引用格式：张伟，白占兵．时标上障碍带条件下 p-Laplacian 方程两点边值问题解的存在性[J]．山东科技大学学报(自然科学版)，2018，37(4)：64-68.
ZHANG Wei，BAI Zhanbing．Existence of solutions to p-Laplacian difference equations under barrier strips conditions on time scales[J]．Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science)，2018，37(4)：64-68.

时标上障碍带条件下 p-Laplacian 方程两点边值问题解的存在性

张 伟，白占兵
(山东科技大学 数学与系统科学学院，山东 青岛 266590)

摘 要：研究了时标上障碍带条件下 p-Laplacian 方程两点边值问题解的存在性，运用 Leary-Schauder 原理证明了解的存在性定理，并给出例子加以说明。
关键词：时标；障碍带；p-Laplace 方程边值问题；存在性定理

中图分类号：O175.8 **文献标志码**：A **文章编号**：1672-3767(2018)04-0064-05
DOI：10.16452/j.cnki.sdkjzk.2018.04.008

Existence of Solutions to p-Laplacian Difference Equations Under Barrier Strips Conditions on Time Scales

ZHANG Wei，BAI Zhanbing
(College of Mathematics and System Science，Shandong University of Science and Technology，Qingdao，Shandong 266590，China)

Abstract：This paper studies the existence of positive solutions to p-Laplacian difference equations under barrier strips on time scales. By using the Leary-Schauder theory，the existence theorem was proved and further illustrated by an example.
Key words：time scales；barrier strips；p-Laplacian；existence theorem

常微分方程是伴随着微积分的产生和发展而逐渐成长起来的一门历史悠久的学科。在数学学科内部的许多分支中，常微分方程是常用的重要工具之一。由于应用领域的不断扩大和新理论生长点的不断涌现，这一古老学科的发展至今仍充满着生机与活力。微分方程边值问题是一个微分方程和一组边界条件形成的方程组，边值问题的解通常是符合约束条件的微分方程的解。在物理学、生物学等中都经常遇到边值问题，例如波动方程等。

常微分方程边值问题是微分方程研究领域中一个十分重要而热门的话题。早在 1994 年，Kelevedjiev[1] 运用 Leary-Schauder 原理讨论了障碍带条件下非线性二阶两点边值问题 $x''(t)=f(t,x(t),x'(t))$，$t\in(0,1)$ 分别在 Dirichlet 边界条件 $x(0)=A,x(1)=B$ 、Neumann 边界条件 $x(0)=A,x(1)=B$ 以及混合边界条件 $x(0)=A,x'(1)=B$ 、$x'(0)=A,x(1)=B$ 下解的存在性问题，得出了函数 f 在满足一类符号条件下解的存

收稿日期：2017-06-27
基金项目：国家自然科学基金项目(11571207)；山东科技大学 2017 年研究生科技创新项目(SDKDYC170343)
作者简介：张 伟(1990—)，女，山东泰安人，硕士研究生，主要从事微分方程理论及应用的研究.
白占兵(1971—)，男，甘肃高台人，教授，博士，主要从事应用微分方程的研究，本文通信作者.
E-mail：zhanbingbai@163.com

在性定理。

在时标理论未出现前，一些连续变化的现象或过程可以用微分方程去刻画；对于某些离散的现象或变化过程，则用差分方程去描述，但对于一些既包括连续又包括离散状态的数学模型却无从下手。时标理论提供了一种研究实际生活中许多没有规律现象的新方法，时标理论的出现，引起众多学者的关注和研究。结合时标理论，Ma 和 Luo[3] 运用 Leary-Schauder 原理及时标上函数的相关性质，并运用截断函数的技巧，结合文献[1] 中所用方法研究了时标上边值问题

$$x^{\Delta\Delta}(t)=f(t,x(t),x^{\Delta}(t)),\ t\in[0,1]_T,\ x(0)=0,\ x^{\Delta}(\sigma(1))=0$$

解的存在性。若将时标 T 取为实数集 $\mathbf{R}$，即为文献[1] 中所研究的 Dirichlet 问题。

2014 年，Ma 等[4] 运用拓扑横截定理研究了障碍带条件下 ϕ-Laplace 方程两点边值问题

$$(\phi(u'))'=f(t,u,u'),\ t\in(0,1),\ u(0)=A,\ u'(1)=B$$

解的存在性，该文用更一般的增算子代替了 p-Laplace 算子，若是用 p-Laplace 算子作用，便是本文将时标 T 推广到实数集 $\mathbf{R}$ 的特殊情况。另外，对于不同边值条件下解的存在性，还可以运用不动点定理、拓扑度方法、上下解方法和非线性泛函分析等方法来研究，具体可以参考文献[5-8,11-20]。

受以上文章的启发，本文研究时标上障碍带条件下一类 p-Laplace 方程两点边值问题

$$(\phi_p(x^{\Delta}(t)))^{\Delta}=f(t,x(t),x^{\Delta}(t)),\quad t\in(0,1),\tag{1}$$

$$x(0)=x^{\Delta}(\sigma(1))=0,\tag{2}$$

或者

$$x^{\Delta}(\sigma(0))=x(1)=0,\tag{3}$$

解的存在性。其中：T 是时标，$f:[0,\sigma(1)]\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 连续，$\phi_p(x)=|x|^{p-2}\cdot x$，$p>1$。

1　预备知识

时标 T 是指实直线 $\mathbf{R}$ 上的一个非空子集，当 T 取 $\mathbf{R}$ 时，时标 T 上的微分方程边值问题即是常微分方程边值问题。

定义 1　对 $t\in T$，规定 $\inf\phi=\max T$。定义前跳跃算子 $\sigma:T\to T$ 为

$$\sigma(t)=\inf\{\tau>t\,|\,\tau\in T\}。$$

对 $t\in T$，设 $\sup\phi=\min T$，定义后跳跃算子 $\rho:T\to T$ 为

$$\rho(t)=\sup\{\tau<t\,|\,\tau\in T\}。$$

当 $\sigma(t)>t$ 时，称 t 是右离散的：当 $\sigma(t)=t$ 时，称 t 是右稠密的。同样，当 $\rho(t)<t$，$\rho(t)=t$ 时，分别称 t 是左离散和左稠密的。

T 上的子集 T^K，T_K 分别定义为：如果 T 有左离散的最大值 t_1，则 $T^K=T-\{t_1\}$，否则 $T^K=T$；如果 T 有右离散的最小值 t_2，则 $T_K=T-\{t_2\}$，否则 $T_K=T$。

T 上的开区间 (a,b) 定义为 $(a,b)=\{t\in T\,|\,a<t<b\}$，其他类型（闭区间，半开半闭区间等）可类似定义。

定义 1.2　设 $f:T\to\mathbf{R}$，$t\in T^K$。如果有 $\mathbf{R}$ 中的数 $f^{\Delta}(t)$，使得对 $\forall\varepsilon>0$，存在 t 的一个邻域 U，使得对所有的 $s\in U$，都有

$$|f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)|\leqslant\varepsilon|\sigma(t)-s|,$$

则称 $f^{\Delta}(t)$ 为 f 在 t 点的 Δ-导数。若对所有的 $t\in T^K$，$f^{\Delta}(t)$ 都存在，称 f 在 T^K 上是 Δ-可导的。

定义 1.3　若恒有 $F^{\Delta}(t)=f(t)$，$t\in T^K$，则 Δ-积分定义为

$$\int_s^t f(\tau)\,\Delta\tau=F(t)-F(s),\quad s,t\in T^K。$$

引理 1.1[9]　设 $f:T\to\mathbf{R}$，$t\in T^K$，则以下各条成立：

1) 如果 $f^{\Delta}(t)$ 存在，则 f 在 t 点处连续；

2) 如果 f 在 t 点处连续且 t 是右离散的，则 $f^{\Delta}(t)$ 存在，并且 $f^{\Delta}(t)=\dfrac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-t}$；

3) 如果 t 是右稠密的，且 $\lim\limits_{s\to t}\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s}$ 存在，则 f 在 t 处 Δ-可导且 $f^{\Delta}(t)=\lim\limits_{s\to t}\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s}$；

4) 如果 $f^{\Delta}(t)$ 存在,则

$$f(\sigma(t))=f(t)+(\sigma(t)-t)f^{\Delta}(t) \text{。}$$

引理 1.2[10] 设 X,Z 为实向量赋范线性空间, $L: domL\subset X\rightarrow Z$ 是一个指标为 0 的 Fredhoml 算子。假定 $\Omega\subset X$ 是有界开子集, $N: \Omega\rightarrow Z$ 是一个 L - 紧算子。如果 $\ker L=\{0\}$,$0\in\Omega$ 且对所有的 $(u,\lambda)\in(domL\cap\partial\Omega)\times(0,1)$,

$$Lu-\lambda Nu\neq 0 ,$$

则方程 $Lu=Nu$ 在 $domL\cap\bar{\Omega}$ 上至少存在一个解。

2 主要结果

令 $D=\{x\in C^2[0,\sigma^2(1)]\,|\,x(0)=x^{\Delta}(\sigma(1))=0\}$,$C^2[0,\sigma^2(1)]$ 表示定义在 $[0,\sigma^2(1)]$ 上所有二阶连续 Δ - 可微函数全体,且范数定义为 $\|x\|=\max\{|x|_0,|x^{\Delta}|_0\}$,其中 $\|\cdot\|_0$ 表示最大值范数。

定理 2.1 设 $f:[0,\sigma(1)]\times\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ 连续, $L: D\rightarrow C[0,1]$, $Lx=(\phi_p(x^{\Delta}(t)))^{\Delta}$,若存在常数 C 使得对边值问题

$$Lx(t)=\lambda f(t,x(t,),x^{\Delta}(t)) ,\quad t\in(0,1) ,\ x\in D ,\ \lambda\in(0,1) \tag{2.1}$$

的任意一个解 x 有 $\|x\|\leqslant C$,则边值问题(1),(2) 在 D 中至少有一个解。

证明:首先,证明 L 是一一映射。在边值条件(1.2) 下,由 $Lx=0$ 可得到 $x(t)\equiv 0$,即 $\ker L=\{0\}$ 。因此 L 是一一映射。令 $N: C^2[0,\sigma^2(1)]\rightarrow C[0,1]$, $G: C[0,1]\rightarrow C^2[0,\sigma^2(1)]$,且

$$(Nx)(t)=f(t,x(t),x^{\Delta}(t)) ,\quad t\in[0,\sigma(1)] ,$$

$$(Gy)(t)=-\int_0^t\phi_q(\int_{\tau}^{\sigma(1)}y(s)\,\Delta s)\Delta\tau ,$$

则 $LGy=y$, $y\in C[0,1]$, $GLx=x$, $x\in D$,于是 GL 是零指标的 Fredholm 映射。从而得出 $GN: C^2[0,\sigma^2(1)]\rightarrow C^2[0,\sigma^2(1)]$ 是 GL 紧映射。

边值问题(1),(2) 等价于 $Lx=Nx$, $x=GNx$ 。令 $\Omega=\{x\in C^2[0,\sigma^2(1)]\,|\,\|x\|\leqslant C\}$,则 $GLx\neq\lambda GNx$, $x\in D\cap\partial\Omega$, $\forall\lambda\in(0,1)$,根据引理 1.2, $Lx=Nx$ 在 $D\cap\bar{\Omega}$ 中至少有一个解,因此边值问题(1),(2) 至少有一个解且 $\|x\|\leqslant C$ 。

定理 2.2 设 $f:[0,\sigma(1)]\times\mathbf{R}^2\rightarrow\mathbf{R}$ 连续,假设存在 L_i , $i=1,2,3,4$,满足 $L_2>L_1\geqslant 0$, $L_3<L_4\leqslant 0$,使得

$$f(t,u,p)\geqslant 0 ,\quad (t,u,p)\in[0,1]\times R\times[L_1,L_2] , \tag{2.2}$$

$$f(t,u,p)\leqslant 0 ,\quad (t,u,p)\in[0,1]\times R\times[L_3,L_4] , \tag{2.3}$$

则问题(1.1),(1.2) 在 $C^2[0,\sigma^2(1)]$ 中至少有一个解。

证明:考虑同伦族问题

$$(\phi_p(x^{\Delta}(t)))^{\Delta}=\lambda f(t,x(t),x^{\Delta}(t)) ,\quad t\in[0,1] , \tag{2.4}$$

$$x(0)=x^{\Delta}(\sigma(1))=0 \text{。} \tag{2.5}$$

由定理2.1知,若(2.4),(2.5) 的所有可能解 x 在 $C^2[0,\sigma^2(1)]$ 中有一个不依赖于 $\lambda\in(0,1)$ 的先验界,则问题(1),(2) 在 $C^2[0,\sigma^2(1)]$ 中有解。

首先估计 $x^{\Delta}(t)$ 的范数。假设集合

$$S_0=\{t\in[0,\sigma(1)]\,|\,L_1<x^{\Delta}(t)\leqslant L_2\} ,$$

$$S_1=\{t\in[0,\sigma(1)]\,|\,L_3\leqslant x^{\Delta}(t)<L_4\}$$

非空。取定 $t_0\in S_0$,若存在 $t'_0\in[t_0,1]$,使得

$$x^{\Delta}(t'_0)<x^{\Delta}(t_0) , \tag{2.6}$$

则由 $x^{\Delta}(t)$ 的连续性可知,可取 $t_0\in(t_0,1]\cap S_0$,但对 $t\in S_0$,有

$$(\phi_p(x^{\Delta}(t)))=\lambda f(t,x(t),\ x^{\Delta}(t))\geqslant 0 ,$$

所以有

$$\phi_p(x^{\Delta}(t'_0))\geqslant\phi_p(x^{\Delta}(t')) ,$$

即

$$|x^{\Delta}(t'_0)|^{p-2}\cdot x^{\Delta}(t'_0)\geqslant |x^{\Delta}(t_0)|^{p-2}\cdot x^{\Delta}(t_0),$$

于是 $x^{\Delta}(t'_0)$ 与 $x^{\Delta}(t_0)$ 同号。不妨令 $x^{\Delta}(t'_0)\geqslant 0$,则有

$$(x^{\Delta}(t'_0))^{p-1}\geqslant (x^{\Delta}(t_0))^{p-1},$$

所以总有 $x^{\Delta}(t'_0)\geqslant x^{\Delta}(t_0)$,这与式(2.6)矛盾。从而有

$$x^{\Delta}(t)\geqslant x^{\Delta}(t_0),\quad t\in(t_0,1]。$$

特别地,$x^{\Delta}(\sigma(1))\geqslant x^{\Delta}(t_0)>L_1\geqslant 0$,这与边值条件 $x^{\Delta}(\sigma(1))=0$ 矛盾。所以 $S_0=\varnothing$。同理可证 $S_1=\varnothing$。

结合 $x^{\Delta}(\sigma(1))=0$ 以及 $x^{\Delta}(t)$ 的连续性可知

$$|x^{\Delta}(t)|_0\leqslant C,\quad t\in[0,\sigma(1)],\tag{2.7}$$

其中 $C=\max\{|L_1|,|L_4|\}$。

另一方面,由式(2.7)知

$$L_4\sigma(1)\leqslant x(t)=\int_0^t x^{\Delta}(s)\Delta s\leqslant L_1\sigma(1),\quad t\in(0,\sigma(1)),$$

对 $t=\sigma^2(1)$,

$$\begin{aligned}x(\sigma^2(1))&=x(\sigma(1))+x^{\Delta}(\sigma(1))(\sigma^2(1)-\sigma(1))\\&\leqslant L_1\sigma(1)+L_1(\sigma^2(1)-\sigma(1))\\&=L_1(\sigma^2(1)),\\x(\sigma^2(1))&=x(\sigma(1))+x^{\Delta}(\sigma(1))(\sigma^2(1)-\sigma(1))\\&\geqslant L_4\sigma(1)+L_4(\sigma^2(1)-\sigma(1))\\&=L_4(\sigma^2(1)),\end{aligned}$$

从而有

$$L_4(\sigma^2(1))\leqslant x(t)\leqslant L_1(\sigma^2(1)),\quad t\in[0,\sigma^2(1)]。$$

综上可得

$$|x|_0\leqslant C\sigma^2(1),\quad t\in[0,\sigma^2(1)]。$$

故由 $\|x\|$ 的定义,有 $\|x\|<C$。根据定理 2.1,边值问题(2.4),(2.5)至少有一个解 $x\in D$,因此 x 即为边值问题(1),(2)的解。

注　此处 $\phi_p(x)=|x|^{p-2}\cdot x$,$p>1$,特别地,若 $p=2$,即为文献[3]中所研究问题。

类似的,可得如下定理:

定理 2.3　设 $f:[0,\sigma(1)]\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 连续,假设存在 L_i,$i=1,2,3,4$,满足 $L_2>L_1\geqslant 0$,$L_3<L_4\leqslant 0$,使得

$$f(t,u,p)\leqslant 0,\quad (t,u,p)\in[0,1]\times R\times[L_1,L_2],$$
$$f(t,u,p)\geqslant 0,\quad (t,u,p)\in[0,1]\times R\times[L_3,L_4],$$

则问题(1),(3)在 $C^2[0,\sigma^2(1)]$ 中至少有一个解。

3　例子

考虑如下边值问题

$$(\phi_p(x^{\Delta}(t)))=(x^{\Delta}(t))^2-5x^{\Delta}(t)+4,\quad t\in[0,1],$$
$$x(0)=x^{\Delta}(\sigma(1))=0,$$

令 $f(t,u,p)=p^2-5p+4$,此时取 $L_1=5$,$L_2=6$,$L_3=\frac{5}{4}$,$L_4=\frac{3}{2}$,满足定理2.2的条件,从而以上问题在 $C^2[0,\sigma^2(1)]$中至少有一个解。证毕。

参考文献:

[1]KELEVEDJIEV P. Existence of solutions for two-point boundary value problems[J]. Nonlinear Analysis,1994,22(2):217-224.

[2]KELEVESJIEV P,BOJERIKOV S. On the solvability of a boundary value problem for p-Laplacian differential equations

[J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations,2017(8):1-9.

[3]MA R,LUO H. Existence of solutions for a two-point boundary value problem on time scales[J]. Applied Mathematics and Computation,2004,150(1):139-147.

[4]MA R,ZHANG L,LIU R. Existence results for nonlinear problems with ϕ-Laplacian[J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations,2015(22):1-7.

[5]KELEVEDJIEV P S,TERSIAN S A. The barrier strip technique for a boundary value problem with p-laplacian[J]. Electronic Journal of Differential Equations,2013(28):1-8.

[6]GOODRICH C S. The existence of a positive solution to a second-order delta-nabla p-Laplacian BVP on a time scale[J]. Applied Mathematics Letters,2012,25(2):157-162.

[7]BAI Z,SUN W,ZHANG W. Positive solutions for boundary value problems of singular fractional differential equations[J]. Abstract and Applied Analysis,2013(11):5545-5550.

[8]WANG D,GUAN W. Multiple positive solutions for third-order p-Laplacian functional dynamic equations on time scales [J]. Advances in Difference Equations,2014(1):242.

[9]GARWAL R P,BOHNER M. Basic calculus on time scales and some of its applications[J]. Results in Mathematics,1999,35 (1/2):3-22.

[10]BAI Z,LIANG X,DU Z. Triple positive solutions for some second-order boundary value problem on a measure chain[J]. Computers & Mathematics with Applications,2007,53(12):1832-1839.

[11]武华华,孙苏菁.基于变分方法的四阶边值问题的多重正解[J].山东科技大学学报(自然科学版),2014,33(2):96-99.
WU Huahua,SUN Sujing. Based on the variational method of the Mmultiple positive solutions for a fourth-order boundary value via variation method[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science),2014,33(2):96-99.

[12]董晓玉,白占兵,张伟.具有适型分数阶导数的非线性特征值问题的正解[J].山东科技大学学报(自然科学版),2016,35(3):85-91.
DONG Xiaoyu,BAI Zhanbing,ZHANG Wei. Positive solutions for nonlinear eigenvalue problems with conformable fractional differential derivatives[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science),2016,35(3):85-91.

[13]赵聪,崔玉军.非线性四阶两点边值问题的单调迭代[J].山东科技大学学报(自然科学版),2016,35(6):108-113.
ZHAO Cong,CUI Yujun. Monotone iterative technique for nonlinear four-order two point boundary value problem[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science),2016,35(6):108-113.

[14]秦伟.障碍带条件下四阶三点边值问题解的存在性[J].山东科技大学学报(自然科学版),2008,27(3):96-101.
QIN Wei. The existence of solutions for fourth-order three-point BVPs under the barrier strips conditions[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science),2008,27(3):96-101.

[15]ATICI F M,GUSEINOV G S. On Greens functions and positive solutions for boundary value problems on time scales[J]. Journal of Computatioal and Applied Mathematics,2002,141(1):75-99.

[16]LIU Y J. Non-homogeneous boundary-value problems of higher order differential equations with p-Laplacian[J]. Electronic Journal of Differential Equations,2008 (20):359-370.

[17]KELEVEDJIEV P S,TERSIAN S A. The barrier strip technique for a boundary value problem with p-Laplacian[J]. Electronic Journal of Differential Equations,2013(28):291-331.

[18]DAI G W,MA R Y. Unilateral global bifurcation phenomena and nodal solutions for p-Laplacian[J]. Journal of Differential Equations,2012,252(3):2448-2468.

[19]BEREANU C,GHEORGHE D,ZAMORA M. Non-resonant boundary value problems with singular ϕ-Laplacian operators [J]. Nonlinear Differential Equations and Applications,2013,20(3):1365-1377.

[20]马如云.非线性常微分方程非局部问题[M].北京:科学出版社,2004.

(责任编辑:傅　游)