

引用格式:冯文琪,孙农亮.基于粒子系统的矿井突水蔓延仿真研究[J].山东科技大学学报(自然科学版),2018,37(6):22-29.

FENG Wenqi, SUN Nongliang. Mine water inrush spread simulation based on particle system[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science), 2018, 37(6):22-29.

# 基于粒子系统的矿井突水蔓延仿真研究

冯文琪,孙农亮

(山东科技大学 电子通信与物理学院,山东 青岛 266590)

**摘要:**为了在虚拟水灾环境中实现对工作人员的培训、灾情预测和施救,基于粒子系统,使用 Unreal Engine 4 平台结合光滑粒子流体动力学(SPH)方法实现三维水灾蔓延仿真。借助 Unreal Engine 4 的开源特性,运用 SPH 算法结合粒子系统进行流体模拟,采用固定边界粒子法进行边界处理,采用八叉树方法进行水体表面重建,结合 Unreal Engine 4 的 Shader 着色器进行水体渲染,达到了水流体的运动仿真效果,最后在巷道地形中实现了突水水平流动、上向升涨和下向蔓延的仿真。实验证明,本研究所实现的水灾的仿真效果形象逼真,具有真实物理蔓延规律。

**关键词:**矿井突水;SPH 算法;Unreal Engine 4;粒子系统;蔓延

中图分类号:TD745;TN391.9

文献标志码:A

文章编号:1672-3767(2018)06-0022-08

DOI:10.16452/j.cnki.sdkjzk.2018.06.003

## Mine Water Inrush Spread Simulation Based on Particle System

FENG Wenqi, SUN Nongliang

(College of Electronics, Communication and Physics, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

**Abstract:** In order to train staff, predict disaster and come to rescue in a virtual flood environment, the three-dimensional flood spread simulation was conducted based on a particle system by using the Unreal Engine 4(UE4) platform in combination with the smoothed particle hydrodynamics(SPH) method. With the help of the open source nature of Unreal Engine 4, the fluid simulation was first made by using the smoothed particle hydrodynamics (SPH) algorithm and particle system. By treating the boundary with fixed boundary particle method, reconstructing the surface of water body with Octree method, and rendering water body with the Shader of Unreal Engine 4, the motion of fluid was then simulated. Finally, the horizontal flow, upward ascent, and downward spread of water inrush in the terrain of roadway were simulated. Experiments show that with a life-like effect, the proposed flood simulation can show the law of physical spread in reality.

**Key words:** mine water inrush; SPH algorithm; Unreal Engine 4; particle system; spread

矿井突水灾害是煤矿的主要灾害之一<sup>[1]</sup>,矿井突水造成淹井和伤亡事故,给国家、社会和家庭带来严重的直接或间接的经济损失和人身损害。因此,矿井突水蔓延研究对矿井治水安全具有重要意义。张丽娟<sup>[2]</sup>

收稿日期:2018-06-01

基金项目:国家 863 项目子课题:矿井灾害动态演化技术验证平台(2015AA016404-4);山东科技大学领军人才计划项目

作者简介:冯文琪(1992—),女,山东临沂人,硕士研究生,主要从事矿山信息化技术研究。

孙农亮(1962—),男,山东烟台人,教授,博士生导师,主要研究领域为图像处理、模式识别、虚拟现实,本文通信作者。E-mail: nl-jackson@vip.163.com

研究了基于 OSG 的矿井突水应急虚拟仿真系统关键技术,改进 MC 和光滑流体动力学(smoothed particle hydrodynamics, SPH)算法,基于表面纹理和粒子系统完成了水灾的真实感表达。刘欣倩<sup>[3]</sup>研究了基于 Unity 3D 粒子系统进行矿井突水事故的虚拟仿真,展示了突水淹没巷道的情景。李长春<sup>[4]</sup>进行了巷道建模和水淹模拟,宏观展现水淹巷道情景,但缺乏水灾蔓延动态研究。李翠平等<sup>[5]</sup>结合水灾流动的水力特征,建立了能够真实模拟水流蔓延三维动态仿真模型,但只是宏观体现。汪金花等<sup>[6]</sup>、王鹏<sup>[7]</sup>进行了水灾仿真实验,主要研究的是水灾数学模型和最优避难路径。赵怡晴等<sup>[8]</sup>构建了矿井突水仿真的一体化模型,宏观展示了水灾淹没范围。

对于虚拟环境中矿井突水灾害逃生培训来说,巷道内突水蔓延的动态模拟能够为安全训练提供较好的辅助作用,因此对水体本身进行具有物理规律的真实感模拟是突水蔓延模拟的需求。基于物理的流体模拟方法分为基于网格的欧拉法和基于粒子的拉格朗日法。用欧拉网格法模拟流体的计算效率较高,Stam<sup>[9]</sup>提出基于网格法的流体模拟,提高了流体的稳定性和计算效率。邵绪强等<sup>[10]</sup>提出一种基于 shallow water 方程的物理模拟方法,加速大规模流体的物理模拟计算。1983年,Reeves<sup>[11]</sup>首次提出了粒子系统的方法并广泛应用到虚拟仿真中。Hu等<sup>[12]</sup>基于 SPH 算法在游戏引擎使用粒子系统进行了流体的模拟。基于粒子的拉格朗日法特别是 SPH 粒子法能够避免欧拉方法网格扭曲的缺陷而且能够处理流体自由边界问题,适合求解高速碰撞等问题<sup>[13-14]</sup>。

本研究采用 SPH 算法求解 N-S 方程获得流体的物理模型并应用到粒子系统,采用固定边界粒子法进行边界处理,结合三维八叉树方法进行表面重构实现水体的渲染,在 Unreal Engine 4 中实现了水流体的运动仿真效果,并在三维巷道地形中实现了突水水平流动、上向升涨和下向蔓延的仿真。使得沉浸性和交互性的矿井水灾逃生培训和灾情预测成为可能,在矿井突水灾害逃生演习中起到重要作用。

## 1 SPH 数值解算

光滑粒子流体动力学,是一种基于物理的纯拉格朗日粒子算法<sup>[15]</sup>。在 SPH 方法中,将流体视为质点系,系统的状态用包含各种物理量(密度、压力、速度等)的质点来描述,通过求解质点组的动力学方程和跟踪每个质点的运动轨道,求得整个系统的力学行为。SPH 的公式构造不受粒子分布的随意性影响,可以很自然地处理一些具有极大变形的模拟情况<sup>[16]</sup>,适用于矿井水灾蔓延模拟的研究。

基于粒子的流体模拟中,每个粒子的运动都遵循牛顿第二定律: $F = ma$ 。在 SPH 方法中,流体粒子的质量取决于粒子的密度,所以一般用密度来代替质量。作用在粒子上的力由外力、压力和粘性力组成。因此水作为一种不可压缩粘性流体,其模拟可用以下 N-S 方程的简化形式描述:

$$\rho a = -\nabla p + \rho g + \mu \nabla^2 u. \quad (1)$$

其中: $\rho$ 为液体的密度, $p$ 为压力, $u$ 为速度, $\nabla$ 为梯度, $\mu$ 为粘性系数, $\nabla^2$ 为拉普拉斯算子。忽略其他相关较小的力,外部力一般指重力,外力 $F = \rho g$ 。 $\mu \nabla^2 u$ 表示粘力项。

假设流体中一个位置为 $r_i$ 的点,此处的密度为 $\rho(r_i)$ 、压力为 $p(r_i)$ 、速度为 $u(r_i)$ ,那么根据公式(1),可以计算出此处粒子的加速度

$$a(r_i) = -\frac{\nabla p(r_i)}{\rho(r_i)} + g + \frac{\mu \nabla^2 u(r_i)}{\rho(r_i)}. \quad (2)$$

采用跳蛙(leap-frog)算法对加速度进行时间积分后,得到粒子在下一时刻的速度与位置<sup>[17]</sup>。在半个积分时间步得到速度,并利用这一速度计算新的位置,其位置和速度表达式为:

$$\begin{cases} u\left(t + \frac{1}{2}t\right) = u\left(t - \frac{1}{2}t\right) + a(r_i)t, \\ r(t+t) = r(t) + ut\left(t + \frac{1}{2}t\right). \end{cases} \quad (3)$$

计算时, $a(r_i)$ 为 SPH 方法中计算的加速度,这样就可以计算出下一时刻粒子的速度与位置。利用跳蛙法计算仅需储存 $u\left(t - \frac{1}{2}t\right)$ 与 $r(t)$ 两类信息,节约存储空间,而且准确性及稳定性较高。

计算时,假设已知  $u\left(t - \frac{1}{2}\Delta t\right)$  和  $r(t)$ , 由  $t$  时的位置  $r(t)$  计算质点所受的力与加速度  $a$ , 再预测时间为  $t + \frac{1}{2}\Delta t$  时的速度  $u\left(t + \frac{1}{2}\Delta t\right)$ , 以此类推。

根据  $u\left(t + \frac{1}{2}\Delta t\right)$  与  $u\left(t - \frac{1}{2}\Delta t\right)$ , 可得时间为  $t$  时的速度

$$u(t) = \frac{1}{2} \left[ \left( t + \frac{1}{2}\Delta t \right) + u\left( t - \frac{1}{2}\Delta t \right) \right] \quad (4)$$

SPH 方法中,整个系统是由具有独立质量、占有独立空间的有限个粒子表示的。可以由以下粒子近似法得到。假设流体中某点  $r$  (此处不一定有粒子), 在光滑核半径  $h$  范围内有数个粒子, 则该处场量  $A$  的计算可近似为:

$$A(r) = \sum_i A_i \frac{m_i}{\rho_i} W(r - r_i, h) \quad (5)$$

其中,  $A_i$  指的是要累加的某种场量, 本研究的场量是外力、密度、粘度;  $r$  指的是该粒子的当前位置,  $r_i$  为  $i$  处的粒子位置;  $h$  指的是光滑核半径; 函数  $W$  是光滑核函数。

本研究在 SPH 方法的基础上进行流体模拟, 通过 SPH 算法将流体连续方程转化为支持域内粒子求和的离散方程, 其压力项和粘力项的求解式分别表示为:

$$\frac{\nabla p(r_i)}{\rho(r_i)} = \sum_i \frac{m_i(p_i + p_j)}{2\rho_i} \nabla W_p(r - r_i, h) \quad (6)$$

$$\frac{\mu \nabla^2 u(r_i)}{\rho(r_i)} = \mu \sum_i \frac{m_j(u - u_i)}{\rho_i} \nabla^2 W_v(r - r_i, h) \quad (7)$$

式中:  $p_i = k(\rho_i - \rho_0)$  [18],  $\rho_0$  为流体的静止密度, 这里取值为  $1\,000\text{ kg/m}^3$ ;  $\rho(r_i) = \sum_i m_i W(r - r_i, h)$ 。本研究选取的三种光滑核函数具体形式如下[19]:

对于密度项选取的光滑核函数为:

$$W_{\text{poly6}}(r, h) = \begin{cases} \frac{315}{64\pi h^9} (h^2 - r^2)^3, & 0 \leq r \leq h \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (8)$$

对于压力项选取的光滑核函数为:

$$W_u(r, h) = \begin{cases} \frac{15}{\pi h^6} (h - r)^3, & 0 \leq r \leq h \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (9)$$

对于粘力项所用的光滑核函数选取

$$W_u(r, h) = \begin{cases} \frac{15}{(2\pi h^3)} \left( -\frac{r^3}{2h^3} + \frac{r^2}{h^2} + \frac{h}{2r} - 1 \right), & 0 \leq r \leq h \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (10)$$

由式(2), 式(5)~(10)即可求出粒子的加速度, 进而根据式(3)、(4)获取粒子下一时刻的速度与位置。

## 2 边界处理

基于 SPH 的粒子法是纯拉格朗日粒子方法, 粒子与边界的作用力必须转化为粒子与粒子之间的相互作用才可以进行计算。本研究采用一种精确并节省时间的固定边界粒子法[20], 将粒子与边界的作用转化为粒子与粒子之间的作用, 得以应用 SPH 方法计算边界问题。

如图 2 所示, 固定边界粒子法在边界上布置固定粒子, 用边界粒子与流体粒子反应代替固体边界与流体粒子发生反应, 通过内部粒子的压力, 估计边界粒子的压力。

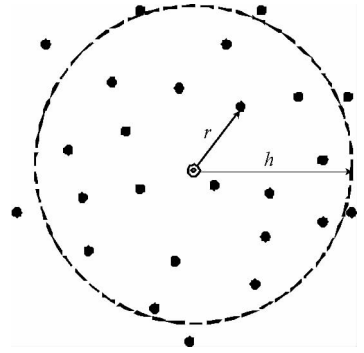


图 1 光滑函数影响阈内的粒子示意图

Fig.1 Schematic diagram of the particle in the threshold of the influence of smooth function

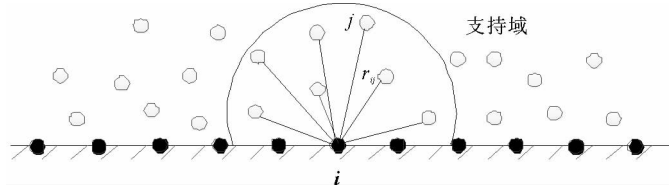


图 2 固定边界粒子法

Fig. 2 Fixed boundary particle method

选取以光滑长度  $h$  为半径的区域所有内部流体粒子,然后计算内部流体粒子与边界粒子的间距  $r_{ij}$ ,再通过式(11)近似求得此处的压力

$$P_i = \frac{\sum_{j=1}^N P_j (h - r_{ij})}{\sum_{j=1}^N (h - r_{ij})} \quad (11)$$

式中,  $r_{ij}$  表示边界粒子  $i$  支持域内的粒子  $j$  到边界粒子  $i$  的距离,  $P_i$  表示粒子  $i$  的压力,  $h$  表示光滑长度。通过公式可以看出,距离边界点较远的粒子,  $h - r_{ij}$  较小,其对边界点的压力贡献值较小;反之,距离边界点越近,  $h - r_{ij}$  较大,对  $P_i$  的影响越大。求得  $P_i$  后,在求解  $i$  粒子的受力时,  $P_i$  会对  $i$  产生影响,通过这种方式保证了粒子不会超出固壁边界,符合正常的物理规律,模拟出的粒子边界效果更为真实。计算过程中,边界粒子和内部粒子一样,搜索临近粒子,计算压力和密度,不同的是边界处的粒子速度始终为零,即粒子不发生运动。

### 3 流体渲染

流体效果的渲染基于八叉树的自适应流体的表面重建方法<sup>[21]</sup>,跟踪流体表面的粒子,构建自适应距离场。对于任意流体的粒子  $i$ ,计算一个再归一化矩阵  $B_i$ <sup>[22]</sup>:

$$B_i = \left[ \sum_j \nabla W(r_i) \otimes (r_j - r_i) V_j \right]^{-1} \quad (12)$$

其中:  $V_j$  是第  $j$  个邻粒子的体积;  $W$  为再归一化的高斯核函数。根据计算  $B_i$  的最小特征值  $\lambda_i^{\min}$ ,判定粒子  $i$  是否属于 SPH 流体表面  $S$ <sup>[23]</sup>。包含 SPH 流体表面粒子的粒子集合为

$$\begin{cases} i \in S, \lambda_i^{\min} \leq 0.75 \\ i \notin S, \lambda_i^{\min} > 0.75 \end{cases} \quad (13)$$

然后根据八叉树结点对不同粒子间距采样,构建自适应距离场,重建出仅由一层粒子构成的薄膜结构的网格表面用于流体表面绘制。再结合 Unreal Engine 4 的 shader 着色程序进行最终的渲染。

Unreal Engine 4 中,纹理(Texture)是基于 GPU 上需要运用特定的数据结构,纹理的坐标、纹理的查询分别相当于数组中元素的索引和元素的读取。

首先,把距离场的 FDistanceFieldVolumeTexture 数据对应提交到 GPU 中的 3D 纹理 DistanceFieldTexture 中;随后,通过调用函数使流体的距离场数据与全局距离场的网格相对应,此时需要变换矩阵使 GPU

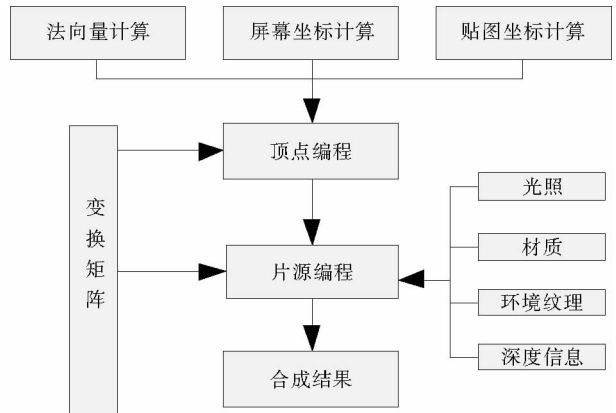


图 3 渲染流程

Fig. 3 Rendering process

距离场的数据与世界空间的数据相互转化;最后针对每一个视口网格生成一个全局距离场大小相同、密度不同的 3DTexture,并在此网格进行更新。

以上步骤完成后,需要将所有数据渲染到当前相机的平面,呈现在屏幕。根据摄像机坐标系下的坐标值,可以求得在当前摄像机下最近点的三维坐标,将屏幕作为投影平面,相机的中点作为起点,向模型距离场发出的采样射线与场景中的流体表面相交,计算出此交点的属性,就获取流体距离场中每个网格的属性数据,纹理采样然后进行绘制。绘制之前启用深度缓冲(Depth Buffer)对比采样点的距离生成正确的深度感知效果。最后调用一个 DrawRectangle 把距离场信息贴到对应的 View 全屏上。

流体表面绘制自定义函数如下:

```
void WaterShaderOnSurface(float4 surfPos)
{
float3 surfNorm = CalcSurfaceGrad(surfPos. xyz);
float3 WorldPosition = GetWorldPosition(surfPos. xyz);
float FluidDist = (surfPos. w - lastPos. w) * WorldRayDirLen;
float3 WorldNormal = normalize(surfNorm);
WaterShader. OnEnterSurface(lastPos. xyz + surfPos. xyz) * 0. 5f, FluidDist);
}
```

## 4 水灾仿真实验

在进行矿井突水蔓延仿真实验时选择的验证平台为:硬件平台为 Intel Core i7-7700 CPU @3. 60 GHz 处理器、16 GB 内存、NVIDIA Titan XP 显卡;软件平台为 Windows 10 操作系统,仿真平台为 Unreal Engine4 和 Visual Studio 2015。

在 Unreal Engine 4 源代码中定义解算相关函数,通过解算获得粒子的速度、位置等参数;然后在 Unreal Engine 4 编辑器中创建粒子 Particle 蓝图类,修改粒子的数量、周期和颜色等参数。

在巷道中,流体的边界主要是与巷道墙壁和设备的交界面,把巷道壁和巷道内设备作为刚体处理,从 Unreal Engine 4 距离场数据的 3D 纹理中获取边界信息后,在边界上布置一层固定粒子,利用粒子与边界粒子间的作用计算粒子在边界处与墙体碰撞后的流动状态。

生成固定边界粒子的部分函数如下:

```
Void BuildSBoundaryParticle(uint3DispatchThreadId;SV_DispatchThreadId)
{uint3 ijk = GetActiveIndex(DispatchThreadId);
float DistanceToNearestSurfaceParticle;
}
```

计算粒子下一刻的速度函数:

```
Velocity. xyz += DiffuseParticles. DeltaSeconds * acc. xyz / 2 * 100
```

得到粒子更新的速度,相应位置确定为:

```
Position. xyz += DiffuseParticles. DeltaSeconds * Velocity. xyz。
```

### 4.1 突水蔓延效果展示

在 Unreal Engine 4 中用画刷工具绘制实验所需的矿井巷道三维模型,进行突水蔓延模拟的巷道模型部分结构如下:

- 1) 将最终构建完善的粒子系统作为一个 Actor 加入到巷道模型中的突水位置;
- 2) 主要参数值设置为:

```
Spawn. Rate. Constanat=40 000. 0;
```

Spawn. Rate Scale. Constant =  
2.0;  
LifeTime. Constant = 1 000.0;  
Start Velocity = (100.0, 0.0,  
0.0)。

实验中,最先发射出的粒子在落到巷道表面时重力与边界粒子的支持力相互抵消,只有后面的粒子对其施加一个压力产生加速度向前,其他粒子由压力、重力和粘性力共同产生加速度,由 SPH 水模型的求解流程获得粒子下一刻的速度与位置,表现出水流向前蔓延的效果。

突水下向蔓延过程中,重力、粘力、压力的合力提供水流沿巷道地表面的加速度,表现出水流沿斜面向下的流动状态。突水上向蔓延过程中,水流持续蔓延至巷道低洼处,每个粒子占据一定的空间体积,底部粒子不断地往上层累积,水面不断抬高。

当突水蔓延过程发生在巷道左侧分叉口,由于左侧墙壁不再有粒子对流体产生压力,左侧流体表面粒子只受到内部相邻流体粒子向左的压力,上部的流体粒子受自身重力和相邻内部流体粒子的压力,部分粒子会产生向左的加速度,因此产生流体在分叉口分流的现象。

最终部分巷道内突水蔓延仿真效果如图 5 所示,其中右侧黑色+标记处为突水点。通过仿真的实验结果可以看到,在突水发生后,水流首先涌入低洼处平坦地势的巷道进行下向蔓延,在水流灌满低洼处巷道后水位开始上涨,随后水流会沿地势由低到高灌满整个巷道,并在分叉处分流。

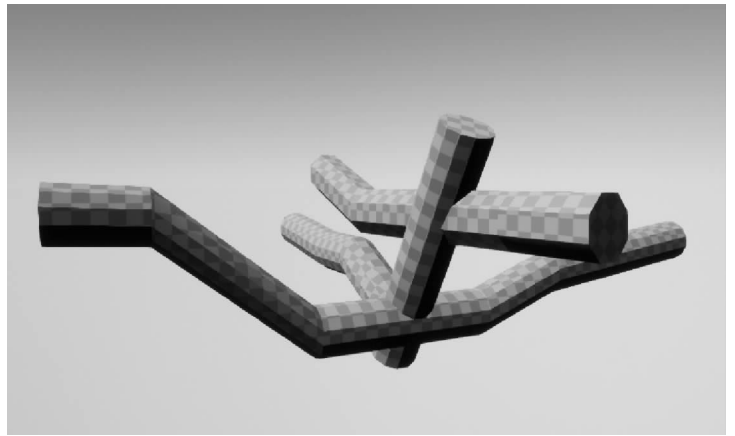
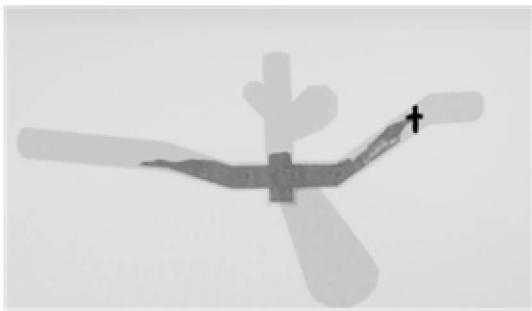
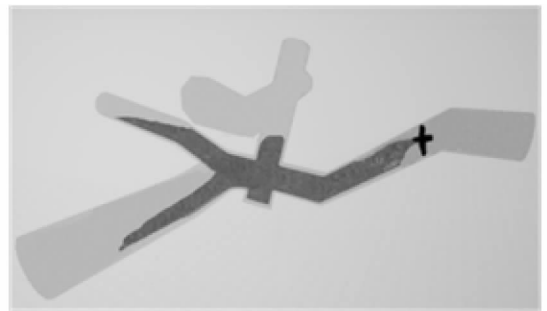


图4 巷道部分结构图

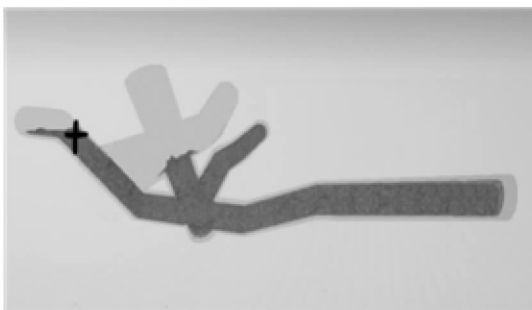
Fig. 4 Part of the structure of roadway



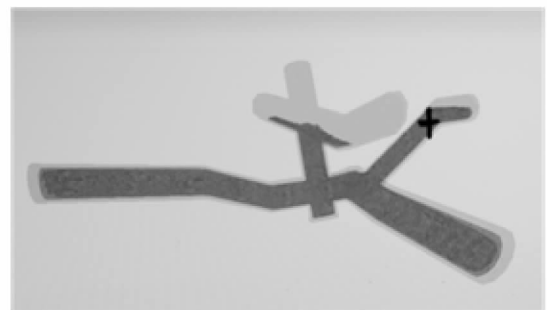
(a)  $t=2.0$  s



(b)  $t=8.0$  s



(c)  $t=12.0$  s



(d)  $t=20.0$  s

图5 巷道突水蔓延效果

Fig. 5 Simulation results of water inrush in roadway

本研究的方法在 Unreal Engine 4 虚拟环境中实现了突水蔓延的状态,巷道内部蔓延效果图如图 6 所示,在具有真实感的突水仿真的同时,实现蔓延的动态变化趋势。效果直观可见,相对于其他路径算法研究的突水蔓延,具有客观的实用性。



图 6 巷道内部蔓延效果图

Fig. 6 Effect of internal spread of roadway

## 5 结论

运用 SPH 算法求解粒子的压力项、密度项和粘力项得到粒子的加速度最终求得粒子的速度与位置,最终在复杂地形的巷道中实现了具有真实物理规律的突水蔓延仿真,包括水流上向蔓延、水流下向蔓延和水流在交叉口处的蔓延状态。通过实验,所研究的突水蔓延可以应用于矿井水灾逃生模拟中,但本研究的突水蔓延仿真局限于较小的巷道范围,下一步需要对大型巷道蔓延进行研究。

### 参考文献:

- [1] 贾舒. 矿井突水灾害分析与防治研究[J]. 山西焦煤科技, 2011, 2(2): 47-49.  
JIA Shu. Mine water analysis and prevention disaster[J]. Shanxi Coking Coal Science & Technology, 2011, 2(2): 47-49.
- [2] 张丽娟. 基于 OSG 的矿井突水应急虚拟仿真系统关键技术研究[D]. 北京: 中国矿业大学, 2013.
- [3] 刘欣倩. 基于 Unity3d 煤矿矿井突水事故的三维仿真研究[J]. 无线互联科技, 2016, 9(5): 11-12.  
LIU Xinqian. 3D simulation study of water inrush accidents in coal mine based on Unity3d [J]. Wireless Internet Technology, 2016, (9): 11-12.
- [4] 李长春. 虚拟巷道模型构建及其在巷道水淹模拟中的应用研究[J]. 测绘通报, 2007(7): 58-61.  
LI Changchun. Construction of virtual roadway model and its application in simulation of water flooded roadway [J]. Surveying and Mapping Bulletin, 2007(7): 58-61.
- [5] 李翠平, 李仲学, 郑瑶琨. 地下矿突水过程的三维动态仿真模型构建[J]. 北京科技大学学报, 2013, 35(2): 140-147.  
LI Cuiping, LI Zhongxue, ZHENG Yaoxia. Three-dimensional dynamic simulation modeling of water inrushes in underground mines[J]. Journal of University of Science and Technology Beijing, 2013, 35(2): 140-147.
- [6] 汪金花, 张亚静, 朱令起, 等. 井下避险路线的 GIS 数学模型与水灾仿真实验[J]. 中国煤炭, 2013, 39(3): 97-101.  
WANG Jinhua, ZHANG Yajing, ZHU Lingqi, et al. The GIS mathematical model and flood simulation of underground emergency route[J]. Chinese Coal, 2013, 39(3): 97-101.
- [7] 王鹏. 地下矿突水仿真研究综述[J]. 黑龙江科技信息, 2010(15): 3.  
WANG Peng. Summary of simulation study on water inrush from underground mines[J]. Heilongjiang Science and Technology Information, 2010(15): 3.
- [8] 赵怡晴, 李仲学, 周耀东, 等. 地下矿水灾场一体化构模及可视化仿真技术[J]. 北京科技大学学报, 2014(11): 1436-1442.  
ZHAO Yiqing, LI Zhongxue, ZHOU Yaodong, et al. Integrated modeling and visual simulation of water inrush in an underg-

- roundmine[J]. Journal of University of Science and Technology Beijing, 2014(11):1436-1442.
- [9] STAM J. Real-time fluid dynamics for games[J]. Journal of Graphics Tools, 2003(6):2-10.
- [10] 邵绪强, 杨晓丹, 李继荣, 等. 大规模流体场景的真实感与实时模拟[J]. 中国图象图形学报, 2016, 21(7):913-922.  
SHAO Xuqiang, YANG Xiaodan, LI Jirong, et al. Realistic and real-time simulation of large-scale fluid[J]. Chinese Journal of Image Graphics, 2016, 21(7):913-922.
- [11] REEVESW T. Particle systems: A technique for modeling a class of fuzzy objects[J]. ACM Transactions on Graphics, 1983, 2(2):91-108.
- [12] HU W, WANG Z, FAN X. Contained fluid simulation based on game engine[C]//International Conference on Computer and Information Science. IEEE, 2017:545-549.
- [13] 魏喜飞. 基于物理模型的三维水流模拟研究[D]. 邯郸:河北工程大学, 2012.
- [14] 钟子春. 实时流体交互性模拟算法的研究与实现[D]. 成都:电子科技大学, 2009.
- [15] MONAGHAN J J. Simulating free surface flows with SPH[J]. Journal of Computational Physics, 1994, 110(2):399-406.
- [16] 韩旭, 杨刚. 光滑粒子流体动力学:一种无网格粒子法[M]. 长沙:湖南大学出版社, 2005:26-27.
- [17] 郑磊. 基于 Unity3D 引擎和 SPH 方程的海浪模拟[D]. 成都:电子科技大学, 2016:35-36.
- [18] DESBRUN M, GASCUEL M P. Smoothed particles: A new paradigm for animating highly deformable bodies[M]// Computer Animation and Simulation'96. Springer Vienna, 1996:61-76.
- [19] CHARYPAR D, GROSS M. Particle-based fluid simulation for interactive applications[C]// ACM Siggraph/eurographics Symposium on Computer Animation. Eurographics Association, 2003:154-159.
- [20] 郑坤, 孙昭晨, 张志明, 等. SPH 数值模拟中边界处理方法及对比分析[J]. 水运工程, 2009(8):23-27.  
ZHENG Kun, SUN Zhaochen, ZHANG Zhiming, et al. On methods of processing solid boundary condition in SPH simulation[J]. Water Transport Engineering, 2009(8):23-27.
- [21] 邵绪强, 刘艳, 王新颖. 一种拉格朗日粒子流体的高效表面重建方法[J]. 图学学报, 2016, 37(5):607-613.  
SHAO Xuqiang, LIU Yan, WANG Xinying. An efficient surface reconstruction method for Lagrangian particle fluid[J]. Journal of Graphics, 2016, 37(5):607-613.
- [22] MARRONE S, COLAGROSSI A, LE T, et al. Fast free-surface detection and level-set function definition in SPH solvers [J]. Journal of Computational Physics, 2010, 229(10):3652-3663.
- [23] COLAGROSSI A, LANDRINI M. Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics[J]. Journal of Computational Physics, 2003, 191(2):448-475.

(责任编辑:李 磊)