引用格式:王素素,周绍伟. 带马尔科夫利率的双险种复合双二项离散风险模型破产概率研究[J]. 山东科技大学学报(自然科学版),2018,37(6):49-54.
WANG Susu, ZHOU Shaowei. Research on ruin probability of a double-type insurance compound binomial discrete risk model with Markov chain interest[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science), 2018, 37(6):49-54.

带马尔科夫利率的双险种复合双二项离散风险模型破产概率研究

王素素,周绍伟
(山东科技大学 数学与系统科学学院,山东 青岛 266590)

摘　要:在引入投资的情况下,对经典离散时间风险模型的保费收取、索赔过程及险种三个方面进行推广。引入双险种,且保险收取与索赔过程服从二项分布,利用等价变换及全概率公式得到模型的破产概率积分表达式,通过鞅方法证明改进后的模型存在破产概率上界,并应用停时定理证明该破产概率上界优于不带投资情况下的破产概率上界。

关键词:离散风险模型;破产概率;马尔科夫利率;鞅

中图分类号:F840　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-3767(2018)06-0049-06
DOI: 10.16452/j.cnki.sdkjzk.2018.06.006

Research on Ruin Probability of A Double-type Insurance Compound Binomial Discrete Risk Model with Markov Chain Interest

WANG Susu, ZHOU Shaowei
(College of Mathematics and Systems Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao, Shandong 266590, China)

Abstract: In the improvement of the premium collection, claim procedures, and insurance types of the classical discrete risk model, a double-type insurance was introduced whose premium collection and claim procedures satisfied the binomial distribution under the circumstances of investment. Then, the integral expression of the ruin probability was derived by using the methods of mathematical deduction including equivalent transformation and total probability formula. Finally, with the method of martingale, the upper bound of the ruin probability of the improved model was derived, which was later proved superior to that of classical discrete risk model without investment by using the method of stopping time theorem.

Key words: discrete risk model; ruin probability; Markov chain interest; martingale

Lundberg 提出经典风险模型之后,在保险精算领域,众多学者对经典风险模型进行改进和推广,使其更符合保险公司经营现状。文献[1]最早将保费收取过程推广为复合二项模型,将保费收取过程离散化,给出

收稿日期:2017-11-06
基金项目:山东省优秀中青年科学家科研奖励基金项目(BS2014SF005);山东省统计科研重点课题(KT15105)
作者简介:王素素(1993—),女,山东东营人,硕士研究生,主要从事保险精算的研究.
周绍伟(1979—),女,山东泰安人,副教授,博士,主要从事随机控制、风险理论的研究,本文通信作者.
E-mail:1914532073@qq.com

关于破产概率及盈余在破产前及破产瞬间的联合分布的若干结果。随后,中外学者对复合二项风险模型进行了大量研究。文献[2]将索赔过程推广为复合二项模型。文献[3]用复合二项模型的破产概率来近似经典连续时间复合泊松模型的破产概率,讨论了具有几何索赔量的复合二项模型的相关结果。文献[4]将保费收取过程与索赔过程同时推广为复合二项过程。文献[5-6]利用生成函数推导出复合二项风险模型的破产概率。此外,随着金融市场的发展,保险公司可用资金扩张且行业竞争激烈,使保险公司对外投资具有了可能性及必要性。文献[7]最早引入马尔科夫链利率,用递推方程归纳法给出了有限时间的破产概率上界。文献[8-10]在此基础上,对考虑投资情况的破产模型进行了进一步研究。文献[11]考虑离散情况下,将期初保费收取进行短期投资,得到新模型的破产概率。文献[12]在考虑通货膨胀率等随机因素干扰的情况下,将盈余资本进行投资并推广得到新的双二项风险模型。文献[13]考虑带有常利率及相依结构的风险过程,并在此基础上研究破产概率。文献[14-17]在离散时间下引入马尔科夫链利率,对风险模型的破产概率进行进一步研究。本研究在已有文献的基础上,引入第二个险种,将单一险种的风险模型推广为多险种的风险模型,将经典风险模型改进为双险种复合双二项风险模型,采用马尔科夫链利率预期未来收益,利用全概率公式等数学工具得到破产概率积分表达式,运用鞅方法得到破产概率上界。

1 模型的描述

考虑带马尔科夫链利率的离散时间双险种复合双二项风险模型:

$$U_n = u + \sum_{k=1}^{n} c\delta_k - \sum_{k=1}^{n} X_k\varepsilon_k - \sum_{k=1}^{n} Y_k\xi_k 。 \tag{1}$$

其中,U_n 为保险公司在 n 时刻的盈余。对于险种Ⅰ,每单位时间内发生理赔的概率为 p_1,不发生理赔的概率为 q_1。用 $\{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 1}$ 表示险种Ⅰ第 n 个单位时间内的理赔发生情况,即 $P(\varepsilon_n = 1) = p_1, P(\varepsilon_n = 0) = q_1$。理赔额 $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ 是取正值的独立同分布于 X 的随机变量,其中 X 的分布函数 $F_X(x) = P(X \leqslant x)$。类似地,对于险种Ⅱ,每单位时间内发生理赔的概率为 p_2,不发生理赔的概率为 q_2。用 $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ 表示险种Ⅱ第 n 个单位时间内的理赔发生情况,即 $P(\xi_n = 1) = p_2, P(\xi_n = 0) = q_2$。理赔额 $\{Y_n\}_{n\geqslant 1}$ 是取正值的独立同分布于 Y 的随机变量,其中 Y 的分布函数 $F_Y(x) = P(Y \leqslant y)$。初始盈余为 u,每单位时间内保费收取情况随机,时刻 n 是否收取保费用 δ_n 表示,保费收取发生概率为 p_3,不发生的概率为 q_3,即 $P(\delta_n = 1) = p_3, P(\delta_n = 0) = q_3$,保费收取率为 c。

设利率 $\{I_n, n = 0,1,2,\cdots\}$ 是一个马尔科夫链。对所有的 $n = 0,1,2,\cdots$, I_n 可以取任意的一个可能值 $i_0, i_1, \cdots, i_N$,这些可能值构成一个集合,称为马尔科夫链 $\{I_n, n = 0,1,2,\cdots\}$ 的状态空间,用 $I = \{i_0, i_1, \cdots, i_N\}$ 来表示。则对所有的 $n = 0,1,2,\cdots$ 和所有的状态 $i_s, i_t, \cdots, i_{t_{n-1}}$,有

$$P(I_{n+1} = i_t \mid I_n = i_s, I_{n-1} = i_{t_{n-1}}, \cdots, I_0 = i_{t_0}) = P(I_{n+1} = i_t \mid I_n = i_s) = p_{st} \geqslant 0 ,$$

其中 $s,t = 0,1,\cdots N$,且 $\sum_{t=0}^{N} p_{st} = 1$ 。

定义破产时刻 $T = \inf\{n : n > 0, U_n < 0 \mid U_0 = u, I_0 = i_s\}$;

最终破产概率 $\varphi(u; i_s) = P(\bigcup_{k=1}^{\infty} (U_k < 0) \mid U_0 = u, I_0 = i_s) = P(T < \infty \mid U_0 = u, I_0 = i_s)$;

有限时间内破产概率

$$\varphi_n(u; i_s) = P(\bigcup_{k=1}^{n} (U_k < 0) \mid U_0 = u, I_0 = i_s) = P(T \leqslant n \mid U_0 = u, I_0 = i_s) 。$$

易知,$\varphi_1(u; i_s) \leqslant \varphi_2(u; i_s) \leqslant \cdots \leqslant \varphi_n(u; i_s)$。因此,$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(u; i_s) = \varphi(u; i_s)$ 。

假定保费的收取和索赔均发生在期末,则风险模型的盈余过程为

当 $n \geqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned} U_n &= U_{n-1}(1 + I_n) + c\delta_n - X_n\varepsilon_n - Y_n\xi_n \\ &= u\prod_{j=1}^{n}(1 + I_j) + \sum_{j=1}^{n}\Big((c\delta_j - X_j\varepsilon_j - Y_j\xi_j)\prod_{t=j+1}^{n}(1 + I_t)\Big), \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $U_0 = u$ 。

2 主要结果

引理 1 令 $M_n = X_n\varepsilon_n + Y_n\xi_n$，$\{M_n\}_{n\geqslant 1}$ 是取正值的独立同分布的随机变量。设 M_n 的分布函数为 $F_M(m)$，则

$$F_M(m) = \begin{cases} 0,\ m < 0; \\ q_1 q_2,\ m = 0; \\ q_1 q_2 + p_1 q_2 F_X(m) + q_1 p_2 F_Y(m) + p_1 p_2 \left(\sum_{i=0}^{m} F_X(i) F_Y(m-i)\right),\ m > 0 \ 。\end{cases}$$

证明: $\{M_n\}_{n\geqslant 1}$ 是取正值的独立同分布的随机变量。因此,当 $m < 0$ 时，$F_M(m) = 0$。

当 $m = 0$ 时，

$$F_M(0) = P(M_n = 0) = P(\varepsilon_n = 0)P(\xi_n = 0) = q_1 q_2 。$$

当 $m > 0$ 时，

$$\begin{aligned} F_M(m) &= P(M_n \leqslant m) = P(\varepsilon_n = 0)P(\xi_n = 0) + P(\varepsilon_n = 1)P(\xi_n = 0)P(X_n \leqslant m) \\ &\quad + P(\varepsilon_n = 0)P(\xi_n = 1)P(Y_n \leqslant m) + P(\varepsilon_n = 1)P(\xi_n = 1)\left(\sum_{i=0}^{m} F_X(i)F_Y(m-i)\right) \\ &= q_1 q_2 + p_1 q_2 F_X(m) + q_1 p_2 F_Y(m) + p_1 p_2 \left(\sum_{i=0}^{m} F_X(i)F_Y(m-i)\right) 。\end{aligned}$$

得证。

由引理 1,式(2)的盈余过程即为

$$U_n = u\prod_{j=1}^{n}(1 + I_j) + \sum_{j=1}^{n}\left((c\delta_j - M_j)\prod_{t=j+1}^{n}(1 + I_t)\right) 。\tag{3}$$

定理 1 破产概率 $\varphi(u;i_s)$ 满足以下积分表达式：

$$\begin{aligned} \varphi(u;i_s) = &\sum_{t=0}^{\infty} p_{st} q_3 \int_0^{u(1+i_t)} \varphi_n(u(1+i_t) - m;i_t)\,\mathrm{d}F_M(m) \\ &+ \sum_{t=0}^{\infty} p_{st} p_3 \int_0^{u(1+i_t)+c} \varphi_n(u(1+i_t) + c - m;i_t)\,\mathrm{d}F_M(m) \\ &+ \sum_{t=0}^{\infty} p_{st}(q_3\,\overline{F}(u(1+i_t)) + p_3\,\overline{F}(u(1+i_t)+c)) 。\end{aligned}$$

证明:由式(3)可知

$$U_1 = u(1 + I_1) + c\delta_1 - M_1,$$

因此,

$$\begin{aligned} &P(U_1 < 0 \mid I_0 = i_s, I_1 = i_t, M_1 = m) \\ &= q_3 P(u(1+i_t) - m < 0 \mid I_0 = i_s, I_1 = i_t, M_1 = m) \\ &\quad + p_3 P(u(1+i_t) + c - m < 0 \mid I_0 = i_s, I_1 = i_t, M_1 = m) \\ &= \begin{cases} 0,\ 0 \leqslant m \leqslant u(1+i_t) \\ q_3,\ u(1+i_t) < m \leqslant u(1+i_t) + c \\ 1,\ m > u(1+i_t) + c \end{cases} 。\end{aligned}$$

假设 $I_n^* = I_{n+1}$，$\delta_n^* = \delta_{n+1}$，$M_n^* = M_{n+1}$。

对 m 进行如下分情况讨论：

① $0 \leqslant m \leqslant u(1+i_t)$ 时，

$$P(\bigcup_{k=1}^{n+1}(U_k < 0) \mid I_0 = i_s, I_1 = i_t, M_1 = m) = P(\bigcup_{k=2}^{n+1}(U_k < 0) \mid I_0 = i_s, I_1 = i_t, M_1 = m)$$

$$= P\left(\bigcup_{k=2}^{n+1}((u(1+i_t) + c\delta_j - m)\prod_{j=2}^{n}(1 + I_j) + \sum_{j=2}^{n}(c\delta_j - M_j)\prod_{t=j+1}^{n}(1 + I_t) < 0) \mid I_0 = i_s, I_1 = i_t, M_1 = m\right)$$

$$= P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1}\left((u(1+i_t)+c\delta_j-m)\prod_{j=1}^{n}(1+I_j^*)+\sum_{j=1}^{n}(c\delta_j^*-M_j^*)\prod_{t=j+1}^{n}(1+I_t^*)<0\right)\mid I_0=i_s,I_0^*=i_t,M_1=m\right)$$

$$= E(\varphi_n(u(1+i_t)+c\delta_1-m;i_t)) = q_3\varphi_n(u(1+i_t)-m;i_t)+p_3\varphi_n(u(1+i_t)+c-m;i_t)\ ;$$

② $u(1+i_t)<m\leqslant u(1+i_t)+c$ 时,

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1}(U_k<0)\mid I_0=i_s,I_1=i_t,M_1=m\right)$$

$$= P(U_1<0\mid I_0=i_s,I_1=i_t,M_1=m)P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1}(U_k<0)\mid I_0=i_s,I_1=i_t,M_1=m,U_1<0\right)$$

$$+P(U_1\geqslant 0\mid I_0=i_s,I_1=i_t,M_1=m)P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1}(U_k<0)\mid I_0=i_s,I_1=i_t,M_1=m,U_1\geqslant 0\right)$$

$$= q_3+p_3\varphi_n(u(1+i_t)+c-m;i_t)\ ;$$

③ $m>u(1+i_t)+c$ 时,有 $P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1}(U_k<0)\mid I_0=i_s,I_1=i_t,M_1=m\right)=1$ 。

对以上三部分利用全概率公式可得:

$$\varphi_{n+1}(u;i_s)=P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1}(U_k<0)\right)=\sum_{t=0}^{\infty}p_{st}\int_0^{\infty}P\left(\bigcup_{k=1}^{n+1}(U_k<0)\mid I_0=i_s,I_1=i_t,M_1=m\right)\mathrm{d}F_M(m)$$

$$=\sum_{t=0}^{\infty}p_{st}\int_0^{u(1+i_t)}E(\varphi_n(u(1+i_t)+c\delta_1-m;i_t))\mathrm{d}F_M(m)$$

$$+\sum_{t=0}^{\infty}p_{st}\int_{u(1+i_t)}^{u(1+i_t)+c}(q_3+p_3\varphi_n(u(1+i_t)+c-m;i_t))\mathrm{d}F_M(m)$$

$$+\sum_{t=0}^{\infty}p_{st}\int_{u(1+i_t)+c}^{\infty}1\mathrm{d}F_M(m)$$

$$=\sum_{t=0}^{\infty}p_{st}q_3\int_0^{u(1+i_t)}\varphi_n(u(1+i_t)-m;i_t)\mathrm{d}F_M(m)$$

$$+\sum_{t=0}^{\infty}p_{st}p_3\int_0^{u(1+i_t)+c}\varphi_n(u(1+i_t)+c-m;i_t)\mathrm{d}F_M(m)$$

$$+\sum_{t=0}^{\infty}p_{st}(q_3\overline{F}(u(1+i_t))+p_3\overline{F}(u(1+i_t)+c))\ ,$$

且可由 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(u;i_s)=\varphi(u;i_s)$ 得到 $\varphi(u;i_s)$。

证毕。

定义 1 对于风险过程 $\{U_n\}$,若 $E(M_1-c\delta_1)<0$,且存在一个常量 $R_0>0$,满足 $E(\mathrm{e}^{R_0(M_1-c\delta_1)})=1$,则称 R_0 为调节系数。

引理 2 令 $V_n=U_n\prod\limits_{j=1}^{n}(1+I_j)^{-1}$,$n=1,2,\cdots$,对于风险过程 $\{V_n\}$,存在常数 $R_1>0$ 使得 $\{\mathrm{e}^{-R_1V_n}\}$ 是一个上鞅。

证明:风险过程 $\{V_n\}$ 的现实意义为 n 时刻盈余值贴现到当前时刻的现值,因此可知,风险模型(3)的破产概率等价于风险过程 $\{V_n,n=1,2,\cdots\}$ 的破产概率,即

$$\varphi_n(u;i_s)=P\left(\bigcup_{k=1}^{n}(U_k<0)\mid I_0=i_s\right)=P\left(\bigcup_{k=1}^{n}(V_k<0)\mid I_0=i_s\right)\ 。$$

对于式(3)的风险盈余过程 $\{U_n\}$,可令

$$V_n=U_n\prod_{j=1}^{n}(1+I_j)^{-1}=u+\sum_{j=1}^{n}\left((c\delta_j-M_j)\prod_{t=1}^{j}(1+I_t)^{-1}\right)\ ,\tag{4}$$

则

$$V_{n+1}=u+\sum_{j=1}^{n+1}\left((c\delta_j-M_j)\prod_{t=1}^{j}(1+I_t)^{-1}\right)=V_n+(c\delta_{n+1}-M_{n+1})\prod_{t=1}^{n+1}(1+I_t)^{-1}\ 。\tag{5}$$

令 $W_n = M_n - c\delta_n$，即第 n 阶段保险公司净损失额，分布函数为 $F_W(w)$。

式(4)、(5)分别简化为

$$V_n = u - \sum_{j=1}^{n}\left((W_j)\prod_{t=1}^{j}(1+I_t)^{-1}\right)\ ; \tag{6}$$

$$V_{n+1} = u - \sum_{j=1}^{n+1}\left((W_j)\prod_{t=1}^{j}(1+I_t)^{-1}\right) = V_n - (W_{j+1})\prod_{t=1}^{n+1}(1+I_t)^{-1}。 \tag{7}$$

另假定 $E(W_1) < 0$，存在 $\rho_s > 0$ 满足

$$E(e^{\rho_s W_1(1+I_1)^{-1}} \mid I_0 = i_s) = 1, s = 0,1,\cdots,N\ ,$$

对于 $\forall s = 0,1,\cdots,N$，构造函数

$$l_s(r) = E(e^{rW_1(1+I_1)^{-1}} \mid I_0 = i_s) - 1 = \sum_{t=0}^{N} p_{st}\int_{-\infty}^{\infty} e^{rw(1+i_t)^{-1}}\,dF_W(w) - 1\ ,$$

则

$$l'_s(r) = \sum_{t=0}^{N} p_{st}\int_{-\infty}^{\infty} w(1+i_t)^{-1}e^{rw(1+i_t)^{-1}}\,dF_W(w)\ ;$$

$$l''_s(r) = \sum_{t=0}^{N} p_{st}\int_{-\infty}^{\infty} w^2(1+i_t)^{-2}e^{rw(1+i_t)^{-1}}\,dF_W(w) \geqslant 0。$$

可知，$l_s(0) = 0, l'_s(0) < 0, l''_s(0) \geqslant 0$。

因此，$l_s(r)$ 是一个凸函数，且 ρ_s 是方程 $l_s(r) = 0$ 在 $(0,\infty)$ 上的唯一正根。

又由詹森不等式可知，

$$E(e^{R_0W_1(1+I_1)^{-1}} \mid I_0 = i_s) = \sum_{t=0}^{N} p_{st}E(e^{R_0W_1(1+i_t)^{-1}}) \leqslant \sum_{t=0}^{N} p_{st}(E(e^{R_0W_1}))^{(1+i_t)^{-1}} = \sum_{t=0}^{N} p_{st} = 1\ ,$$

即 $l_s(R_0) < 0$。因此，可得 $R_0 \leqslant \rho_s$。

现定义对于所有的 $s = 0,1,\cdots,N$，

$$R_1 = \min_{0\leqslant s\leqslant N}\{\rho_s\} \geqslant R_0。 \tag{8}$$

因此，对于所有的 $s = 0,1,\cdots,N$，$l_s(R_1) \leqslant 0$，

$$E(e^{R_1W_1(1+I_1)^{-1}} \mid I_0 = i_s) \leqslant 1\ 。 \tag{9}$$

令 $S_n = e^{-R_1V_n}$，则

$$S_{n+1} = e^{-R_1V_{n+1}} = e^{-R_1\left(V_n - W_{n+1}\prod_{t=1}^{n+1}(1+I_t)^{-1}\right)} = e^{-R_1V_n + R_1W_{n+1}\prod_{t=1}^{n+1}(1+I_t)^{-1}} = S_n e^{R_1W_{n+1}\prod_{t=1}^{n+1}(1+I_t)^{-1}}\ 。$$

因此，根据詹森不等式及式(9)可得，

$$\begin{aligned}&E(S_{n+1} \mid W_1,\cdots,W_n,I_1,\cdots I_n) = S_nE(e^{R_1W_{n+1}\prod_{t=1}^{n+1}(1+I_t)^{-1}} \mid I_1,\cdots I_n)\\ &= S_nE(e^{R_1W_{n+1}(1+I_{n+1})^{-1}\prod_{t=1}^{n}(1+I_t)^{-1}} \mid I_1,\cdots I_n) \leqslant S_n(E(e^{R_1W_{n+1}(1+I_{n+1})^{-1}} \mid I_1,\cdots I_n))^{\prod_{t=1}^{n}(1+I_t)^{-1}}\\ &= S_n(E(e^{R_1W_{n+1}(1+I_{n+1})^{-1}} \mid I_n))^{\prod_{t=1}^{n}(1+I_t)^{-1}} \leqslant S_n,\end{aligned}$$

即证得常数 $R_1 > 0$ 使得 $\{e^{-R_1V_n}\}$ 是一个上鞅。

定理 2　对所有的 $s = 0,1,\cdots,N$，

$$\varphi(u,i_s) \leqslant e^{-R_1u},\ u \geqslant 0 \text{ 且 } e^{-R_1u} \leqslant e^{-R_0u}。$$

证明:令 $T_s = \min\{n: V_n < 0 \mid I_0 = i_s\}$，则 T_s 是一个停时且 $n \wedge T_s = \min(n,T_s)$ 是一个有限停时，对所得上鞅应用最优停时定理，可得

$$E(S_{n\wedge T_s}) \leqslant E(S_0) = e^{-R_1u},$$

则

$$\begin{aligned}e^{-R_1u} &\geqslant E(S_{n\wedge T_s}) \geqslant E(S_{n\wedge T_s}I(T_s \leqslant n)) = E(S_{T_s}I(T_s \leqslant n))\\ &= E(e^{-R_1V_{T_s}}I(T_s \leqslant n)) \geqslant E(I(T_s \leqslant n)) = \varphi_n(u,i_s)\ 。\end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时,可得

$$\varphi(u,i_s) \leqslant e^{-R_1 u} \quad u \geqslant 0 \text{ 。} \tag{10}$$

由式(8)可知 $R_1 \geqslant R_0$,即

$$e^{-R_1 u} \leqslant e^{-R_0 u},$$

证毕。

由上述论述可知,R_0 是定义的没有考虑风险投资情况的模型(1)的调节系数,即 $\{e^{-R_0 U_n}\}$ 是一个鞅,根据停时定理可得模型(1)的 Lundberg 不等式为 $\varphi(u,i_s) \leqslant e^{-R_0 u}$;将考虑风险投资情况的模型(3)中 n 时刻盈余值贴现到当前时刻的现值得到模型(4)后,该模型存在 R_1 使得 $\{e^{-R_1 V_n}\}$ 是一个上鞅,同理利用停时定理可得模型(4)的 Lundberg 不等式为 $\varphi(u,i_s) \leqslant e^{-R_1 u}$;$n$ 时刻盈余值的正负情况与其贴现值的正负情况相同,因此考虑风险投资情况的模型(3)的 Lundberg 不等式也为 $\varphi(u,i_s) \leqslant e^{-R_1 u}$。

又根据函数的凹凸性、极值定理及詹森不等式的相关性质可知,$R_1 \geqslant R_0$,进一步可得 $e^{-R_1 u} \leqslant e^{-R_0 u}$,即考虑投资情况的模型(3)的破产概率上界小于不考虑投资情况的模型(1)的破产概率上界,保险公司进行风险投资可降低风险。

3 结论

本文主要研究了带有马尔科夫链利率的离散时间双险种复合双二项风险模型,是对已有文献中相关离散时间风险模型的拓展。

先从险种、保费收取、索赔三个方面进行改进,并通过建立马尔科夫链引入随机利率,得到更为复杂的风险过程的表达式,并利用递推法及全概率公式进一步推导出破产概率的积分表达式。随后研究破产概率上界,通过等价变换得到新的风险过程,在构造函数的基础上利用詹森不等式证明该风险过程是一个上鞅,通过运用停时定理推导出破产概率上界。研究还发现所讨论的带随机利率的离散时间双险种复合双二项风险模型的破产概率上界优于经典离散时间模型的 Lundberg 上界,即保险公司进行风险投资将有效降低破产概率。接下来的研究将主要集中于保险公司进行风险投资的实证研究,旨在为保险公司的现实经营提供更具价值的参考。

参考文献:

[1]GERBER H. Mathematical fun with the compound binomial process[J]. Astin Bulletin,1988,18(2):161-168.

[2]SHIU E S W. The probability of eventual ruin in the compound binomial model[J]. Astin Bulletin,1989,19(2):179-190.

[3]DICKSON D. Some comments on the compound binomial model[J]. Astin Bulletin,1994,24(1):33-45.

[4]ZHANG M J,NAN J X. The ruin probability of the compound binomial risk model with a random premium[J]. Bulletin of Science and Technology,2005,21(3):366-371.

[5]WILLMOT G. Ruin probabilities in the compound binomial model[J]. Insurance,Mathematics and Economics,1993,12(2):133-142.

[6]LI S M,SENDOVA K. The finite-time ruin probability under the compound binomial risk model[J]. European Actuarial Journal,2013,3(1):249-271.

[7]CAI J,DICKSON D. Ruin probabilities with a Markov chain interest model[J]. Insurance Mathematics and Economics,2004,35(3):513-525.

[8]CHEN M,YUEN K,GUO J Y. Survival probabilities in a discrete semi-Markov risk model[J]. Applied Mathematics and Computation,2014,232(3):205-215.

[9]翟玲智.带有风险投资的离散风险模型破产概率问题的研究[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2015:1-35.

[10]赵博.投资收益风险模型的破产问题研究[D].北京:中央民族大学,2010:1-37.

[11]郭航,金燕生,张衡.一类带短期投资的离散模型[J].统计与决策,2017(9):82-84.

GUO Hang,JIN Yansheng,ZHANG Heng. Discrete model with a type of short term investment[J]. Statistics & Decision,2017(9):82-84.

(下转第 92 页)

[19]ESTER M,KRIEGEL H P,SANDER J,et al. A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise[C]// Proceedings of the 2nd International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. Portland:AAAI,1996:226-231.

[20]张靖,段富.优化初始聚类中心的改进 K-means 算法[J].计算机工程与设计,2013,34(5):1691-1694.

ZHANG Jing,DUAN Fu. Improved K-means algorithm with meliorated initial centers[J]. Computer Engineering & Design,2013,34(5):1691-1680.

[21]傅德胜,周辰.基于密度的改进 K 均值算法及实现[J].计算机应用,2011,31(2):432-434.

FU Desheng,ZHOU Chen. Improved K-means algorithm and its implementation based on density[J]. Journal of Computer Applications,2011,31(2):432-434.

(责任编辑:傅 游)

(上接第 54 页)

[12]高明美,孙浩,刘喜华.带干扰和投资的双二项风险模型的破产概率[J].统计与决策,2015(22):22-25.

GAO Mingmei,SUN Hao,LIU Xihua. Ruin probability in risk model with double binomial process of diffusion and investment[J]. Statistics & Decision,2015(22):22-25.

[13]盖维丹.带常利率和相依结构更新风险模型的破产概率[J].经济数学,2016,33(2):29-33.

GAI Weidan. Ruin probability in a risk model with constant interest force and dependence structure[J]. Journal of Quantitative Economics,2016,33(2):29-33.

[14]何晓霞,姚春,胡亦钧.利率为马氏链的离散时间风险模型的破产概率[J].应用概率统计,2012,28(3):270-276.

HE Xiaoxia,YAO Chun,HU Yijun. Ruin probabilities for the discrete risk models with Markov chain interest[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics,2012,28(3):270-276.

[15]刘家有.带马氏链利率的离散风险模型的破产概率[J].合肥学院学报,2006,16(2):15-18.

LIU Jiayou. Ruin probabilities in a discrete time risk model with a Markov chain interest[J]. Journal of Heifei University (Natural Science),2006,16(2):15-18.

[16]李娜之,刘志平.带马氏利率的离散时间风险模型的破产概率[J].数学理论与应用,2009,29(4):6-9.

LI Nazhi,LIU Qingping. Ruin probabilities for discrete time risk models with Markov interest rate[J]. Mathematical Theory and Applications,2009,29(4):6-9.

[17]牛祥秋.Markov 链利率下再保险模型的破产概率上界[J].经济数学,2016,33(3):45-50.

NIU Xiangqiu. Upper bound for the ruin probability under risk model of reinsurance with Markov chain interest rate[J]. Journal of Quantitative Economics,2016,33(3):45-50.

(责任编辑:傅 游)