science and Techonlogy, Taian, Shandong 271000, China; 2. College of Mathematics and Systems, Shandong University of Science and Techonlogy, Qingdao, Shandong 266590, China)

Abstract: In this paper the financial market under Knight uncertainty is studied. When underlying assets are driven by fractional Brownian motion, the dynamic pricing model of European options as well as the minimum option pricing model are established under the context of Knight uncertainty, and the explicit solutions are obtained through the Quasi-martingale method and equivalent probability martingale measure.

Key words: Knight uncertainty; fractional Brownian motion; option pricing

金融衍生资产定价是现代金融理论的核心内容,Black 和 Scholes 假定股票价格服从几何布朗运动,得出了著名的 Black-Scholes 公式[1]。而金融实证表明,股票市场价格具有长期依赖性和自相似性[2],用分数布朗运动来代替几何布朗运动更贴近市场规律。股票价格由分数布朗运动驱动的期权定价模型吸引了许多研究者的注意[3-6]。

1921 年,美国经济学家 Knight[7] 首次提出在金融市场上经常会有无法用单一概率测度度量的风险,称为 Knight 不确定性风险。在文献[8]中,Chen 和 Larry 利用 BSDE[9] 的有关理论第一次建立起数学模型,体现了 Knight 不确定性。张慧等[10] 在 Knight 不确定环境下,假设股票价格过程服从几何布朗运动,建立了

收稿日期:2017-06-24
基金项目:国家自然科学基金项目(11271007)
作者简介:高玲玲(1978—),女,山东泰安人,讲师,硕士,主要从事金融数学方面的研究.
王向荣(1966—),男,山东日照人,教授,博士生导师,主要从事金融数学,控制理论方面的研究,本文通信作者.
E-mail: xrwang@sohu.com

欧式期权的最小定价模型,并求出了模型的显示解。韩立岩等[11]利用模糊测度的思想,建立了 Knight 不确定环境下基于模糊测度的期权定价模型。费文银等[12]对 Knight 不确定环境下带通胀的最优投资和消费模型研究,得到了对应问题的最优投资组合模型。王向荣等[13]假设股票价格服从几何布朗运动的条件下,讨论了 Knight 不确定环境下,多资产彩虹期权的动态定价,给出了彩虹期权的上下界区间。黄虹等[14]讨论了股票价格服从 Levy 假设下的期权定价问题。

本文在股票价格服从分数布朗运动的假设下,讨论 Knight 不确定环境下的期权定价问题。利用 Knight 不确定环境下概率测度不唯一的特性,对不确定参数引入一个可行控制集合 Θ 来刻画金融市场上的 Knight 不确定性,建立了期权的动态定价模型以及欧式期权在一个概率测度集合上的最小定价模型。

1 资产价格模型与测度变换

设(Ω,F,F_t,P)是一个具有 σ 域流的概率空间,其中$\{F_t\}_{0\leqslant t\leqslant T}$是由分数布朗运动 $\{B_H(t),t\in R\}$ 产生的自然 σ 域流。假设分数市场上有两种资产,一种为无风险资产(债券),另一种为风险资产(股票)。其价格过程分别满足以下方程:

$$\begin{cases} \mathrm{d}P_t = r_t P\,\mathrm{d}t \\ P_0 = 1 \end{cases}, \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \mathrm{d}S_t = \mu S_t\,\mathrm{d}t + \sigma_t S_t\,\mathrm{d}B_t^H \\ S_0 = S \end{cases}。 \tag{1.2}$$

其中,$r_t\geqslant 0$,μ_t 是 F_t 一可测的适应过程,σ 为常数,r_t、μ_t 和 σ 分别表示 t 时刻无风险利率、风险资产在 t 时刻的预期收益率和波动率。

令 $\zeta=\dfrac{\mu-r}{\sigma}$,$\widetilde{B}_t^H = B_t^H + \int_0^t \zeta_s\,\mathrm{d}s$,定义一个风险概率测度 $\widetilde{P}$:

$\dfrac{\mathrm{d}\widetilde{P}}{\mathrm{d}P} =: \exp\left\{-\dfrac{1}{2}\int_t^T \zeta_s^2\,\mathrm{d}s - \int_t^T \zeta_s\,\mathrm{d}B_s^H\right\}$,易知 $\widetilde{B}_t^H$ 在测度 $\widetilde{P}$ 下是一个分数布朗运动,且在测度 $\widetilde{P}$ 下:

$$\mathrm{d}S_t = r_t S_t + \sigma_t S_t\,\mathrm{d}\widetilde{B}_t^H。 \tag{1.3}$$

引理 1[6] 任意有界 F_T 可测的期权 $V\in L^2(P,F_T,R)$ 在任意时刻 $t\in[0,T]$ 的价格 $V(t)$ 由(1.4)给出:

$$V(t) = \mathrm{e}^{-r(T-t)}\,\widetilde{E}_t[V]。 \tag{1.4}$$

其中 $\widetilde{E}_t$ 是概率测度 $\widetilde{P}$ 下的拟条件期望。

引理 2[6] 设函数 f 为满足 $E[f(B_T^H)]<\infty$ 的函数,则对任意 $t<T$,有

$$\widetilde{E}_t[f(B_T^H)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(T^{2H}-t^{2H})}\exp\left[-\frac{(x-B_t^H)^2}{2(T^{2H}-t^{2H})}\right]f(x)\,\mathrm{d}x。 \tag{1.5}$$

2 Knight 不确定环境下的欧式期权定价

为了刻画金融市场上的 Knight 不确定性,引入一个可行控制集合 Θ:

$$\Theta = \{(\theta_t)_{0\leqslant t\leqslant T}, |\theta_t|\leqslant k, a.e.\ t\in[o,T]\}。 \tag{2.1}$$

其中 $k>0$ 为常数。文献[4]把 θ_t 称为 κ-ignorance。

令 $B_t^\theta = B_t^H + \int_0^t \theta_s\,\mathrm{d}s$,由 Θ 生成一个等价概率测度集合 Φ:

$$\Phi = \left\{Q \mid \frac{\mathrm{d}Q^\theta}{\mathrm{d}Q}\Big|_{F_T} := \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T \theta\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta^2\,\mathrm{d}s\right\}, \theta\in\Theta\right\}。 \tag{2.2}$$

本文中金融市场上的 Knight 不确定风险用 Φ 来刻画。投资者可以用 Φ 中的任意概率测度对期权进行定价。从保守角度考虑,Knight 不确定风险爱好者会选择 $ess\sup\{y_t^\theta;\theta\in\Theta\}$ 作为 t 时刻的期权价值,Knight

不确定风险厌恶者会选择 $ess\inf\{y_t^\theta;\theta\in\Theta\}$ 作为 t 时刻的期权价值，从而期权在 t 时刻的动态价值区间为 $[ess\inf\{y_t^\theta;\theta\in\Theta\},ess\sup\{y_t^\theta;\theta\in\Theta\}]$。

定理 2.1　在无套利自融资假设下，设欧式期权到期收益为 $f(S_T)$，则在 Knight 不确定环境下，欧式期权在 t 时刻的动态价格为：

$$y_t^\theta=\exp\left\{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s\right\}\int_{-\infty}^{\infty}f\{S_t\exp[\int_t^T(r_s+\theta_s\sigma)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H}-t^{2H})+\sigma\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}x]\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x。\tag{2.3}$$

证明：由式(1.1)、(1.2)与(1.3)易知在 Knight 不确定环境下，期权价格 y_t^θ 满足如下由分数布朗运动驱动的 BSDE 方程：

$$\begin{cases}\mathrm{d}y_t^\theta=r_ty_t^\theta\mathrm{d}t+\theta z_t^\theta\mathrm{d}t+z_t^\theta\mathrm{d}B_t^\theta\\ y_T^\theta=\xi\end{cases}。\tag{2.4}$$

其中 $z_t^\theta=-a\sigma S_t$，a 为自融资过程中投资到风险资产的比例数量。

易证明方程(2.4)满足由分数布朗运动驱动的 BSDE 方程解的存在唯一性条件，则方程(2.4)存在唯一解(y_t^θ,z_t^θ)。下面求解方程(2.4)。

由引理 1 得：

$$y_t^\theta=\exp\left\{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s\right\}\widetilde{E}_t\{f(S_T)\}$$

$$=\exp\left\{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s\right\}\widetilde{E}_tf\{S_t\exp[\int_t^T(r_s+\theta_s\sigma)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H}-t^{2H})+\sigma(B_T^\theta-B_t^\theta)]\}。$$

由引理 2 知：

$$y_t^\theta=\exp\left\{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s\right\}\int_{-\infty}^{\infty}f\{S_t\exp[\int_t^T(r_s+\theta_s\sigma)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H}-t^{2H})+\sigma\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}x]\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x。$$

证毕。

定理 2.2　期权在 t 时刻的动态价值区间为 $[ess\inf\{y_t^\theta;\theta\in\Theta\},ess\sup\{y_t^\theta;\theta\in\Theta\}]$，其中

$$ess\inf\{y_t^\theta;\theta\in\Theta\}=\exp\left\{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s\right\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f[S_t\exp\{\int_t^T(r-k\mid\sigma\mid)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H}-t^{2H})\}+\sigma\sqrt{(T^{2H}-t^{2H})}\}]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x,$$

$$ess\sup\{y_t^\theta;\theta\in\Theta\}=\exp\left\{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s\right\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f\{S_t\exp[\int_t^T(r+k\mid\sigma\mid)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H}-t^{2H})+\sigma\sqrt{(T^{2H}-t^{2H})}]\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x。$$

证明：由引理 1 知：

$$y_t^\theta=\exp\left\{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s\right\}\widetilde{E}_t\{f(S_T)\}$$

$$=\exp\left\{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s\right\}\widetilde{E}_tf\{S_t\exp[\int_t^T(r_s+\theta_s\sigma)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H}-t^{2H})+\sigma(B_T^\theta-B_t^\theta)]\}$$

$$=\exp\left\{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s\right\}\int_{-\infty}^{\infty}f\{S_t\exp[\int_t^T(r_s+\theta_s\sigma)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H}-t^{2H})+\sigma\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}x]\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

则 $\forall\theta_1,\theta_2\in\Theta$，$|\theta_1|\leqslant k$，$|\theta_2|\leqslant k$，由拟条件期望的单调性，当 $\theta_1\geqslant\theta_2$，有：$y^{\theta_1}(t)\geqslant y^{\theta_2}(t)$。

所以当 $\theta=-k$，$ess\inf\{y_t^\theta;\theta\in\Theta\}$ 取得最小值：

$$ess\inf\{y_t^\theta;\theta\in\Theta\}=y_t^{-k}$$

$$=\exp\left\{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s\right\}\int_{-\infty}^{\infty}f\{S_t\exp[\int_t^T(r-k\mid\sigma\mid)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H}-t^{2H})+\sigma\sqrt{(T^{2H}-t^{2H})}]\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x。$$

当 $\theta = k$, $ess\sup\{y_t^\theta;\theta \in \Theta\}$ 取得最大值:

$$ess\sup\{y_t^\theta;\theta \in \Theta\} = y_t^k$$
$$= \exp\left\{-\int_t^T r_s \mathrm{d}s\right\}\int_{-\infty}^{\infty} f\{S_t \exp[\int_t^T (r + k\mid\sigma\mid)\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H} - t^{2H}) + \sigma\sqrt{(T^{2H} - t^{2H})}]\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x$$

证毕。

3 Knight 环境下金融市场中的欧式期权最小定价

由于 Knight 环境的影响,虽然投资者不确定该用 Φ 中的哪个概率测度来对期权进行定价,但从保守角度考虑,投资者一般会给出期权的最小定价,本节研究 Knight 环境下分数金融市场中的欧式期权最小定价。

假设债券价格方程与风险中性假设下的股票价格方程为:

$$\mathrm{d}P_t = r_t P\mathrm{d}t, \mathrm{d}S_t = r_t S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}B_t^H 。$$

到期日,Knight 环境下执行价格为 K 的欧式看涨期权和欧式看跌期权的最小定价分别为:

$$C(S_t, K) = \min_{Q^\theta \in \Phi}\{\widetilde{E}_t^\theta[\exp\left\{-\int_t^T r_s \mathrm{d}s\right\}(S_T - K)^+]\} ,$$
$$P(S_t, K) = \min_{Q^\theta \in \Phi}\{\widetilde{E}_t^\theta[\exp\left\{-\int_t^T r_s \mathrm{d}s\right\}(K - S_T)^+]\} 。$$

其中 $\widetilde{E}_t^\theta$ 表示概率测度 Q^θ 下的拟条件期望。

定理 3.1 假设 $r_t = r, \sigma_t = \sigma$ 为常数,则

$$C(S_t, K) = \min_{Q^\theta \in \Phi}\{S_t \exp\{-\int_t^T \theta_s \sigma \mathrm{d}s\}N(d_1) - K\exp\{-r(T - t)\}N(d_2)\} ,$$
$$P(S_t, K) = \min_{Q^\theta \in \Phi}\{K\exp\{-r(T - t)\}N(d_2) - S_t \exp\{-\int_t^T \theta_s \sigma \mathrm{d}s\}N(d_1)\} ,$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S_t}{K} + r(T - t) - \int_t^T \theta_s \sigma \mathrm{d}s + \frac{\sigma^2}{2}(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{(T^{2H} - t^{2H})}},$$
$$d_2 = \frac{\ln\frac{S_t}{K} + r(T - t) - \int_t^T \theta_s \sigma \mathrm{d}s - \frac{\sigma^2}{2}(T^{2H} - t^{2H})}{\sigma\sqrt{(T^{2H} - t^{2H})}} 。$$

证明: 由于 $\mathrm{d}S_t = rS_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}B_t^H = (r - \theta_t \sigma)S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}B_t^\theta$

令 $\bar{S}_t = S_t \exp\{-\int_t^T \theta_s \sigma \mathrm{d}s\}$,则 $\mathrm{d}\bar{S}_t = r\bar{S}_t \mathrm{d}t + \sigma\bar{S}_t \mathrm{d}B_t^\theta$

由引理 1 得到概率测度 Q^θ 下:

$$C(S_t, K) = \min_{Q^\theta \in \Phi}\{\widetilde{E}_t[\mathrm{e}^{-r(T-t)}(\bar{S}_T - K)^+]\}$$
$$= \min_{Q^\theta \in \Phi}\{\widetilde{E}_t[\mathrm{e}^{-r(T-t)}\{\bar{S}_t \exp[r(T - t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H} - t^{2H}) + \sigma(B_T^\theta - B_t^\theta)] - K\}^+]\}$$
$$= \min_{Q^\theta \in \Phi}\{\mathrm{e}^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{\infty}\{\bar{S}_t \exp[\sigma x + r(T - t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H} - t^{2H})] - K\}^+]\frac{1}{\sqrt{2\pi(T^{2H} - t^{2H})}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(T^{2H} - t^{2H})}}\mathrm{d}x\}$$
$$= \min_{Q^\theta \in \Phi}\{\bar{S}_t N(d_1) - K\exp\{-r(T - t)\}N(d_2)\} 。$$

将 $\bar{S}_t = S_t \exp\{-\int_t^T \theta_s \sigma \mathrm{d}s\}$ 代入上式得到:

$$C(S_t, K) = \min_{Q^\theta \in \Phi}\{S_t \exp\{-\int_t^T \theta_s \sigma \mathrm{d}s\}N(d_1) - K\exp\{-r(T - t)\}N(d_2)\} 。$$

同样得到：

$$P(S_t,K)=\min_{Q^\theta\in\Phi}\{K\exp\{-r(T-t)\}N(d_2)-S_t\exp\{-\int_t^T\theta_s\sigma\mathrm{d}s\}N(d_1)\}\text{。}$$

证毕。

定理 3.2　假设 r_t,θ_t 为非随机函数，σ 为常数，则

$$C(S_t,K)=\min_{Q^\theta\in\Phi}\{S_t\exp\{-\int_t^T\theta_s\sigma\mathrm{d}s\}N(d_1)-K\exp\{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s\}N(d_2)\}\text{，}$$

$$P(S_t,K)=\min_{Q^\theta\in\Phi}\{K\exp\{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s\}N(-d_2)-S_t\exp\{-\int_t^T\theta_s\sigma\mathrm{d}s\}N(-d_1)\}\text{。}$$

其中

$$d_1=\frac{\ln\frac{S_t}{K}+\int_t^T(r_s-\sigma\theta_s)\mathrm{d}s+\frac{\sigma^2}{2}(T^{2H}-t^{2H})}{\sigma\sqrt{(T^{2H}-t^{2H})}},$$

$$d_2=\frac{\ln\frac{S_t}{K}+\int_t^T(r_s-\sigma\theta_s)\mathrm{d}s-\frac{\sigma^2}{2}(T^{2H}-t^{2H})}{\sigma\sqrt{(T^{2H}-t^{2H})}}\text{。}$$

证明：由引理 1 得

$$\begin{aligned}
&C(S_t,K)=\min_{Q^\theta\in\Phi}\{\tilde{E}_t[\mathrm{e}^{-r(T-t)}(S_T-K)^+]\}\\
&=\min_{Q^\theta\in\Phi}\{\tilde{E}_t[e^{-r(T-t)}\{\bar{S}_t\exp[r(T-t)-\frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H}-t^{2H})+\sigma(B_T^\theta-B_t^\theta)]-K\}^+]\}\\
&=\min_{Q^\theta\in\Phi}\exp\{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s\}\\
&\quad\int_{-\infty}^{\infty}\{S_t\exp[\textstyle\int_t^T(r_s-\sigma\theta_s)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H}-t^{2H})]+\sigma\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}x]-K\}^+]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\}\\
&=\min_{Q^\theta\in\Phi}\{S_t\exp\{-\textstyle\int_t^T\theta_s\sigma\mathrm{d}s\}\int_A\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[x^2-\sigma\sqrt{(T^{2H}-t^{2H})}+\sigma^2(T^{2H}-t^{2H})]}-K\exp\{-\textstyle\int_t^T r_s\mathrm{d}s\}\int_A\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\}\text{。}
\end{aligned}$$

其中，

$$\begin{aligned}
A&=\{S_t\exp[\int_t^T(r_s-\theta_s\sigma)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\sigma^2(T^{2H}-t^{2H})]+\sigma\sqrt{T^{2H}-t^{2H}}x]\geqslant K\}\\
&=\{x:x\geqslant\frac{\ln\frac{K}{S_t}-\int_t^T(r_s-\sigma\theta_s)\mathrm{d}s+\frac{\sigma^2}{2}(T^{2H}-t^{2H})}{\sigma\sqrt{(T^{2H}-t^{2H})}}\}=\{x:x\geqslant-d_2\}\text{。}
\end{aligned}$$

则有：

$$C(S_t,K)=\min_{Q^\theta\in\Phi}\{S_t\exp\{-\int_t^T\theta_s\sigma\mathrm{d}s\}N(d_1)-K\exp\{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s\}N(d_2)\}\text{。}$$

同样得到

$$P(S_t,K)=\min_{Q^\theta\in\Phi}\{K\exp\{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s\}N(-d_2)-S_t\exp\{-\int_t^T\theta_s\sigma\mathrm{d}s\}N(-d_1)\}\text{。}$$

证毕。

4　结论

本文在标的资产由分数布朗运动驱动的假设条件下，研究了 Knight 不确定环境下期权定价问题。建立了期权在一族概率测度下的动态价格模型，并得到了任意时刻期权的动态价值区间。最后得到了 Knight 不确定环境下的欧式期权定价公式。

参考文献：

[1]BLACK F，SCHOLES M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy，1973，81(3)：637-654.

[2]FAMA E. The behavior of stock market price[J]. The Journal of Business，1965，38(1)：34-105.

[3]李蕊.分数布朗运动下带红利的欧式期权定价[J].兰州理工大学学报,2012,38(4):162-164.
LI Rui. European option pricing with dividend and fractional Brownian motion[J]. Journal of Lanzhou University Technology,2012,38(4):162-164.

[4]刘韶跃,杨向群.分数布朗运动环境中混合期权定价[J].工程数学学报,2006,23(1):153-157.
LIU Shaoyue,YANG Xiangqun. Pricing of compound option in a fractional Brownian motion environment[J]. Chinese Journal of Engineerring Mathematicas,2006,23(1):153-157.

[5]李施荔.分数布朗运动下的期权定价问题研究[D].哈尔滨:哈尔滨工程大学,2012.

[6]HU Y. Fractional white noise calculus and applications to finance[J]. Infinite Dimensional Analysis,Quantum Probability and Related Topics,2003,6(1):1-32.

[7]KNIGHT F H. Risk Uncertainty and Profit[M]. Boston:Houghton Mifflin,1921.

[8]CHEN Z J,EPSTEIN L. Ambiguity,risk,and asset return in continuous- time[J]. Econometrica,2002,70:1403-1433.

[9]PARDOUX E,PENG S. Adapted solution of a backward stochastic differential equation[J]. Systems and Control Letters,1990,14(1):55-61.

[10]张慧,聂秀山.Knight 不确定环境下欧式期权的最小定价模型[J].山东大学学报(理学版),2007,42(11):121-126.
ZHANG Hui,NIE Xiushan. Minimal pricing models of European stock options under knight uncertainty[J]. Journal of Shandong University(Natural Science),2007,42(11):121-126.

[11]韩立岩,周娟.Knight 不确定环境下基于模糊测度的期权定价模型[J].系统工程理论与实践,2007,27(12):123- 131.
HAN Liyan,ZHOU Juan. Option pricing with fuzzy measures under knightian uncertainty[J]. System Engineering Theory and Practice,2007,27(12):123-131.

[12]费文银,李淑娟.Knight 不确定环境下带通胀的最优投资和消费模型研究[J].工程数学学报,2012,29(6):799-806.
FEI Wenyin,LI Shujuan. Study on optimal consumption and portfolio with inflation under knightian uncertainty[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematicas,2012,29(6):799-806.

[13]王向荣,孟令巧,张婉婷.不确定环境下彩虹期权价格上下界的估计[J].科技创新导报,2013(7):222-226.
WANG Xiangrong,MENG Lingqiao. ZHANG Wanting. Upper and lower bounds on rainbow option prices under uncertainty[J]. Science and Technology Innovation Herald,2013(7):222-226.

[14]黄虹,王向荣.Knight 不确定环境下 Lēvy 市场中的期权定价[J].数学的实践与认识,2016,46(20):87-92.
HUANG Hong,WANG Xiangrong. Option pricing under knight uncertainty in Lēvy market[J]. Mathematicas in Practice and Theory,2016,46(20):87-92.

[15]陈松男.金融工程学[M].上海:复旦大学出版社,2002.

(责任编辑:傅　游)