

引用格式:王红飞,胡志兴. 一类带有脉冲的生物入侵随机模型的分析[J]. 山东科技大学学报(自然科学版), 2018, 37(6): 55-64.

WANG Hongfei, HUZhixing. Analysis for a stochastic system with impulses about biological invasion[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science), 2018, 37(6):55-64.

一类带有脉冲的生物入侵随机模型的分析

王红飞,胡志兴

(北京科技大学 数理学院,北京 10083)

摘要:自然界存在大量的捕食关系,生物入侵是一种特殊的捕食关系。考虑到现实中两种群的关系难免受到环境的白噪声干扰和人类或自然灾害的脉冲干扰,选择研究具有脉冲的随机模型更有实际意义。首先从问题出发逐渐引入并建立模型,然后构建一个无脉冲的等价模型来证明此模型正解的存在唯一性,接着给出两种群持久和灭绝的条件,最后用数值模拟将模型应用于生物入侵,验证理论的合理性。

关键词:捕食者-食饵;生物入侵;随机微分方程;持久与灭绝;脉冲;数值模拟

中图分类号:O175

文献标志码:A

文章编号:1672-3767(2018)06-0055-10

DOI: 10.16452/j.cnki.sdkjzk.2018.06.007

Analysis of A Stochastic Biological Invasion Model with Impulses

WANG Hongfei, HU Zhixing

(School of Mathematics and Physics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 10083, China)

Abstract: Biological invasion is a special type of predation in nature. In fact, it is inevitable for the population relationship between predators and preys to be influenced by the interference of white noise in the environment and of the impulse of human activities or natural disasters. In this paper, we studied a stochastic predator-prey model with impulses. First, we introduced and established the model based on the problem. Second, we proved the existence and uniqueness of the positive solution by constructing an equivalent model without impulses. Third, we obtained the sufficient conditions for the permanence and extinction of the two populations. Finally, we applied this model to biological invasion through numerical simulations and verified its reasonability.

Key words: predator-prey; biological invasion; stochastic differential equation; persistence and extinction; impulse; numerical simulation

1 模型介绍

生物入侵是指某种生物从外地自然传入或人为引种后成为野生状态,并对本地生态系统造成一定危害的现象。本研究从问题出发,根据生物入侵的特点建立所需的随机模型并进一步研究模型的性质。

自然界中,物种之间的关系始终受到白噪声的干扰。因此,很多学者在经典的捕食者食饵模型即 Lot-

收稿日期:2017-11-17

基金项目:国家自然科学基金项目(61174209, 11471034)

作者简介:王红飞(1991—),男,河南商丘人,硕士研究生,主要从事生物数学、随机微分方程方面研究。

胡志兴(1962—),男,陕西汉中,教授,博士,主要从事非线性动力系统与混沌、生物数学方面的研究,本文通信作者。E-mail: huzhixing@ustb.edu.cn

ka-Volterra 模型中加入白噪声^[1-4],得到

$$\begin{cases} dx(t) = x(t)(a_1 - b_1x(t) - c_1y(t))dt + \sigma_1x(t)dB_1(t), \\ dy(t) = y(t)(a_2 - b_2y(t) - c_2x(t))dt + \sigma_2y(t)dB_2(t). \end{cases}$$

其中, $x(t)$ 是食饵的种群密度, $y(t)$ 是捕食者的种群密度, b_i, c_i, σ_i 均为非负常数, $B_i(t)$ 为标准的布朗运动。

在 Lotka-Volterra 模型之后, Leslie 对其进行改进^[5],得到

$$\begin{cases} dx(t) = \{x(t)(a_1 - b_1x(t)) - p(x)y(t)\}dt, \\ dy(t) = y(t)\left(a_2 - b_2\frac{y(t)}{x(t)}\right)dt. \end{cases}$$

在食饵增长中, $p(x)$ 反映单位时间里每个捕食者吃掉的食饵数量, 不仅与食饵的数量有关, 还与捕食者的捕食能力有关, 称为捕食者对食饵的功能性反应。这个模型假设捕食者在环境中的最大容量与食饵的数量成正比例, 捕食者的增长是关于 $y(t)$ 的逻辑斯蒂增长方程, 其固有增长率为 a_2 , 环境最大容纳量为 $a_2x(t)/b_2$ 。

将 Leslie 模型中的 $p(x)$ 取 $c_1x(t)$, 并加入随机项, 有

$$\begin{cases} dx(t) = x(t)(a_1 - b_1x(t) - c_1y(t))dt + \sigma_1x(t)dB_1(t), \\ dy(t) = y(t)\left(a_2 - b_2\frac{y(t)}{x(t)}\right)dt + \sigma_2y(t)dB_2(t). \end{cases}$$

此模型中, 食饵的变化与自身一次项呈正相关, 与自身二次项和交叉项呈负相关, 此食饵可看作食物链较低端的物种; 捕食者的变化与自身成逻辑回归关系, 并且其最大环境容纳量受食饵数量的限制, 此捕食者可看作以一种食饵为食的捕食者。综上所述, 可运用该模型来研究生物入侵。一般情况下, 模型中的参数是受时间影响的, 例如有些物种的数量变化率就随季节不同而变化, 故模型可变为

$$\begin{cases} dx(t) = x(t)(a_1(t) - b_1(t)x(t) - c_1(t)y(t))dt + \sigma_1(t)x(t)dB_1(t), \\ dy(t) = y(t)\left(a_2(t) - b_2(t)\frac{y(t)}{x(t)}\right)dt + \sigma_2(t)y(t)dB_2(t). \end{cases}$$

进一步考虑现实生活, 物种数量会受到来自自然或人类社会的其他影响, 比如火山爆发、瘟疫或人类突然的大量捕捞等, 这些干扰不是白噪声的随机干扰所能涵盖的。因此, 有必要在模型中加入脉冲项^[6]

$$\begin{cases} dx(t) = x(t)(a_1(t) - b_1(t)x(t) - c_1(t)y(t))dt + \sigma_1(t)x(t)dB_1(t) \\ dy(t) = y(t)\left(a_2(t) - b_2(t)\frac{y(t)}{x(t)}\right)dt + \sigma_2(t)y(t)dB_2(t) \end{cases} \Bigg\} t \neq t_k, \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} x(t_k^+) - x(t_k) = \delta_{1k}x(t_k), \\ y(t_k^+) - y(t_k) = \delta_{2k}x(t_k). \end{cases} \Bigg\} t = t_k, \quad k = 1, 2, \dots.$$

其中, $a_i(t), b_i(t), \sigma_i(t) (i = 1, 2), c_1(t)$ 均是正的有界连续 T 周期函数, 并满足

$$0 < t_1 < t_2 < t_3 \dots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty.$$

考虑到是生物模型, 故仅需研究方程的正解。因此可做下面限制:

$$1 + \delta_{ik} > 0, \quad i = 1, 2; \quad k = 1, 2, 3, \dots.$$

而且, $\delta_{ik} > 0$ 是物种数量突然增多, 代表着对物种的“种植”, $\delta_{ik} < 0$ 是物种数量突然减少, 代表着对物种的“收割”。

此模型的环境干扰有两种: 白噪声干扰和脉冲干扰。白噪声干扰使物种连续地变化, 而脉冲干扰使物种离散地变化。

此外, 这里假定存在正整数 p , 使得

$$t_{k+p} = t_k + T, \quad \delta_{i(k+p)} = \delta_{ik}, \quad k \in \mathbf{Z}^+.$$

不失一般性, 假设

$$[0, T) \cap \{t_k, k \in \mathbf{Z}\} = \{t_1, t_2, \dots, t_p\}.$$

2 系统正解存在唯一性

定义 1^[7] 考虑一个带有脉冲的随机微分方程

$$\begin{cases} dx(t) = F(t, x(t))dt + G(t, x(t))dB(t), & t \neq t_k, t > 0, \\ x(t_k^+) - x(t_k) = \delta_k x(t_k), & t = t_k, k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2.1)$$

初值 $x(0) = x_0 \in \mathbf{R}^n$, 若存在 $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$, 满足:

1) $\mathbf{x}(t)$ 是 \mathfrak{F}_t 适应的并且在 $(0, t_1)$ 和 $(t_k, t_{k+1}), k \in \mathbf{N}^+$ 上都连续, 而且 $F(t, \mathbf{x}(t)) \in L^1(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^n)$, $G(t, \mathbf{x}(t)) \in L^2(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^n)$. 其中若有 $f(t) \in L^k(\mathbf{R}_+; \mathbf{R}^n)$, 则

$$\int_0^T |f(t)|^k dt < \infty \quad \text{a. s.} \quad \forall T > 0.$$

2) 对每一个 $t_k, k \in \mathbf{N}, x(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} x(t)$ 和 $x(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} x(t)$ 存在, 而且满足 $x(t_k) = x(t_k^-)$ a. s.

3) 对几乎每个 $t \in \mathbf{R}_+ \setminus t_k, \mathbf{x}(t)$ 满足与(2.1)等价的积分方程, 并满足 $t = t_k, k \in \mathbf{N}$ a. s. 时的脉冲条件, 则 $\mathbf{x}(t)$ 是系统(2.1)的解。

定理 2.1^[8] 对任意初值 $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}_+^2$, 系统(1.1)有唯一全局正解 $(\mathbf{x}(t), y(t))$ 几乎处处成立。

证明: 首先, 考虑如下无脉冲项模型

$$\begin{cases} dy_1(t) = y_1(t) \left(a_1(t) + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{1j}) - b_1(t)A_1 y_1(t) - c_1(t)A_2 y_2(t) \right) dt + \sigma_1(t) y_1 dB_1(t), \\ dy_2(t) = y_2(t) \left(a_2(t) + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{2j}) - b_2(t) \frac{A_2 y_2(t)}{A_1 y_1(t)} \right) dt + \sigma_2(t) y_2(t) dB_2(t). \end{cases} \quad (2.2)$$

其中, $A_i(t) = \prod_{j=1}^p (1 + \delta_{ij})^{-\frac{t}{T}} \prod_{0 \leq t_k < t} (1 + \delta_{ik}), i = 1, 2$.

下面证明 $A_i(t)$ 均是 T -周期连续函数。

$$\frac{A_i(t+T)}{A_i(t)} = \frac{\prod_{j=1}^p (1 + \delta_{ij})^{-\frac{t+T}{T}} \prod_{0 \leq t_k < t+T} (1 + \delta_{ik})}{\prod_{j=1}^p (1 + \delta_{ij})^{-\frac{t}{T}} \prod_{0 \leq t_k < t} (1 + \delta_{ik})} = \prod_{j=1}^p (1 + \delta_{ij})^{-1} \prod_{t \leq t_k < t+T} (1 + \delta_{ik}).$$

对于任意 t , 存在整数 n , 使得 $nT < t < (n+1)T$.

由 $t_{k+p} = t_k + T, \delta_{i, k+p} = \delta_{ik}$, 得

$$t_{k+np} = t_{k+(n-1)p} + T = \dots = t_k + nT, \delta_{i, k+np} = \delta_{i, k+(n-1)p} = \dots = \delta_{ik}. \quad (2.3)$$

由 $[0, T) \cap \{t_k\} = \{t_1, t_2, \dots, t_p\}$, 存在 $l \in \{1, 2, \dots, p\}$, 使得

$$\begin{aligned} t_{l+np}, t_{l+1+np}, \dots, t_{p+np} &\in [t, (n+1)T), \\ t_{1+(n+1)p}, t_{2+(n+1)p}, \dots, t_{l-1+(n+1)p} &\in [(n+1)T, t+T). \end{aligned} \quad (2.4)$$

由式(2.3), (2.4)得

$$\begin{aligned} \prod_{t \leq t_k < t+T} (1 + \delta_{ik}) &= \prod_{t \leq t_k < (n+1)T} (1 + \delta_{ik}) \prod_{(n+1)T \leq t_k < t+T} (1 + \delta_{ik}) \\ &= \prod_{k=l+np}^{p+np} (1 + \delta_{ik}) \prod_{k=1+(n+1)p}^{l-1+(n+1)p} (1 + \delta_{ik}) \\ &= \prod_{k=l}^p (1 + \delta_{ik}) \prod_{k=1}^{l-1} (1 + \delta_{ik}) = \prod_{k=1}^p (1 + \delta_{ik}) \end{aligned}$$

故

$$\frac{A_i(t+T)}{A_i(t)} = \prod_{j=1}^p (1 + \delta_{ij})^{-1} \prod_{t \leq t_k < t+T} (1 + \delta_{ik}) = \prod_{j=1}^p (1 + \delta_{ij})^{-1} \prod_{k=1}^p (1 + \delta_{ik}) = 1.$$

$A_i(t)$ 均是 T -周期连续函数,证毕。

然后令 $x(t) = A_1(t)y_1(t)$, $y(t) = A_2(t)y_2(t)$ 。则易知 $x(t), y(t)$ 在 $t \in (t_k, t_{k+1})$ 上均连续, $k = 0, 1, 2, \dots, t_0 = 0$ 。那么当 $t \in (t_k, t_{k+1})$ 时,有

$$\begin{aligned} dx(t) &= y_1(t)dA_1(t) + A_1(t)dy_1(t) \\ &= \left(-\frac{x(t)}{T}\right) \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{1j})dt + \sigma_1(t)x(t)dB_1(t) \\ &\quad + x(t)\left(a_1(t) + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{1j}) - b_1(t)x(t) - c_1(t)y(t)\right)dt \\ &= x(t)(a_1(t) - b_1(t)x(t) - c_1(t)y(t))dt + \sigma_1(t)x(t)dB_1(t)。 \end{aligned}$$

且有

$$\begin{aligned} x(t_k^+) &= \lim_{t \rightarrow t_k^+} A_1(t)y_1(t) = \prod_{j=1}^p (1 + \delta_{1j})^{-\frac{t_k}{T}} \prod_{0 \leq t_j \leq t_k} (1 + \delta_{1j})y_1(t_k) = (1 + \delta_{1k})x(t_k)。 \\ x(t_k^-) &= \lim_{t \rightarrow t_k^-} A_1(t)y_1(t) = \prod_{j=1}^p (1 + \delta_{1j})^{-\frac{t_k}{T}} \prod_{0 \leq t_j < t_k} (1 + \delta_{1j})y_1(t_k) = x(t_k)。 \end{aligned}$$

同理, $y(t)$ 在 $t \in (t_k, t_{k+1})$ 满足

$$dy(t) = y(t)\left(a_2(t) - b_2(t)\frac{y(t)}{x(t)}\right)dt + \sigma_2(t)y(t)dB_2(t)。$$

而且

$$y(t_k^+) = (1 + \delta_{2k})y(t_k), y(t_k^-) = y(t_k)。$$

综上所述, $(x(t), y(t))$ 是满足系统(1.1)的解,即系统(1.1)存在解 $(x(t), y(t))$ 。

最后,证明系统(1.1)解的非负唯一性^[9]。

取 $(u(t), v(t))$, 满足

$$x(t) = e^{u(t)}, y(t) = e^{v(t)}。$$

则在 $t \in [0, t_1]$ 上对 $x(t), y(t)$ 运用 Itô 公式得

$$\begin{cases} du(t) = \left(a_1(t) - b_1(t)x(t) - c_1(t)y(t) - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)dt + \sigma_1(t)dB_1(t), \\ dv(t) = \left(a_2(t) - b_2(t)\frac{y(t)}{x(t)} - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)dt + \sigma_2(t)dB_2(t), \\ (u(t), v(t)) = (\ln x_0, \ln y_0)。 \end{cases}$$

易知上面方程满足利普希茨条件,存在唯一的解 $(u(t), v(t))$ 。而由于 $x(t) = e^{u(t)}, y(t) = e^{v(t)}$, 则 $(x(t), y(t))$ 为系统(1.1)在 $t \in [0, t_1]$ 上的唯一正解。

同样在 $t \in (t_k, t_{k+1}] (k = 1, 2, \dots)$ 时,运用 Itô 公式得

$$\begin{cases} du(t) = \left(a_1(t) - b_1(t)x(t) - c_1(t)y(t) - \frac{1}{2}\sigma_1^2\right)dt + \sigma_1(t)dB_1(t), \\ dv(t) = \left(a_2(t) - b_2(t)\frac{y(t)}{x(t)} - \frac{1}{2}\sigma_2^2\right)dt + \sigma_2(t)dB_2(t)。 \end{cases}$$

初值 $(u(t), v(t)) = (\ln x(t_k^+), \ln y(t_k^+))$, 其中

$$x(t_k^+) = (1 + \delta_{1k})x(t_k), y(t_k^+) = (1 + \delta_{2k})y(t_k)。$$

同样,上面方程满足利普希茨条件,存在唯一的解 $(u(t), v(t))$ 。则 $(x(t), y(t))$ 为系统(1.1)在 $t \in (t_k, t_{k+1}] (k = 1, 2, \dots)$ 上的唯一正解。

定理证明完毕。

3 灭绝与持久的条件

为了后面分析的方便,此处做一些记号。若 $f(t)$ 是可积的,定义

$$\langle f(x) \rangle_t = \frac{1}{t} \int_0^t f(x) dx.$$

若 $f(t)$ 是有界的,定义

$$f^u = \sup_{t \rightarrow \infty} f(t), \quad f^l = \inf_{t \rightarrow \infty} f(t).$$

定义 3 若 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ a. s. 成立,则 $x(t)$ 是灭绝的。

若 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds > 0$ a. s. 成立,则 $x(t)$ 在其均值上是持久的。

定理 3.1 若满足

$$\left\langle a_1(t) - \frac{\sigma_1^2(t)}{2} \right\rangle_T + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{1j}) < 0, \quad \left\langle a_2(t) - \frac{\sigma_2^2(t)}{2} \right\rangle_T + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{2j}) < 0,$$

则系统(1.1)中的两种群最终将灭绝。

证明:对于系统(2.2),运用 Itô 公式有

$$\begin{aligned} d \ln y_1 &= \left(a_1(t) - \frac{\sigma_1^2(t)}{2} + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{1j}) - b_1(t)A_1 y_1 - c_1(t)A_2 y_2 \right) dt + \sigma_1(t) dB_1(t) \\ &\leq \left(a_1(t) - \frac{\sigma_1^2(t)}{2} + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{1j}) \right) dt + \sigma_1(t) dB_1(t). \end{aligned}$$

两边同时积分并除以 t ,有

$$\frac{\ln y_1(t) - \ln y_1(0)}{t} \leq \frac{1}{t} \int_0^t \left(a_1(s) - \frac{\sigma_1^2(s)}{2} + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{1j}) \right) ds + \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_1(s) dB_1(s).$$

设 $M_i(t) = \int_0^t \sigma_i^2(s) dB_i(s), i = 1, 2$ 。则 $M_i(t)$ 是一个局部的鞅^[10-11],其二次方差为

$$\langle M_i, M_i \rangle_t = \int_0^t \sigma_i^2(s) ds \leq (\sigma_i^2)^u t.$$

由鞅的强大数定律得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M_i(t)}{t} = 0 \quad \text{a. s.}$$

由 $a_1(t), \sigma_1^2(t)$ 的周期性,有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left(a_1(s) - \frac{\sigma_1^2(s)}{2} \right) ds = \frac{1}{T} \int_0^T \left(a_1(s) - \frac{\sigma_1^2(s)}{2} \right) ds.$$

因此有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln y_1(t)}{t} \leq \left\langle a_1(t) - \frac{\sigma_1^2(t)}{2} \right\rangle_T + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{1j}) < 0 \quad \text{a. s.}$$

由此可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = 0$ a. s.

同理可证在 $\left\langle a_2(t) - \frac{\sigma_2^2(t)}{2} \right\rangle_T + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{2j}) < 0$ 条件下,有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0 \quad \text{a. s.}$$

定理 3.2 若满足

$$\left\langle a_1(t) - \frac{\sigma_1^2(t)}{2} \right\rangle_T + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{1j}) > 0, \quad \left\langle a_2(t) - \frac{\sigma_2^2(t)}{2} \right\rangle_T + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{2j}) < 0,$$

则在系统(1.1)中,捕食者最终将灭绝,食饵数量最终将持久。

证明:由定理 3.1 可知:

在 $\left\langle a_2(t) - \frac{\sigma_2^2(t)}{2} \right\rangle_T + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{2j}) < 0$ 条件下,有 $\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0$ a. s.

捕食者最终将灭绝,下面证明食饵数量的持久性。

对于系统(2.2),运用 Itô 公式有

$$d\ln y_1 = \left(a_1(t) - \frac{\sigma_1^2(t)}{2} + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{1j}) - b_1(t)A_1 y_1 - c_1(t)A_2 y_2 \right) dt + \sigma_1(t) dB_1(t).$$

等式两边同时积分并除以 t 有

$$\frac{\ln y_1(t) - \ln y_1(0)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t \left(a_1(s) - \frac{\sigma_1^2(s)}{2} \right) ds + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{1j}) - \frac{1}{t} \int_0^t b_1(s)A_1(s)y_1(s) ds - \frac{1}{t} \int_0^t (c_1(s)A_2(s)y_2(s)) ds + \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_1(s) dB_1(s). \tag{3.1}$$

由定理 3.1 得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left(a_1(s) - \frac{\sigma_1^2(s)}{2} \right) ds = \frac{1}{T} \int_0^T \left(a_1(s) - \frac{\sigma_1^2(s)}{2} \right) ds.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \sigma_1(s) dB_1(s)}{t} = 0 \quad \text{a. s.}$$

由系统(2.1)可知 $y_1(t)$ 在 t 上是有界的泛函, 及 $\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = 0$ a. s. 则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln y_1(t) - \ln y_1(0)}{t} = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t (c_1(s)A_2(s)y_2(s)) ds = 0.$$

那么, 方程(3.1)变为

$$0 = \frac{1}{T} \int_0^T \left(a_1(s) - \frac{\sigma_1^2(s)}{2} \right) ds + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{1j}) - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t b_1(s)A_1(s)y_1(s) ds.$$

整理可得

$$b_1^a \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds \geq \frac{1}{T} \int_0^T \left(a_1(s) - \frac{\sigma_1^2(s)}{2} \right) ds + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{1j}) > 0.$$

可知食饵数量持久, 所证成立。

定理 3.3 若满足

$$\left\langle a_1(t) - \frac{\sigma_1^2(t)}{2} \right\rangle_T + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{1j}) > 0, \left\langle a_2(t) - \frac{\sigma_2^2(t)}{2} \right\rangle_T + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{2j}) > 0,$$

则在系统(1.1)中, 捕食者与食饵数量最终将持久。

证明: 在此定理条件下也可得定理 3.2 中的(3.1)式, 对 t 取极限整理得:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left(a_1(s) - \frac{\sigma_1^2(s)}{2} \right) ds + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{1j}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t b_1(s)x(s) ds + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t c_1(s)y(s) ds.$$

则

$$b_1^a \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds + c_1^a \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds \geq \frac{1}{T} \int_0^T \left(a_1(s) - \frac{\sigma_1^2(s)}{2} \right) ds + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{1j}) > 0.$$

由于 $x(t), y(t)$ 均为非负值, 故二者至少有一方种群密度持久。

假设存在 t_0 使得 $x(t_0) = 0$, 由系统(1.1)知当 $t > t_0$ 时必有 $y(t) = 0$, 两种群均灭绝, 与结论有矛盾, 故对所有 $t > 0$ 都有 $x(t) > 0$, 那么种群密度 $x(t)$ 将持久。

另一方面, 对于系统(2.2)运用 Itô 公式, 有

$$d\ln y_2 = \left(a_2(t) - \frac{\sigma_2^2(t)}{2} + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{2j}) - b_1(t) \frac{A_2 y_2}{A_1 y_1} \right) dt + \sigma_2(t) dB_2(t).$$

等式两边同时积分并除以 t , 有

$$\frac{\ln y_2(t) - \ln y_2(0)}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t \left(a_2(s) - \frac{\sigma_2^2(s)}{2} \right) ds + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{2j}) - \frac{1}{t} \int_0^t b_2(t) \frac{A_2 y_2}{A_1 y_1} ds + \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_2(s) dB_2(s).$$

对 t 取极限整理有

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left(a_2(s) - \frac{\sigma_2^2(s)}{2} \right) ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t b_2(t) \frac{y(t)}{x(t)} ds - \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{2j})。$$

那么

$$b_2^u \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{y(t)}{x(t)} ds > \frac{1}{T} \int_0^T \left(a_2(s) - \frac{\sigma_2^2(s)}{2} \right) ds + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{2j}) > 0。$$

由于对所有 $t > 0$ 都有 $x(t) > 0$ ，且 $x(t)$ 持久，则 $x(t)$ 必有下界 $x_0 > 0$ ，则

$$\frac{b_2^u}{x_0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds \geq b_2^u \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{y(s)}{x(s)} ds > 0。$$

故有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds > 0$ ，即种群密度 $y(t)$ 也持久。

4 数值模拟和结论

为验证前面的分析，对系统(1.1)进行数值模拟。

此模型可应用于生物入侵的例子。例如澳洲的兔灾，1859年，25只欧洲兔子被带入澳洲供人打猎，但后来兔子没有天敌，却有丰富的青草，繁殖过快，给生态带来了危害。这时人们希望兔子种群能灭绝，青草被保护起来。那么模型中的捕食者就是兔子，食饵是青草，环境干扰是白噪声干扰，而脉冲干扰就是人类的干预。为了实现研究目的，由定理3.2可知，可通过人为干预，大量捕杀兔子，设法满足定理3.2中的条件，则最终兔子会灭绝，且青草会持久生存。

在人类干预之前，可看作是脉冲很小的模型，而且是适用一般的随机模型，主要是随机因素对模型的影响，不少学者已对此进行过大量研究，在此主要研究脉冲因素对生物入侵的影响。因此可取 $(x_0, y_0) = (3, 0.1)$ ， $a_1(t) = 0.35 + 0.1\sin(\pi t/3)$ ， $b_1(t) = 0.1 + 0.05\sin(\pi t/3)$ ， $c_1(t) = 0.2 + 0.2\sin(\pi t/3)$ ， $a_2(t) = 0.2 + 0.1\sin(\pi t/3)$ ， $\sigma_1(t) = \sigma_2(t) = 0.01 + 0.01\sin(\pi t/3)$ ， $b_2(t) = 0.1 + 0.1\sin(\pi t/3)$ 。则有 $n = p = 6$ 。首先看脉冲影响较小的时候，可令：

$$\delta_{1k}(t) = -0.05 + 0.05\sin(\pi k/3), \delta_{2k}(t) = 0.05\sin(\pi k/3), t_k = k。$$

式中的 -0.05 反映了环境在一定程度上受到了污染，食饵作为食物链的底层物种首当其冲，而对于入侵的捕食者来说则影响较小，故而产生两种群脉冲项的差异。模拟程序见附件1^[12]，模拟结果如图1所示。

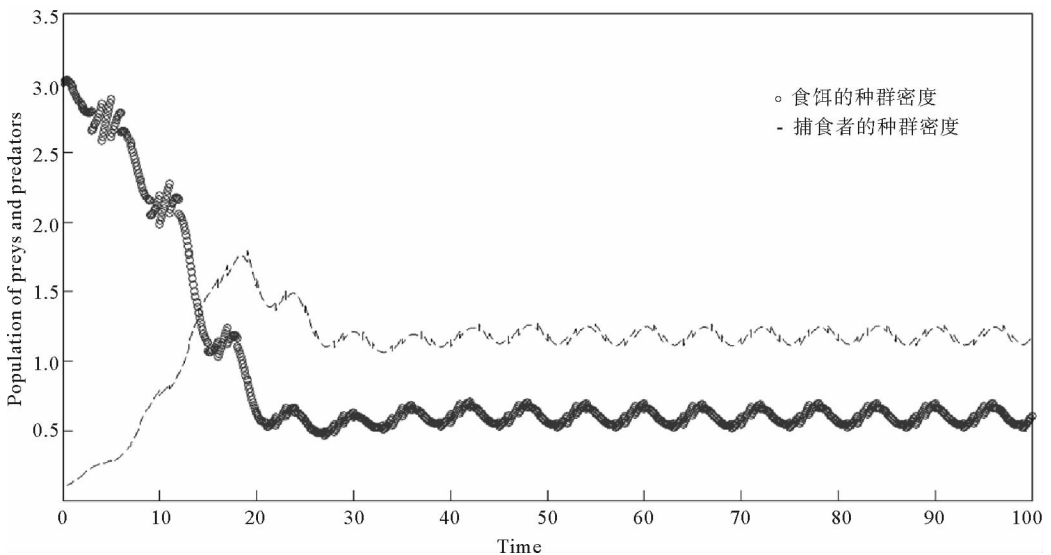


图 1 无人类干预时食饵和捕食者的种群密度变化的对比

Fig. 1 Comparison of population density changes between preys and predators without human interference

由参数计算有

$$\left\langle a_1(t) - \frac{\sigma_1^2(t)}{2} \right\rangle_T + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{1j}) = 0.345 + (-0.052) = 0.293 > 0,$$

$$\left\langle a_2(t) - \frac{\sigma_2^2(t)}{2} \right\rangle_T + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{2j}) = 0.195 + (-0.0006) = 0.1944 > 0.$$

由定理 3.3 知,两种群密度均为持久的,此结论与图 1 的结果相同。

此处食饵为植被或是食物链的低端物种,生态系统中原来必然存在一些以其为食的消费者,而此处食饵种群密度保持在正常水平的 1/6 左右,数量变化过大,长久处于此状态,生态系统必然遭到严重破坏。

研究目标是在食饵数量为正常水平的基础上,使入侵的捕食者灭绝。因此,可以改变脉冲项,脉冲项可视作人类对入侵物种的干扰,对食饵不构成干扰。考虑到实际情况更多是,只有当外来物种繁殖生长影响生态环境时,人类才会意识到物种的入侵,故有时间上的延迟,将捕食者的脉冲项修改为

$$\delta_{2k}(t) = -0.25 \times (k > 15) + 0.05 \times \sin(\pi k/3).$$

其中 $(k > 15)$ 为逻辑语言,当 $k > 15$ 时, $(k > 15) = 1$,当 $k \leq 15$ 时, $(k > 15) = 0$ 。这个脉冲项的意思是在第 16 周期时,人类开始对入侵者进行干预,干预强度为每次使其数量减少 1/4。

同样用 Matlab 得到人类干预时食饵和捕食者的种群密度变化的对比如图 2。

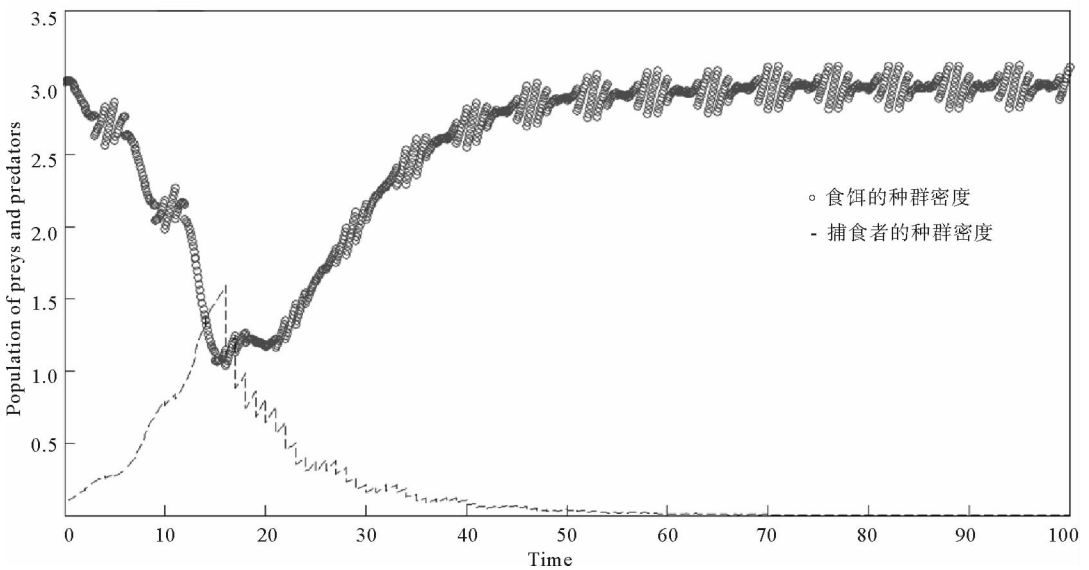


图 2 人类干预时食饵和捕食者的种群密度变化的对比

Fig. 2 Comparison of population density changes between preys and predators with human interference

由参数计算有

$$\left\langle a_1(t) - \frac{\sigma_1^2(t)}{2} \right\rangle_T + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{1j}) = 0.345 + (-0.052) = 0.293 > 0,$$

$$\left\langle a_2(t) - \frac{\sigma_2^2(t)}{2} \right\rangle_T + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^p \ln(1 + \delta_{2j}) = 0.195 + (-0.2888) = -0.0938 < 0.$$

则由定理 3.2 知,此模型捕食者最终将灭绝,食饵数量最终将持久,与图 2 的结果相符。

图 2 为在第 16 周期人类对入侵生物进行干预,在 16 周期前,食饵种群密度最小值接近 1,为正常密度的 1/3 左右。考虑到生态系统的自我恢复能力,食饵种群密度最小值会有一个临界比例值,而此临界值会随着生态系统复杂度的不同而不同。假设一个生态系统的此临界值为 P_0 。通过调试 Matlab 可得表 1 数据值。

表 1 人类不同时间干预时食饵种群的最低临界值

Tab. 1 Minimum critical value of prey population with human interference at different time

人类干预始时间 k_1 /周期	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
干预时食饵种群密度 s	2.820 0	2.171 2	1.773 5	1.366 3	1.141 4	1.148 6	1.240 7	1.172 7	0.869 3	0.637 0
所占正常值比例 P	0.760 667	0.723 733	0.591 167	0.455 433	0.380 467	0.382 867	0.413 567	0.390 900	0.289 767	0.213 330

再通过临界值 P_0 与 P 的比较得出一个临界周期 k_0 。因此,人类要在生物入侵后物种成长的第 k_0 周期前及时干预,才能保证生态系统的可逆恢复。

参考文献:

[1]ZU L,JIANG D,GE B,et al. Periodic solution for a non-autonomous Lotka-Volterra predator-prey model with random perturbation[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications,2015,430(1):428-437.

[2]RUDNICKI R. Long-time behaviour of a stochastic prey-predator model[J]. Stochastic Processes & Their Applications, 2003,108(1):93-107.

[3]MENG X. Stability of a novel stochastic epidemic model with double epidemic hypothesis[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing,2010,217:506-515.

[4]冯涛,孟新柱. 一类捕食者染病的捕食者-食饵系统的随机动力学行为[J]. 山东科技大学学报(自然科学版),2017,36(1):99-110.

FENG Tao,MENG Xinzhu. Stochastic dynamics of a predator-prey system with disease in predator[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science),2017,36(1):99-110.

[5]LESLIE P H. Some further notes on the use of matrices in population mathematics[J]. Biometrika,1948,35:213-245.

[6]ZHANG S Q,MENG X Z,FENG T,et al. Dynamics analysis and numerical simulations of a stochastic non-autonomous predator-prey system with impulsive effects[J]. Nonlinear Analysis Hybrid Systems,2017,26:17-37.

[7]LIU M,WANG K. On a stochastic logistic equation with impulsive perturbations[J]. Computers & Mathematics with Applications,2012,63(5):871-886.

[8]ZUO W J,JIANG D Q. Periodic solutions for a stochastic non-autonomous Holling-Tanner predator-prey system with impulses[J]. Nonlinear Analysis Hybrid Systems,2016,22:191-201.

[9]LI X,MAO X. Population dynamical behavior of non-autonomous Lotka-Volterra competitive system with random perturbation[J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems,2012,24(2):523-545.

[10]龚光鲁. 随机微分方程及其应用摘要[M]. 北京:清华大学出版社,2008:32-98.

[11]KSENDAL B. 随机微分方程导论与应用[M]. 刘金山,吴付科,译. 北京:科学出版社,2012:17-60.

[12]LINDFIELD G,PENNY J. 数值方法(MATLAB版)[M]. 李君,任明明,译. 北京:机械工业出版社,2016:120-260.

(责任编辑:傅游)

附件 1: Matlab 程序

```

x=[3,0.1]; %分别是两种群的初值.
y=[];
s=[];
for k=1:100 %分段模拟.
pi=3.14159;
fv=@(t,x)[x(1)*(0.35+0.1*sin(pi*t/3)-(0.1+0.05*sin(pi*t/3))*x(1)-(0.2+0.2*sin
(pi*t/3))*x(2))+0.01+0.01*sin(pi*t/3))*x(1)*randn;
x(2)*(0.2+0.1*sin(pi*t/3)-(0.1+0.1*sin(pi*t/3))*x(2)/x(1))+0.01+0.01*sin(pi*
t/3))*x(2)*randn]; %微分方程组的信息.
initx=[x(end,1),x(end,2)]'; %计入模拟的初值.
options=odeset('RelTol',0.05); %设置精确值.
[t x]=ode23(fv,[1*(k-1),1*k],initx,options); %模拟.
y=[y;x]; %分段模拟的信息整合到一起.
s=[s;t]; %同上.
x(end,:)=[(0.95+0.05*sin(pi*k/3))*x(end,1),(1+0.05*sin(pi*k/3))*x(end,2)];
%更新每一次模拟的初值,加入脉冲.
%x(end,:)=[(0.95+0.05*sin(pi*k/3))*x(end,1),(1*(k<16)+0.75*(k>15)+0.05*sin
(pi*k/3))*x(end,2)]; %同上,脉冲较强,二者选一.
end
plot(s,y(:,1),'o',s,y(:,2),'k--') %画图.
xlabel('Time'),ylabel('Population of prey and predator')

```