引用格式:周明媛,杨洪礼,潘鹏. 连续正奇异线性系统正性判定的一种新方法[J]. 山东科技大学学报(自然科学版),2018,37(4):83-91.
ZHOU Mingyuan,YANG Hongli,PAN Peng. A novel approach to positivity analysis of continuous-time positive singular linear systems[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science),2018,37(4):83-91.

连续正奇异线性系统正性判定的一种新方法

周明媛,杨洪礼,潘 鹏
(山东科技大学 数学与系统科学学院,山东 青岛 266590)

摘 要:主要讨论连续正奇异系统的正性判定问题。根据 Metzler 矩阵定义,利用线性矩阵非负性约束给出了判断 Metzler 矩阵的充要条件,结合 Drazin 逆和矩阵拉直算子的相关性质,利用最小绝对差给出了一种新的判定连续正奇异系统正性的线性规划方法,同传统方法相比,本文方法理论简单且可执行性好。最后,通过数值例子验证了方法的可行性。

关键词:连续正奇异系统;正性;线性规划

中图分类号:O231.1 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-3767(2018)04-0083-09
DOI:10.16452/j.cnki.sdkjzk.2018.04.011

A Novel Approach to Positivity Analysis of Continuous-time Positive Singular Linear Systems

ZHOU Mingyuan,YANG Hongli,PAN Peng
(College of Mathematics and Systems Science,Shandong University of Science and Technology,Qingdao,Shandong 266590,China)

Abstract:To analysis the positivity of continuous-time positive singular systems,a necessary and sufficient condition for judging a Metzler matrix is given by utilizing the definition of Metzler matrix and Linear matrix nonnegativity constraints. Then,we give a new method to analysis the positivity for continuous-time positive singular system by bringing in Drazin inverse,straighten operator of matrix and minimal absolute difference. In the end,some numerical examples are given to validate the present results.

Key words:continuous-time positive singular systems; positivity; linear programming

奇异系统,又被称为广义系统、隐式系统、微分-代数系统或半状态系统,是一类由微分及代数方程综合描述的系统,广泛应用于 Leontief 经济模型[1]、神经网络模型[2]和纽曼模型[3]等实际系统中。近年来,由于自然界中许多模型可以用正奇异系统(状态变量为非负的奇异系统)来描述,如人口模型、电费管理模型、液体体积模型等,正奇异系统引起了学者们的广泛关注。文献[4-12]对正系统的基本问题进行了充分的研究,如可控性、客观性、可达性等。相比较而言,学者们对正奇异系统的研究较晚,包括连续正奇异系统和离散正奇异系统在内的主要研究成果见文献[13-19]。在正奇异系统的正性分析中,文献[13]主要给出了分析离散正奇异系统正性和可达性的充要条件;文献[14-15]通过分析广义 Lyapunov 方程解的半正定性给出了在离

收稿日期:2017-10-11
基金项目:国家自然科学基金项目(11241005)
作者简介:周明媛(1993—),女,山东青岛人,硕士研究生,主要从事系统优化及应用方面的研究. E-mail:zmy_math@163.com
杨洪礼(1974—),男,副教授,博士,主要从事优化理论与算法、最优控制理论与应用、非负矩阵与张量分解等方面的研究,本文通信作者. E-mail:yhlmath@126.com

散时间和连续时间状态下刻画正奇异系统正性和稳定性的充要条件;文献[16]在没有不必要的先验条件下,给出了判断连续正奇异系统正性和稳定性的充要条件,并首先提出了用线性规划方法来分析系统的正性和稳定性;文献[17]在没有不必要假设的前提条件下,给出了分析离散正奇异系统正性和稳定性的充要条件,以及基于线性规划的数值算法;文献[18-19]给出了离散正奇异系统存在一个状态反馈,使闭环系统是非负的、稳定的、正则的条件。基于上述研究基础,给出了一种新的刻画连续正奇异系统正性的线性规划方法,该方法没有不必要的先验条件,理论上简单易懂,可行性好,结果清晰明了,能提高系统正性分析的效率。

文中符号的具体说明如下:$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维实向量空间,$\mathbf{R}^{n\times n}$ 表示 $n\times n$ 维实矩阵的集合,$\mathbf{C}$ 表示复数集,$\mathbf{C}^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 维复数矩阵的集合,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{D}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Drazin 逆,$\boldsymbol{A}^{-1}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆,$\boldsymbol{A}>0(\geqslant 0)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素 a_{ij} 是正的(非负的),$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置,$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩,$\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵,$vec(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的拉直算子,$\mathrm{im}(\boldsymbol{P})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的逆像。

1 简介

考虑时不变齐次奇异系统:

$$\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t), \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 为系统状态矩阵,$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 为系统状态向量,$\mathrm{rank}(\boldsymbol{E})<n$ 。

定义 1.1[20] 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 且 $\mathrm{ind}(\boldsymbol{A})=k$,存在唯一矩阵 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^{n\times n}$,满足

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}\ ,\ \boldsymbol{XAX}=\boldsymbol{X}\ ,\ \boldsymbol{XA}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\ 。$$

其中 k 表示使 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^k)=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^{k+1})$ 成立的最小非负整数,则 $\boldsymbol{X}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 *Drazin* 逆,记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{D}}$ 。

根据文献[21],任意矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都可化为下列 Jordan 标准型:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\boldsymbol{M} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N}\end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}, \tag{2}$$

其中,$\boldsymbol{M}$ 为可逆矩阵,$\boldsymbol{N}$ 为幂零矩阵。则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Drazin 逆可表示为:

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{D}}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}\boldsymbol{M}^{-1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{T}^{-1}\ 。\tag{3}$$

定义 1.2[15] $\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$,存在 $\lambda\in\mathbf{C}$,使得 $\det(\lambda\mathbf{E}-\boldsymbol{A})\neq 0$,则称矩阵对 $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$ 是正则的。

定理 1.3[17] 如果 $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$ 是正则的,则系统(1)的解可表示为:

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\hat{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{D}}\hat{\boldsymbol{A}}t}\hat{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{D}}\hat{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{v}, \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 是任意 n 维向量,$\lambda\in\mathbf{C}$,$\boldsymbol{x}(0)\in\mathrm{im}(\hat{\boldsymbol{E}}^{D}\hat{\boldsymbol{E}})$ 为可容许初始条件,$\hat{\boldsymbol{E}}=(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{E}$,$\hat{\boldsymbol{A}}=(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}$ 。

根据定义 1.2 和定理 1.3,假设在下文的研究中 $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$ 是正则的。令 $\boldsymbol{P}=\hat{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{D}}\hat{\boldsymbol{E}}$,$\bar{\boldsymbol{A}}=\hat{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{D}}\hat{\boldsymbol{A}}$,则系统(1)的解又可表示为 $\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\bar{\boldsymbol{A}}t}\boldsymbol{x}(0)$,$\boldsymbol{x}(0)=\hat{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{D}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}\in\mathrm{im}(\boldsymbol{P})$ 。

引理 1.4[16] $\boldsymbol{P}=\hat{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{D}}\hat{\boldsymbol{E}}$,$\bar{\boldsymbol{A}}=\hat{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{D}}\hat{\boldsymbol{A}}$,下列关于矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 的性质是成立的。

1) $\boldsymbol{P}$ 是幂等矩阵(例 $\boldsymbol{P}^2=\boldsymbol{P}$);

2) $\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{A}}=\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P}=\bar{\boldsymbol{A}}$;

3) 对于系统(1)的任意解 $\boldsymbol{x}(t)$,有 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(t)$ 成立。

推论 1.5 根据定理 1.3 可知,系统(1)和系统(5)是等价的。

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}(t), \tag{5}$$

$$\boldsymbol{x}(0)\in\mathrm{im}(\boldsymbol{P})\ 。$$

证明: 根据假设,$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$ 是正则的,所以有 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 存在,因此 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{E}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$,即 $\hat{\boldsymbol{E}}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}(t)$ 。等式左乘矩阵 $\hat{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{D}}$,可得 $\hat{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{D}}\hat{\boldsymbol{E}}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\hat{\boldsymbol{E}}^{D}\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}(t)$ 。根据引理 1.4,有 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\hat{\boldsymbol{E}}^{D}\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}(t)$,即 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}(t)$ 。所以,系统(1)和系统(5)是等价的。对于任意 $\boldsymbol{x}(0)\in\mathrm{im}(\boldsymbol{P})$,系统(1)和系统(5)的解相同。

定理 1.6[22] 考虑方程组 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{D}$,设矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$,$\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{s\times r}$,$\boldsymbol{D}\in\mathbf{C}^{m\times r}$,未知矩阵 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{C}^{n\times s}$,则

$vec(\boldsymbol{D}) = vec(\boldsymbol{AXB}) = (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \otimes \boldsymbol{A}) vec(\boldsymbol{X})$ 。

2　正性分析

定义 2.1[16]　如果对于给定的任意非负可容许初始条件 $\boldsymbol{x}(0) \geqslant 0$,有 $\boldsymbol{x}(t) \geqslant 0 (t \geqslant 0)$,则称系统(5)是正系统。

定义 2.2[23]　$\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n\times n}$,若 $a_{ij} \geqslant 0 (i \neq j)$,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 Metzler 矩阵。

定理 2.3　用 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 表示 $n \times n$ 维的实矩阵,用 $\boldsymbol{M} = [m_{p,q}] \in \mathbf{R}^{n^2\times n^2}$ 表示 $n^2 \times n^2$ 维的实矩阵。定义 $\boldsymbol{M}$ 矩阵:

$$\boldsymbol{M} = \{ m_{p,q} \mid p \neq q : m_{p,q} = 0.\ p = q : m_{1+(n+1)(j-1),1+(n+1)(j-1)} = 0, m_{i+n(j-1),i+n(j-1)} = 1 (i \neq j). \}$$

其中,$i,j \in [1,2,\cdots,n]$,$p,q \in [1,2,\cdots,n^2]$ 。若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{M} \times vec(\boldsymbol{A}) \geqslant 0$,则 $\boldsymbol{A}$ 为 Metzler 矩阵。

注:当 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{1\times 1}$ 时,$\boldsymbol{A}$ 不存在非对角线元素,不予考虑。

例如,当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的维数为 2 时:$i,j \in [1,2]$,$p,q \in [1,2,3,4]$ 。则 $\boldsymbol{M} \in \mathbf{R}^{4\times 4}$,由不等式组 $\boldsymbol{M} \times vec(\boldsymbol{A}) \geqslant 0$,即

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_3 \\ 0 \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

可得 $a_2 \geqslant 0$,$a_3 \geqslant 0$,即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非对角线元素非负。由定义 2.2 可知,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 Metzler 矩阵。

当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的维数为 3 时:$i,j \in [1,2,3]$,$p,q \in [1,2,\cdots,9]$ 。则 $\boldsymbol{M} \in \mathbf{R}^{9\times 9}$,由不等式组 $\boldsymbol{M} \times vec(\boldsymbol{A}) \geqslant 0$ 可得

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ 0 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ 0 \end{pmatrix} \geqslant 0。$$

由此,$a_2 \geqslant 0$,$a_3 \geqslant 0$,$a_4 \geqslant 0$,$a_6 \geqslant 0$,$a_7 \geqslant 0$,$a_8 \geqslant 0$,即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非对角线元素非负。由定义 2.2 可知,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 Metzler 矩阵。

证明:充分性:$\boldsymbol{A} = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n\times n}$,$\boldsymbol{M} = [m_{p,q}] \in \mathbf{R}^{n^2\times n^2}$ 。根据定义 2.2 可知,判断矩阵是否为 Metzler 矩阵,只需分析其非对角线元素即可。而向量 $vec(\boldsymbol{A})$ 的第 $i + n(j-1)$ (其中 $i \neq j$) 个元素即为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非对角线元素,只需左乘一个第 $i + n(j-1)$ (其中 $i \neq j$) 个元素为 1 的单位行向量 $\boldsymbol{m}_{i+n(j-1)}$,使 $\boldsymbol{m}_{i+n(j-1)} \cdot vec(\boldsymbol{A}) \geqslant 0$ 成立,则有矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 Metzler 矩阵。

必要性:根据上文分析,若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 Metzler 矩阵,则有 $\boldsymbol{m}_{i+n(j-1)} . vec(\boldsymbol{A}) \geqslant 0$ 成立,即 $\boldsymbol{M} \times vec(\boldsymbol{A}) \geqslant 0$ 。

引理 2.4[22]　若矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 是 Metzler 矩阵(矩阵非对角线元素非负),则系统(5)是正系统。

引理 2.5[16]　考虑线性系统 $\dot{s} = \boldsymbol{N}s(t)$ 。$\boldsymbol{M} \in \mathbf{R}^{p\times n}$,$\boldsymbol{N} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 。下述推断 $[\boldsymbol{M}s(0) \geqslant 0 \Rightarrow [\boldsymbol{M}s(t) \geqslant 0, \forall t \geqslant 0)$ 成立,当且仅当存在 Metzler 矩阵 $\boldsymbol{H}$ 使 $\boldsymbol{MN} = \boldsymbol{HM}$ 。

根据正奇异系统的解的表达式、正系统的定义以及引理 2.5,有下列结论成立。

定理 2.6[16]　系统(5)是正系统,当且仅当存在 Metzler 矩阵 $\boldsymbol{H}$ 使 $\bar{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{HP}$ 成立。

证明:充分性:令 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{v}_0$,由定理 1.3 可得

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\bar{A}t}\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}_0=\left(\boldsymbol{P}+t\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P}+\frac{t^2}{2}\bar{\boldsymbol{A}}^2\boldsymbol{P}+\cdots\right)\boldsymbol{v}_0\ 。$$

因为 $\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{A}}$,所以 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{P}\mathrm{e}^{\bar{A}t}\boldsymbol{v}_0$ 。设 $\boldsymbol{s}(t)=\mathrm{e}^{\bar{A}t}\boldsymbol{v}_0$,则 $\boldsymbol{s}(t)$ 是 $\dot{\boldsymbol{s}}(t)=\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{s}(t)$, $\boldsymbol{s}(0)=\boldsymbol{v}_0\in\mathbf{R}^n$ 的解。因为系统(5)是正系统,所以有 $\boldsymbol{x}(0)\geqslant 0$,对于 $\forall t\geqslant 0$, $\boldsymbol{x}(t)\geqslant 0$ 。又因为

$$[\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{P}\boldsymbol{s}(0)\geqslant 0]\Rightarrow[\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{P}\boldsymbol{s}(t)\geqslant 0,\forall t\geqslant 0]\ 。$$

根据引理 2.5 可得,存在 Metzler 矩阵 $\boldsymbol{H}$ 使 $\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{P}$ 成立。由 $\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{A}}=\bar{\boldsymbol{A}}$ 可得, $\boldsymbol{P}\bar{\boldsymbol{A}}=\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{P}$ 。

必要性:根据引理 1.4 和推论 1.5,得 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\bar{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{H}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}(t)$ 。因为 $\boldsymbol{H}$ 是 Metzler 矩阵,所以系统(5)是正系统。

根据定理 2.4 可知,系统(5)是正系统,当且仅当方程组 $\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{P}$ 的解 $\boldsymbol{H}$ 是 *Metzler* 矩阵。下面根据定理 2.6 分析如何用线性规划的方法判定系统(5)的正性。

定理 2.7　定义矩阵 $\boldsymbol{M}=[m_{p,q}]\in\mathbf{R}^{n^2\times n^2}$,

$$\boldsymbol{M}=\{m_{p,q}\mid p\neq q:m_{p,q}=0.\quad p=q:m_{1+(n+1)(j-1),1+(n+1)(j-1)}=0,m_{i+n(j-1),i+n(j-1)}=1(i\neq j).\}$$

其中, $i,j\in[1,2,\cdots,n]$, $p,q\in[1,2,\cdots,n^2]$, n 为系统状态矩阵的维数。

$$\min z=(\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{\theta})\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ vec(\boldsymbol{H})\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n^2}t_i,$$

$$s.t.\quad\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I} & -(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I})\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}\\ \\ \\ vec(\boldsymbol{H})\end{bmatrix}\geqslant\begin{bmatrix}vec(\bar{\boldsymbol{A}})\\ -vec(\bar{\boldsymbol{A}})\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}。\tag{6}$$

若 $\boldsymbol{H}$ 为 Metzler 矩阵,则系统(5)是正系统。其中, $\boldsymbol{t}=(t_1\quad t_2\quad\cdots\quad t_{n^2})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{u}$ 为元素全为 1 的行向量, $\boldsymbol{\theta}$ 为元素全为 0 的行向量。

证明:为方便表示,假设 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{x}=vec(\boldsymbol{H})$, $\boldsymbol{b}=vec(\bar{\boldsymbol{A}})$,则(6)式可表示为:

$$\min z=(\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{\theta})\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{x}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n^2}t_i\tag{7}$$

$$s.t.\quad\begin{cases}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{x}\end{pmatrix}\geqslant\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}\\ -\boldsymbol{b}\end{pmatrix} & (8)\\ (\boldsymbol{I}\quad\boldsymbol{0})\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{x}\end{pmatrix}\geqslant 0 & (9)\\ (\boldsymbol{0}\quad\boldsymbol{M})\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{x}\end{pmatrix}\geqslant 0 & (10)\end{cases}。$$

(I) 证明(8)、(9)式成立。

(i) 将矩阵方程组的求解问题转化为线性方程组的求解问题。

根据定理 1.6, $\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{P}$ ($\boldsymbol{H}$ 为未知矩阵)的求解问题可转化为 $[\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}]vec(\boldsymbol{H})=vec(\bar{\boldsymbol{A}})$,即

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\ 。\tag{11}$$

的求解问题。其中,

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n^2}\\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n^2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ d_{n^21} & d_{n^22} & \cdots & d_{n^2n^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{d}_2^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{d}_{n^2}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{d}_i=\begin{bmatrix}d_{i1}\\ d_{i2}\\ \vdots\\ d_{in^2}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_{n^2}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_{n^2}\end{bmatrix},\ b_i\ 不全为零,\ i=1,2,\cdots,n^2\ 。$$

假设函数 $s(x)=\sum_{i=1}^{n^2}\left|b_i-\boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\right|$ 。求使函数 $s(x)$ 取得最小值得向量 $\boldsymbol{x}^0$ ($\boldsymbol{x}^0\neq 0$) ,并将 $\boldsymbol{x}^0$ 作为方程组(11)的近似解,称之为最小绝对差解。由此,方程组 $\bar{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{HP}$ 的求解问题就转化为线性方程组(11)的求解问题。

(ii) 将方程组(11)的求解问题转化为线性规划问题

$$\min z=(\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{\theta})\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{x}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n^2}t_i \tag{7}$$

$$s.t.\begin{cases}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{x}\end{pmatrix}\geqslant\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}\\ -\boldsymbol{b}\end{pmatrix}, & (8)\\ (\boldsymbol{I}\quad\boldsymbol{0})\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{x}\end{pmatrix}\geqslant 0。 & (9)\end{cases}$$

令 $\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{t}\quad\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}$,假设 $\boldsymbol{y}^0=(\boldsymbol{t}^0\quad\boldsymbol{x}^0)^{\mathrm{T}}$ 是使目标函数 $z(y)$ 取得最小值的向量, $\boldsymbol{x}^0$ 是方程组(11)的解。进一步有 $s(\boldsymbol{x}^0)=z(\boldsymbol{y}^0)=\sum_{i=1}^{n^2}t_i^0$ 。这样就把方程组(11)的求解问题转化为线性规划(7)、(8)和(9)的求解问题。

(*iii*) 证明上述事实(*ii*)

由式(8)、(9)可得 $\boldsymbol{t}\geqslant\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Dx}$, $\boldsymbol{t}\geqslant-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Dx})$, $\boldsymbol{t}\geqslant 0$。将其写成分量形式为 $\boldsymbol{t}_i\geqslant b_i-\boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{t}_i\geqslant-(b_i-\boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})$, $t_i\geqslant 0$ 。从而有

$$t_i\geqslant\left|b_i-\boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\right|,\ i=1,2,\cdots,n^2。\tag{12}$$

接下来用反证法证明 $\boldsymbol{x}^0$ 是方程组(11)的解。假设存在向量 $\boldsymbol{x}^*$ 是方程组(11)的解,则有 $s(\boldsymbol{x}^*)<s(\boldsymbol{x}^0)$,记

$$\boldsymbol{t}_i^*=\left|b_i-\boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*\right|,\ i=1,2,\cdots,n^2。\tag{13}$$

于是向量 $\boldsymbol{y}^*=(\boldsymbol{t}^*\quad\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{t}^*\geqslant 0$ 。其中 $\boldsymbol{t}^*=(t_1^*\quad t_2^*\quad\cdots\quad t_{n^2}^*)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}^*=(x_1^*\quad x_2^*\quad\cdots\quad x_{n^2}^*)^{\mathrm{T}}$ 。因此,根据(12)式可得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{D}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}^*\\ \boldsymbol{x}^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}^*+\boldsymbol{Dx}^*\\ \boldsymbol{t}^*-\boldsymbol{Dx}^*\end{bmatrix}\geqslant\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}\\ -\boldsymbol{b}\end{pmatrix}。\tag{14}$$

这说明向量 $\boldsymbol{y}^*$ 满足条件(8)、(9),且其目标函数值为 $z(\boldsymbol{y}^*)=\sum_{i=1}^{n^2}t_i^*=\sum_{i=1}^{n^2}\left|b_i-\boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*\right|=s(\boldsymbol{x}^*)$ 。又因为 $\boldsymbol{t}^0$ 满足式(12)且 $s(\boldsymbol{x}^*)<s(\boldsymbol{x}^0)$,所以

$$z(\boldsymbol{y}^*)=s(\boldsymbol{x}^*)<s(\boldsymbol{x}^0)=\sum_{i=1}^{n^2}\left|b_i-\boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n^2}t_i^0=z(\boldsymbol{y}^0)。$$

这与 $\boldsymbol{y}^0$ 是线性规划(7)、(8)和(9)的解相矛盾。

最后证明等式(15)成立。

$$t_i^0=\left|b_i-\boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0\right|,\ i=1,2,\cdots,n^2。\tag{15}$$

假设方程(15)对 $i=1,2,\cdots,n^2$ 不全成立, $t_i^*=\left|b_i-\boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^*\right|$, $i=1,2,\cdots,n^2$,则有 $s(t_i^*)<s(t_i^0)$ 。其中, $\boldsymbol{y}^*=(\boldsymbol{t}^*\quad\boldsymbol{x}^*)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{t}^*=(t_1^*\quad t_2^*\quad\cdots\quad t_{n^2}^*)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}^*=(x_1^*\quad x_2^*\quad\cdots\quad x_{n^2}^*)^{\mathrm{T}}$ 。因此,由式(15)可推得:

$$z(\boldsymbol{y}^0)=\sum_{i=1}^{n^2}t_i^0>\sum_{i=1}^{n^2}\left|b_i-\boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0\right|=s(\boldsymbol{x}^0)。$$

类似地,又可证得

$$z(\boldsymbol{y}^*)=s(\boldsymbol{y}^*)<s(\boldsymbol{y}^0)=\sum_{i=1}^{n^2}\left|b_i-\boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^0\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n^2}t_i^0=z(\boldsymbol{y}^0)。$$

这与假设相矛盾,所以有 $z(\boldsymbol{y}^0)=\sum_{i=1}^{n}t_i^0=\sum_{i=1}^{n}\left|\boldsymbol{b}_i-\boldsymbol{d}_i^{\mathrm{T}}x^0\right|=s(\boldsymbol{x}^0)$,即方程(15)对 $i=1,2,\cdots,n^2$ 均成立。

(Ⅱ) 证明(10)式成立。

式(10)可转化为 $\boldsymbol{M}\times vec(\boldsymbol{H})\geqslant 0$ 的形式。由定理 2.3 可得,若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{M}\times vec(\boldsymbol{A})\geqslant 0$,则 $\boldsymbol{A}$ 为 *Metzler* 矩阵。

至此,命题得证。

3 数值例子

数值实验通过 *MATLAB*(*R*2014*a*)软件得出,实验结果均以 $\hat{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{D}}\hat{\boldsymbol{A}}$ 四舍五入计数保留法保留四位小数。由文献[15]可知,λ 的取值并不影响 $\hat{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{D}}\hat{\boldsymbol{E}}$ 的值。

例 1[16]考虑具有如下参数矩阵的时不变齐次正奇异系统

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}。$$

根据定义 1.1,取 $\lambda=0$,可得:$\hat{\boldsymbol{A}}=-\boldsymbol{I}$,

$$\hat{\boldsymbol{E}}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\hat{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}=\hat{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{D}}\hat{\boldsymbol{E}}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{D}}\hat{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}。$$

根据定理 2.7 可得,

$$\min z=(\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{\theta})\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\vec(\boldsymbol{H})\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{9}t_i$$

$$s.t.\quad\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{I}&-(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I})\\\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{M}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \\ \\vec(\boldsymbol{H})\end{pmatrix}\geqslant\begin{pmatrix}vec(\bar{\boldsymbol{A}})\\-vec(\bar{\boldsymbol{A}})\\\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}\end{pmatrix}。\tag{16}$$

由 MATLAB 中的 Linprog 函数可得:

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}1.0000&82.3412&82.3412\\0.0000&0&82.3412\\0.0000&82.3412&0\end{pmatrix}。$$

由 $z=2.3704\times10^{-11}$,可知 $\boldsymbol{H}$ 是线性规划(16)的解。根据定理 2.6,因为 $\boldsymbol{H}$ 是 Metzler 矩阵,所以系统(5)是正系统。当 $\boldsymbol{x}(0)=(85.25\quad 0\quad 0)^{\mathrm{T}}$ 时,系统(5)的状态轨线如图 1 所示,显然系统(5)为正系统。

例 2[16]考虑具有如下参数矩阵的时不变齐次正奇异系统

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}。$$

取 $\lambda=0$,可得:$\hat{\boldsymbol{A}}=-\boldsymbol{I}$,

$$\hat{\boldsymbol{E}}=\hat{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{D}}=\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\bar{\boldsymbol{A}}=\hat{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{D}}\hat{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}。$$

根据定理 2.7 可得,

$$\min z=(\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{\theta})\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\vec(\boldsymbol{H})\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{4}t_i$$

$$s.t.\quad\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{I}&-(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I})\\\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{M}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \\ \\vec(\boldsymbol{H})\end{pmatrix}\geqslant\begin{pmatrix}vec(\bar{\boldsymbol{A}})\\-vec(\bar{\boldsymbol{A}})\\\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}\end{pmatrix}。\tag{17}$$

由 Linprog 函数可得：$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}-1.0000 & 82.6826\\ 0.0000 & 0.0000\end{pmatrix}$。

由 $z=1.3628\times10^{-11}$，可得 $\boldsymbol{H}$ 是线性规划(17)的解。根据定理 2.6，因为 $\boldsymbol{H}$ 是 Metzler 矩阵，所以系统(5)是正系统。当 $\boldsymbol{x}(0)=(77.37\quad 0)^{\mathrm{T}}$ 时，系统(5)的状态轨线如图 2 所示，显然系统(5)为正系统。

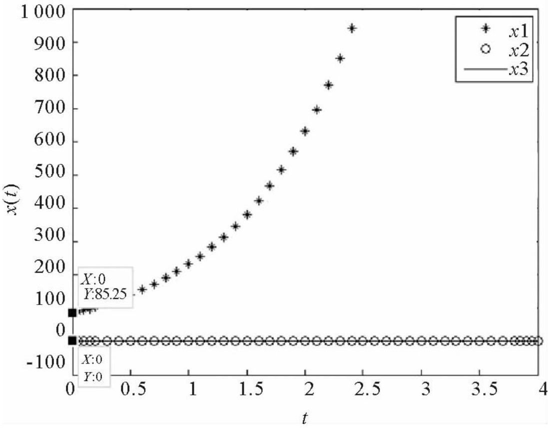

图 1　例 1 系统状态轨线图

Fig. 1　The trajectory of states about example 1

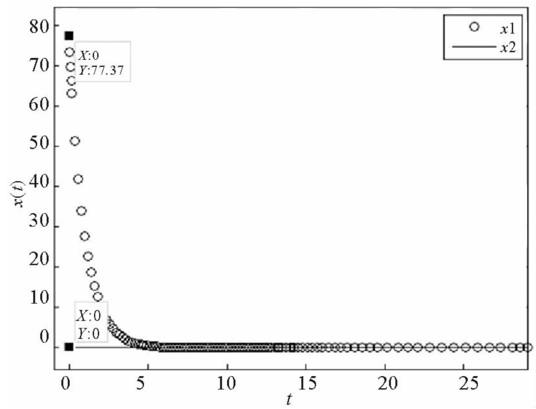

图 2　例 2 系统状态轨线图

Fig. 2　The trajectory of states about example 2

例 3[16] 考虑具有如下参数矩阵的时不变齐次正奇异系统

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1.0000 & 1.0000\\ 1.0000 & 0\\ 1.5000 & 1.0000\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1.0000 & 0.2700\\ 0.0500 & 0.2700\\ 0.1000 & 0.1000\end{pmatrix}。$$

取 $\lambda=0$，可得：$\hat{\boldsymbol{A}}=-\boldsymbol{I}$，

$$\hat{\boldsymbol{E}}=\begin{pmatrix}-0.0323 & -1.0788\\ -3.1483 & 0.6440\\ -2.9548 & -2.3914\end{pmatrix},\ \hat{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{D}}=\begin{pmatrix}0.0460 & -0.1281\\ -0.2450 & 0.2325\\ -0.0961 & -0.1420\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0.2660 & -0.2420\\ -0.0000 & 1.0000\\ 0.7341 & 0.2420\end{pmatrix},\ \bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}-0.0460 & 0.1281\\ 0.2450 & -0.2325\\ 0.0961 & 0.1420\end{pmatrix}。$$

根据定理 2.7 可得，

$$\min z=(\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{\theta})\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ vec(\boldsymbol{H})\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{9}t_i$$

$$s.t.\quad\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{I} & -(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I})\\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{M}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \\ vec(\boldsymbol{H})\end{pmatrix}\geqslant\begin{pmatrix}vec(\bar{\boldsymbol{A}})\\ -vec(\bar{\boldsymbol{A}})\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}。\tag{18}$$

由 Linprog 函数可求得：

$$\boldsymbol{H}=\begin{pmatrix}-0.3054 & 0.0425 & 0.0480\\ 0.4913 & -0.1512 & 0.1558\\ 764.1457 & 252.0718 & -276.6964\end{pmatrix}。$$

由 $z=-5.7980\times10^{-11}$，可得 $\boldsymbol{H}$ 是线性规划(18)的解。根据定理 2.6，因为 $\boldsymbol{H}$ 是 Metzler 矩阵，所以系统(5)是正系统。当 $\boldsymbol{x}(0)=(119.8\quad 119.8\quad 119.8)^{\mathrm{T}}$ 时，系统(5)的状态轨线如图 3 所示，显然系统(5)为正系统。

例 4[16] 考虑具有如下参数矩阵的时不变齐次正奇异系统

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&-4&1\\-1&2&-3\end{pmatrix}。$$

取 $\lambda=0$，可得：$\hat{\boldsymbol{A}}=-\boldsymbol{I}$，

$$\hat{\boldsymbol{E}}=\begin{bmatrix}4.0000&3.0000&4.0000\\2.4000&1.8000&2.4000\\0.6000&0.2000&0.6000\end{bmatrix},\hat{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{D}}=\begin{bmatrix}-6.6667&12.7778&-6.6667\\-4.0000&7.6667&-4.0000\\9.6667&-18.1111&9.6667\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.0000&1.6667&0.0000\\0.0000&1.0000&0.0000\\1.0000&-1.6667&1.0000\end{bmatrix},\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}6.6667&-12.7778&6.6667\\4.0000&-7.6667&4.0000\\-9.6667&18.1111&-9.6667\end{bmatrix}。$$

根据定理 2.7 可得，

$$\min z=(\boldsymbol{u}\quad\boldsymbol{\theta})\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\vec(\boldsymbol{H})\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{9}t_i$$

$$s.t.\quad\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}\\\boldsymbol{I}&-(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I})\\\boldsymbol{I}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}\\ \\ \\vec(\boldsymbol{H})\end{bmatrix}\geqslant\begin{bmatrix}vec(\bar{\boldsymbol{A}})\\-vec(\bar{\boldsymbol{A}})\\\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}\end{bmatrix}。\tag{19}$$

由 Linprog 函数可求得：

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}-125.5828&207.6380&6.6667\\157.4933&-263.4888&4.0000\\0.5453&1.0912&-9.6667\end{bmatrix}。$$

由 $z=5.1524\times10^{-9}$，可得 $\boldsymbol{H}$ 是线性规划(19)的解。根据定理 2.6，$\boldsymbol{H}$ 是 Metzler 矩阵，所以系统(5)是正系统。当 $\boldsymbol{x}(0)=(90.8\quad 54.48\quad 75.77)^{\mathrm{T}}$ 时，系统(5)的状态轨线如图 4 所示，显然系统(5)为正系统。

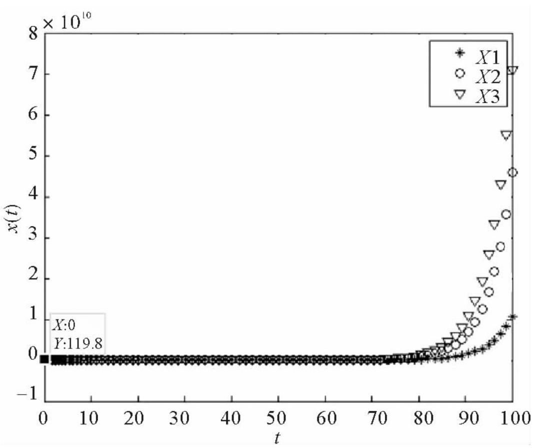

图 3 例 3 状态轨线图

Fig. 3 the trajectory of states

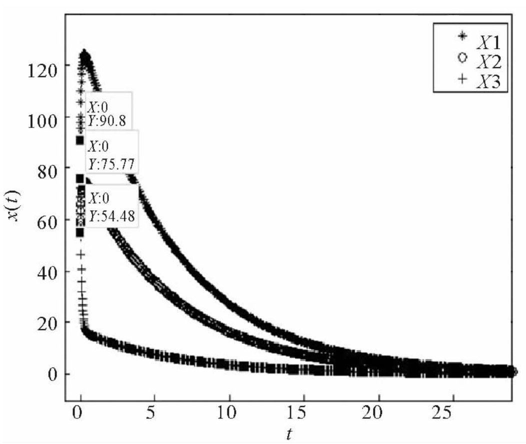

图 4 例 4 状态轨线图

Fig. 4 the trajectory of states

4 结论

主要研究了连续正奇异系统的正性的判定方法。一方面利用 Metzler 矩阵的非负性约束给出了判断 Metzler 矩阵的充要条件，另一方面在文献[16]的基础上结合 Drazin 逆和矩阵拉直算子的相关性质，利用最小绝对差给出了一种新的判定连续正奇异系统正性的线性规划方法。同传统方法相比，该方法简单且易于数值实验，

数值实验表明,上述理论方法是正确可行的,在降低理论复杂度的同时,提高了系统正性分析的效率。

参考文献:

[1]JǑDAR L,MERELLO P. Positive solutions of discrete dynamic Leontief input-output model with possibly singular capital matrix[J]. Mathematical and Computer Modelling,2010,52(7):1081-1087.

[2]荣莉莉,张荣.基于离散 Hopfiedle 神经网络的突发事件连锁反应路径推演模型[J].大连理工大学学报,2013,53(4):607-614.

RONG Lili,ZHANG Rong. An exmergency event chain reaction path deduction model based on discrete Hopfield neural network[J]. Journal of Dalian University of Technology,2013,53(4):607-614.

[3]LUENBERGER D. Dynamic equations in descriptor form[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,1977,22(3):312-321.

[4]OHTA Y,MAEDA H,KODAMA S. Reachability,observability,and realizability of continuous-time positive systems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization,1984,22(2):171-180.

[5]COXSON P G,SHAPIRO H. Positive input reachability and controllability of positive systems[J]. Linear Algebra and its Applications,1987,94:35-53.

[6]VALCHER M E. Controllability and reachability criteria for discrete time positive systems[J]. International Journal of Control,1996,65(3):511-536.

[7]FARINA L,RINALDI S. Positive Linear Systems:Theory and Applications[M]. New York:John Wiley & Sons,2000.

[8]RAMI M A,TADEO F. Positive observation problem for linear discrete positive systems[C]// 2006 45th IEEE Conference on Decision and Control:2006:4729-4733.

[9]RAMI M A,TADEO F,Benzaouia A. Control of constrained positive discrete systems[C]// 2007 IEEE American Control Conference,2007:5851-5856.

[10]KACZOREK T. Fractional positive continuous-time linear systems and their reachability[J]. International Journal of Applied Mathematics and Computer Science,2008,18(2):223-228.

[11]LIU X,WANG L,YU W,et al. Constrained control of positive discrete-time systems with delays[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II:Express Briefs,2008,55(2):193-197.

[12]LIU X,DANG C. Stability analysis of positive switched linear systems with delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2011,56(7):1684-1690.

[13]BRU R,COLL C,SANCHEZ E. About positively discrete-time singular systems[J]. System and Control:Theory and Applications,World Scientific and Engineering Society,Athens,2000:44-48.

[14]VIRNIK E. Analysis of positive descriptor systems:topiucs in systems and control theory[M]. VDM Verlag, 2008.

[15]VIRNIK E. Stability analysis of positive descriptor systems[J]. Linear Algebra and Its Applications,2008,429(10):2640-2659.

[16]RAMI M A,NAPP D. Characterization and stability of autonomous positive descriptor systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2012,57(10):2668-2673.

[17]RAMI M A,NAPP D. Positivity of discrete singular systems and their stability:An LP-based approach[J]. Automatica,2014,50(1):84-91.

[18]HERRERO A,RAM A,THOME N. Nonnegativity,stability,and regularization of discrete-time descriptor systems[J]. Linear Algebra and its Applications,2010,432(4):837-846.

[19]NAPP D,TADEO F,CHAABANE M. State feedback positive stabilization of discrete descriptor systems[J]. International Journal of Innovative Computing,Information and Control,2014,10(5):1853-1859.

[20]CAMPBELL S L,MEYER,JR C D,Rose N J. Applications of the Drazin inverse to linear systems of differential equations with singular constant coefficients[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics,1976,31(3):411-425.

[21]BEN-ISRAEL A,GREVILLE T N E. Generalized inverses:theory and applications[M]. Dordrecht:Springer Science & Business Media,2003:163-164.

[22]张贤达.矩阵分析与应用[M].2 版.北京:清华大学出版社有限公司,2004:74-77.

[23]LUENBERGER D G D G. Introduction to dynamic systems: Theory,models,and applications[R]. Palo Alto:Stanford University,1979:204-206.

(责任编辑:傅　游)