

VTI 介质修正声学近似 qP 波波动方程与模拟

梁 锴, 陈浩然, 孙上饶

(中国石油大学(华东)地球科学与技术学院, 山东 青岛 266580)

摘要:各向异性介质中纵横波通常耦合在一起传播, 纵横波解耦是地震波传播理论研究的重要内容。经典的声学近似通过设置垂向 qSV 波速度 V_{s0} 为 0 来解耦 qP 波场, 但是存在退化 qSV 波等问题。本研究将垂向 qSV 波速度 V_{s0} 考虑成波数 k_x, k_z 和各向异性参数 ϵ, δ 的函数, 对声学近似进行修正, 推导了 VTI 介质修正声学近似 qP 波频散关系和波动方程。VTI 介质修正声学近似 qP 波波动方程包含椭圆项和非椭圆项两部分, 因此采用混合有限差分/伪谱算法进行求解, 即采用有限差分法求解椭圆项、伪谱法求解非椭圆项。频散关系分析和数值示例表明, 基于修正声学近似的 qP 波波动方程不包含退化 qSV 波, 是纯 qP 波方程, 与弹性波方程模拟结果吻合较好, 且具有较高精度; 该方程在 $\epsilon \geq \delta$ 和 $\epsilon < \delta$ 的 VTI 介质中均是稳定的, 并且精度高于声学近似模拟结果。

关键词:修正声学近似; 波动方程; 纯 qP 波; 混合有限差分/伪谱法; VTI 介质

中图分类号: P631

文献标志码: A

Wave equation and numerical simulation for qP wave in VTI media with modified acoustic approximation

LIANG Kai, CHEN Haoran, SUN Shangrao

(School of Geosciences, China University of Petroleum (East China), Qingdao 266580, China)

Abstract: In anisotropic media, qP and qS waves are usually coupled to propagate together. The decoupling of qP and qS waves is an important part of the theoretical study of seismic wave propagation. The classic acoustic approximation decouples the qP wavefield by setting the vertical velocity V_{s0} of qSV wave as zero, but there are problems such as degraded qSV waves. In this paper, the acoustic approximation was modified by considering the V_{s0} as a function of the wave numbers k_x, k_z and the anisotropy parameters ϵ, δ , and the dispersion relation and wave equation for qP wave in VTI media with the modified acoustic approximation were then derived. This wave equation for qP wave, containing elliptic terms and non-elliptic terms, was solved by using the hybrid finite difference/pseudo spectral method: the finite difference method for solving the elliptic terms and the pseudo spectral method for solving the non-elliptic terms. The dispersion analysis and numerical examples show that the qP wave equation with the modified acoustic approximation as a pure qP wave equation without any degenerate qSV wave is in good agreement with the simulation results of the elastic wave equation and has high accuracy. It is stable in VTI media with both $\epsilon \geq \delta$ and $\epsilon < \delta$, and more accurate than the simulated results with the acoustic approximation.

Key words: modified acoustic approximation; wave equation; pure qP wave; hybrid finite-difference/pseudo-spectral method; VTI media

各向异性介质中纵横波通常是耦合在一起传播的, 因此各向异性弹性波波场解耦在地震成像和全波形

收稿日期: 2023-04-30

基金项目: 国家自然科学基金项目(42030103, 42074162); 山东省自然科学基金项目(ZR202111200174); 中国石油大学(华东)研究生创新基金项目(22CX04014A)

作者简介: 梁 锴(1982—), 男, 湖南长沙人, 讲师, 博士, 主要从事复杂介质地震波传播理论与波场模拟的研究。

E-mail: liangkai@upc.edu.cn

反演中十分重要^[1-2]。对应具有垂直对称轴的横向各向同性(transverse isotropy with a vertical axis of symmetry, VTI)介质是实际地质条件的有效简化,得到了广泛的关注。Alkhalifah^[3]提出 VTI 介质声学近似方法,即通过设置垂向准横波(qSV 波)速度(V_{S0})为 0 来解耦 qP 波场。然而,在声学假设下,准纵波(qP 波)方程有两组共轭解,分别对应 qP 波和退化 qSV 波。后者是不需要的干扰波,并且各向异性参数 $\epsilon < \delta$ 时,该方法随着迭代次数的增加会出现严重的数值溢出现象。

为了克服退化 qSV 波的干扰以及 $\epsilon < \delta$ 时的不稳定现象,许多学者进行了各向异性介质改进或优化的纯 qP 波方程的研究^[4-11]。然而,这些方程大多含有分数阶非椭圆项,导致模拟的计算成本较高。利用有限差分(finite difference, FD)方法求解这类纯波波动方程具有高效、适应复杂介质等特点^[12],相比之下利用伪谱(pseudo-spectral, PS)法求解这类方程空间导数的精度更高^[13],但对于复杂介质则会出现严重的数值发散。为了降低计算成本、提高计算精度,有限差分和伪谱混合的正演方法^[14]以及低秩近似方法^[15]等多种数值模拟方法相继被提出。

本研究将垂向 qSV 波速度 V_{S0} 考虑成波数 k_x 、 k_z 和各向异性参数 ϵ 、 δ 的函数,推导了 VTI 介质修正声学近似 qP 波频散关系,通过傅里叶反变换得到修正声学近似的 qP 波波动方程,然后采用混合有限差分/伪谱算法实现了数值模拟,最后进行了精度和近似的频散关系分析,并给出了均匀介质模型和复杂介质模型的正演模拟数值示例。

1 VTI 介质修正声学近似 qP 波波动方程

各向异性介质的 Christoffel 方程通常用于各向异性介质弹性波相速度或频散关系表征。根据 VTI 介质 Christoffel 方程可以确定 VTI 介质 qP 波和 qSV 波精确频散关系为:

$$\omega_P^2 = 0.5 \{V_{P0}^2 [(1 + 2\epsilon)k_x^2 + k_z^2] + V_{S0}^2 (k_x^2 + k_z^2) + \sqrt{D}\}, \quad (1)$$

$$\omega_{SV}^2 = 0.5 \{V_{P0}^2 [(1 + 2\epsilon)k_x^2 + k_z^2] + V_{S0}^2 (k_x^2 + k_z^2) - \sqrt{D}\}, \quad (2)$$

$$D = \{V_{P0}^2 [(1 + 2\epsilon)k_x^2 + k_z^2] - V_{S0}^2 (k_x^2 + k_z^2)\}^2 - 8(\epsilon - \delta)k_x^2 k_z^2 V_{P0}^2 (V_{P0}^2 - V_{S0}^2). \quad (3)$$

其中: ω_P 、 ω_{SV} 分别为 qP 波、qSV 波的圆频率; $k_x = k \sin \theta$ 和 $k_z = k \cos \theta$ 分别为沿 x 和 z 方向的波数, k 为波数; θ 为传播方向与 z 轴的夹角; V_{P0} 和 V_{S0} 分别为 qP 波和 qSV 波沿 VTI 介质对称轴方向(z 轴方向)的相速度; ϵ 和 δ 为 Thomsen 参数^[16]。

针对精确频散关系表达式复杂、难以应用的问题,Alkhalifah^[3]提出了著名的声学假设近似,令 $V_{S0} = 0$ (qSV 波沿 VTI 介质对称轴相速度为 0),得到 qP 波声学近似频散关系方程:

$$\omega_{Pa}^2 = 0.5 V_{P0}^2 \left\{ (1 + 2\epsilon)k_x^2 + k_z^2 + \sqrt{[(1 + 2\epsilon)k_x^2 + k_z^2]^2 - 8(\epsilon - \delta)k_x^2 k_z^2} \right\}. \quad (4)$$

其中, ω_{Pa} 为声学假设近似 qP 波圆频率。传统声学近似频散关系形式简单、精度较高,但是对应的波动方程存在退化 qSV 波等问题。本研究对该方法进行了修正,不是令 V_{S0} 直接为 0,而是将 V_{S0} 考虑成波数 k_x 、 k_z 和各向异性参数 ϵ 、 δ 的函数。首先根据式(2)得到 V_{S0} 和 ω_{SV} 的关系为:

$$V_{S0}^2 = \frac{1}{k_x^2 + k_z^2} \{2\omega_{SV}^2 - V_{P0}^2 [(1 + 2\epsilon)k_x^2 + k_z^2] + \sqrt{D}\}. \quad (5)$$

将式(5)代入式(1)可得:

$$\omega_P^2 = V_{P0}^2 \left[(1 + 2\epsilon)k_x^2 + k_z^2 - \frac{2(\epsilon - \delta)k_x^2 k_z^2 (k_x^2 + k_z^2 - \omega_{SV}^2/V_{P0}^2)}{(k_x^2 + k_z^2)^2 + 2\epsilon k_x^4 + 2\delta k_x^2 k_z^2 - (k_x^2 + k_z^2)\omega_{SV}^2/V_{P0}^2} \right]. \quad (6)$$

将 V_{S0} 进行如下近似:

$$V_{S0}^2 \approx -\frac{2V_{P0}^2 k_x^2}{(k_x^2 + k_z^2)^4} \{(\epsilon - \delta)k_z^2 (k_x^2 + k_z^2)^2 - [k_x^4 + 2(1 + \epsilon - \delta)k_x^2 k_z^2 + k_z^4](\epsilon k_x^2 + \delta k_z^2)\}. \quad (7)$$

将式(7)代入式(5),此时 ω_{SV} 可表示为:

$$\omega_{SV}^2 = V_{P0}^2 \frac{2k_x^2 (\epsilon k_x^2 + \delta k_z^2)}{k_x^2 + k_z^2}. \quad (8)$$

将式(8)代入式(6),可以得到 VTI 修正声学近似 qP 波频散关系:

$$\omega_{\text{Pma}}^2 = V_{\text{P0}}^2 \left\{ (1 + 2\varepsilon)k_x^2 + k_z^2 - \frac{2(\varepsilon - \delta)k_x^2 k_z^2}{(k_x^2 + k_z^2)^3} [(1 - 2\varepsilon)k_x^4 + 2(1 - \delta)k_x^2 k_z^2 + k_z^4] \right\}. \quad (9)$$

其中, ω_{Pma} 为修正声学假设近似的 qP 波圆频率。

将式(9)左右两边同时乘以频率-波数域内的 qP 波波场 $\tilde{P}(k_x, k_z, \omega)$, 再通过傅里叶反变换得到 VTI 介质修正声学近似 qP 波波动方程:

$$\frac{1}{V_{\text{P0}}^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = (1 + 2\varepsilon) \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + 2(\varepsilon - \delta) F^{-1} \left\{ \frac{k_x^2 k_z^2}{(k_x^2 + k_z^2)^3} (k_x^4 F [(1 - 2\varepsilon)P] + k_x^2 k_z^2 F [2(1 - \delta)P] + k_z^4 F [P]) \right\}. \quad (10)$$

其中: $P = P(x, z, t)$ 为时空域的 qP 波波场; F, F^{-1} 分别表示傅里叶正变换和反变换。

VTI 介质修正声学近似 qP 波波动方程(10)包含椭圆项和非椭圆项两部分。当 $\varepsilon = \delta$, 即椭圆各向异性介质时, 非椭圆项为 0, 该方程退化为椭圆波动方程, 说明该方程在椭圆各向异性介质中是完全精确的。

2 混合有限差分/伪谱法正演模拟算法

对 VTI 介质修正声学近似 qP 波波动方程(10)进行数值模拟, 由于该方程包含椭圆项和非椭圆项两部分, 因此采用混合有限差分/伪谱法求解, 即椭圆项采用有限差分算法求解, 而非椭圆项包含波数 k_x, k_z 的高阶项, 不适合直接采用有限差分算法求解, 则采用伪谱法进行求解。

根据有限差分基本原理, 将空间导数和时间导数用差分近似表征为:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x^2} \left[c_0 P_{i,j} + \sum_{m=1}^M c_m (P_{i+m,j} + P_{i-m,j}) \right] = D_{xx} P, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{1}{\Delta z^2} \left[c_0 P_{i,j} + \sum_{m=1}^M c_m (P_{i,j+m} + P_{i,j-m}) \right] = D_{zz} P, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{1}{\Delta t^2} (P_{i,j}^{n+1} - 2P_{i,j}^n + P_{i,j}^{n-1}). \end{cases} \quad (11)$$

其中: D_{xx}, D_{zz} 分别表示 x 和 z 方向的空间二阶导数差分; i, j 分别表示 x 和 z 方向的空间离散坐标; n 表示时间离散坐标; $\Delta x, \Delta z$ 分别为 x 和 z 方向的采样间隔; Δt 为时间采样间隔; c_m 为二阶导数的 $2M$ 阶差分系数^[12], $c_0 = -2 \sum_{m=1}^M c_m$ 。

对 VTI 介质修正声学近似 qP 波波动方程采用混合有限差分/伪谱法求解, 最终的差分格式为:

$$P_{i,j}^{n+1} = 2P_{i,j}^n - P_{i,j}^{n-1} + V_{\text{P0}}^2 \Delta t^2 (1 + 2\varepsilon) D_{xx} P + V_{\text{P0}}^2 \Delta t^2 D_{zz} P + 2(\varepsilon - \delta) V_{\text{P0}}^2 \Delta t^2 G. \quad (12)$$

其中, G 表示用伪谱法计算的非椭圆项, 即

$$G = F^{-1} \left\{ \frac{k_x^2 k_z^2}{(k_x^2 + k_z^2)^3} (k_x^4 F [(1 - 2\varepsilon)P] + k_x^2 k_z^2 F [2(1 - \delta)P] + k_z^4 F [P]) \right\}. \quad (13)$$

3 数值示例

3.1 频散关系分析

为了验证 VTI 介质修正声学近似 qP 波波动方程的正确性和适用性, 进行近似 qP 波频散关系的精度分析。设计了两个均匀 VTI 介质模型 A 和 B, 其相同参数为 $V_{\text{P0}} = 3\ 000$ m/s, $V_{\text{S0}} = 1\ 500$ m/s, 其各向异性参数 ε, δ 不同, 如表 1 所示。其中, 模型 A 中 $\varepsilon > \delta$, 模型 B 中 $\varepsilon < \delta$ 。

表 1 模型各向异性参数

Table 1 Anisotropic parameters of the VTI model

模型	ε	δ
模型 A	0.3	0.1
模型 B	0.1	0.3

利用式(1)、式(4)和式(9)分别计算精确 qP 波频散关系 ω_P 、声学近似 qP 波频散关系 ω_{Pa} 和修正声学近似频散关系 ω_{Pma} 及其相对误差,结果如图 1 和图 2 所示。其中,图 1(a)和图 2(a)为频散关系曲线,图 1(b)和图 2(b)为相对误差曲线,蓝色实线为精确 qP 波频散关系,红色虚线为声学近似 qP 波频散关系及其误差,黑色虚线为修正声学近似频散关系及其误差。由图 1 和图 2 发现,声学近似和修正声学近似的频散关系与精确频散关系数值十分接近,本例中相对误差均小于 0.25%,说明两种近似均具有很高的精度;并且对于 $\epsilon > \delta$ 的 VTI 介质和 $\epsilon < \delta$ 的 VTI 介质,修正声学近似频散关系的最大相对误差数值以及平均相对误差数值均小于声学近似的误差,说明修正声学近似的整体精度高于声学近似的精度。

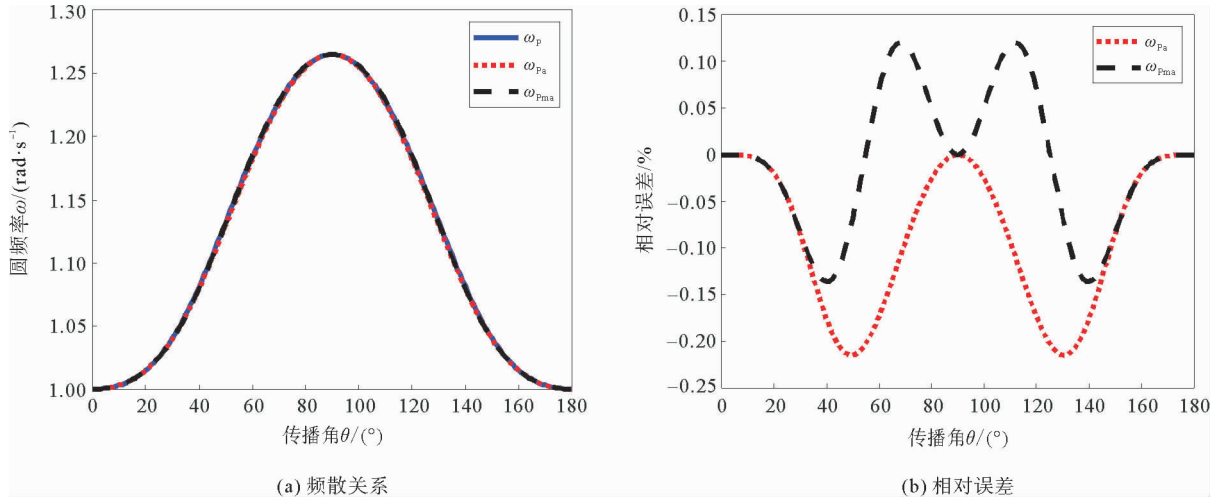


图 1 模型 A 精确和近似频散关系及其相对误差

Fig. 1 Exact and approximate dispersion relation and relative error in model A for qP wave

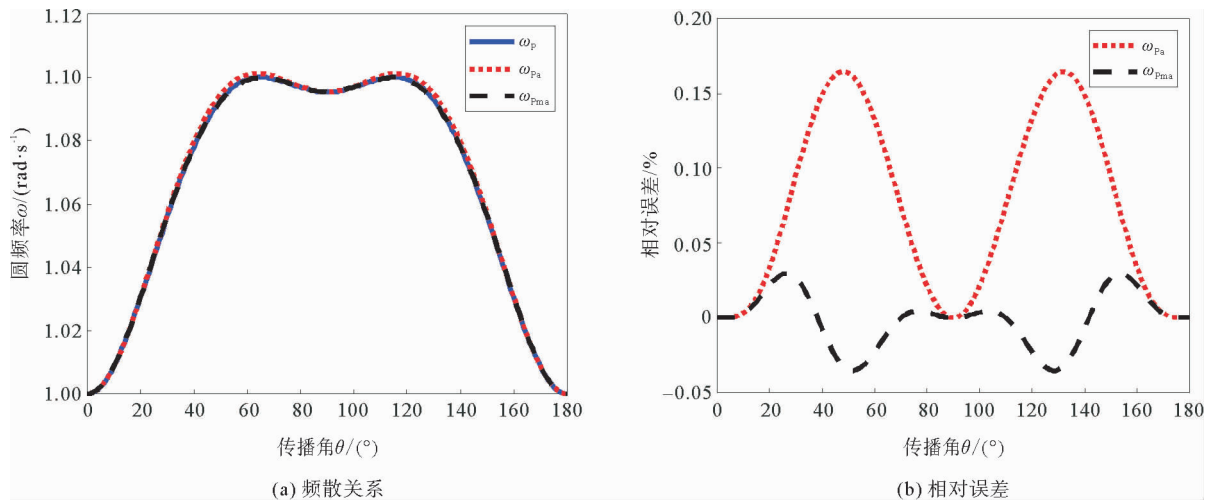


图 2 模型 B 精确和近似频散关系及其相对误差

Fig. 2 Exact and approximate dispersion relation and relative error in model B for qP wave

3.2 正演模拟

为了进行波场对比,利用有限差分法求解 VTI 介质弹性波波动方程和声学近似 qP 波波动方程,利用有限差分法和伪谱混合法求解修正声学近似 qP 波波动方程式(式(12)和式(13))。首先考虑表 1 中的两种均匀 VTI 介质模型,网格大小为 301×301 ,横向和纵向网格间距均为 10 m,采样间隔为 1 ms,震源位于模型中心,采用主频 20 Hz 的雷克子波。

波场快照如图 3 和图 4 所示,其中图 3(a)和图 4(a)为弹性波波场,图 3(b)和图 4(b)为基于声学近似的波场,图 3(c)和图 4(c)为基于修正声学近似模拟的 qP 波波场。在图 3 中,声学近似和修正声学近似模拟的 qP 波波场与弹性波模拟的 qP 波波场均吻合较好,说明两种方法均适用于 $\epsilon > \delta$ 的模型。但是声学近似模拟的波场中存在退化的 qSV 波波场,说明声学近似模拟的波场不是纯 qP 波;修正声学近似模拟的波场中不存在退化的 qSV 波波场,说明修正声学近似模拟的波场是纯 qP 波。在图 4 中,声学近似模拟的波场存在数值溢出,使模拟的 qP 波波场淹没在数值溢出的干扰中,即声学近似无法适用于 $\epsilon < \delta$ 的模型。而修正声学近似模拟的 qP 波波场与弹性波模拟的 qP 波波场也吻合较好,且不存在数值溢出现象。该数值示例表明修正声学近似 qP 波波动方程刻画了纯 qP 波波场,且既适用于 $\epsilon \geq \delta$ 的 VTI 介质,也适用于 $\epsilon < \delta$ 的 VTI 介质。

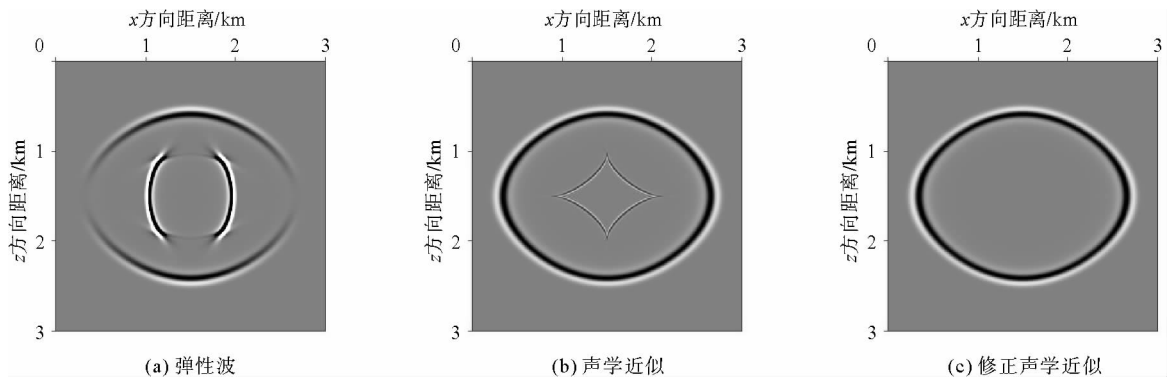


图 3 模型 A 的波场快照

Fig. 3 Snapshots in model A

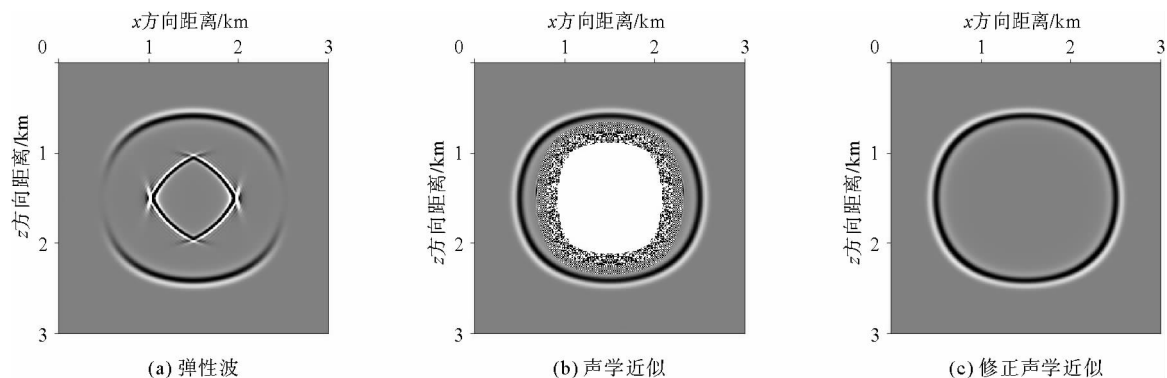


图 4 模型 B 的波场快照

Fig. 4 Snapshots in model B

网格点(130,120)处的地震记录如图 5 所示,其中图 5(a)为模型 A 模拟结果,图 5(b)为模型 B 模拟结果,蓝色实线为弹性波记录,红色点虚线为声学近似记录,黑色虚线为修正声学近似记录。由图 5 可见,弹性波记录中包含 qP 波和 qSV 波,声学近似记录中包含 qP 波和退化 qSV 波,而修正声学近似记录中只包含 qP 波,并且与弹性波模拟中的 qP 波记录吻合较好。

将本研究方法应用于复杂介质模型(BP 模型)。网格大小为 601×601 ,横向和纵向网格间距均为 10 m,采样间隔为 1 ms。震源位于图 6 星号所示处,采用主频 20 Hz 的雷克子波。BP 模型如图 6 所示,图 6(a)为 V_{P0} 模型,图 6(b)为 ϵ 模型,图 6(c)为 δ 模型。波场快照如图 7 所示,其中图 7(a)为弹性波波场,图 7(b)为声学近似模拟的波场,图 7(c)为基于修正声学近似模拟的 qP 波波场。图 7 表明,复杂介质中声学近似模拟的 qP 波波场与弹性波模拟的 qP 波波场运动学规律一致,波前面吻合较好,但是声学近似模拟波场中可能

存在退化 qSV 波(图 7(b)中白色箭头所示),会增加纯 qP 波处理和解释的难度。而修正声学近似模拟的 qP 波波场的运动学规律与弹性波模拟的 qP 波波场一致,二者波前面吻合较好,且该方法模拟结果中不存在退化 qSV 波,说明该方法在复杂 VTI 介质中也能很好地实现纯 qP 波正演模拟。图 8 为震源深度处的单炮记录,其中图 8(a)为弹性波记录,图 8(b)为声学近似记录,图 8(c)为修正声学近似记录。由图 8 可以看出,弹性波记录中 qSV 波比较强;声学近似记录中 qP 波比较明显,但是仍然存在退化 qSV 波的干扰;修正声学近似记录中只有 qP 波,并且与弹性波模拟中的 qP 波记录基本一致。

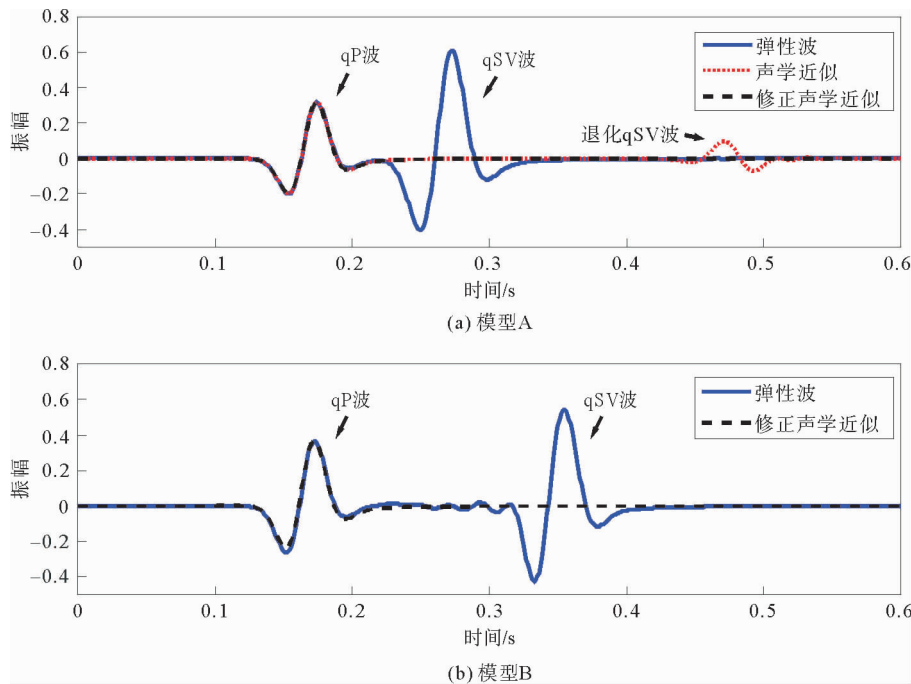


图 5 网格点(130,120)处地震记录
Fig. 5 Records at grid(130,120)

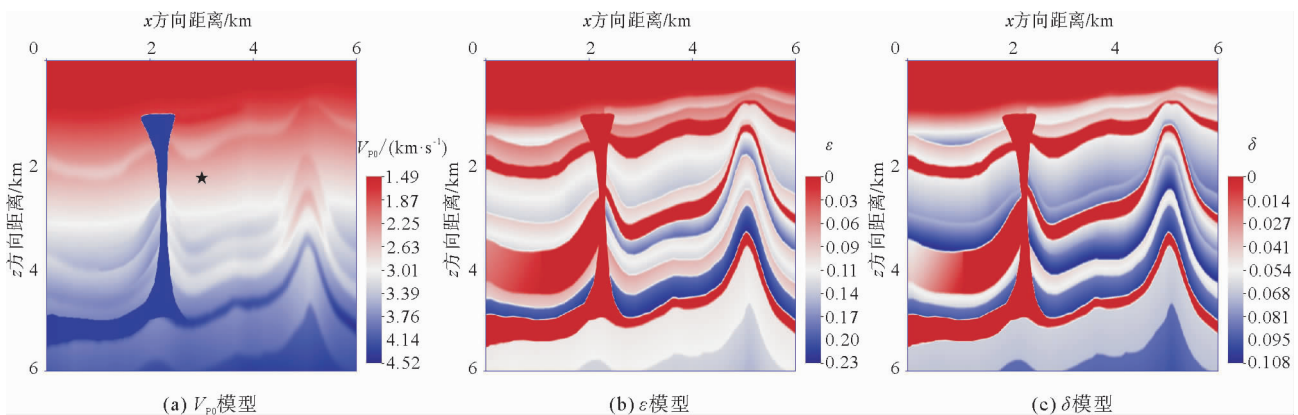


图 6 BP 模型
Fig. 6 BP model

本例中模拟了 1 000 个时间步,弹性波模拟耗时 767 s,声学近似模拟耗时 499 s,修正声学近似模拟耗时 347 s,说明本研究方法具有较高的计算效率。将式(10)中 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 替换为 $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 、 k_x^2 替换为 $k_x^2 + k_y^2$,可推广得到 VTI 介质修正声学近似 qP 波三维波动方程,然后采用三维混合有限差分/伪谱法求解,可实现三

维 VTI 介质纯 qP 波正演模拟。但由于采用三维有限差分法和三维伪谱法,与二维相比,计算可能需要花费较大内存和较长时间。

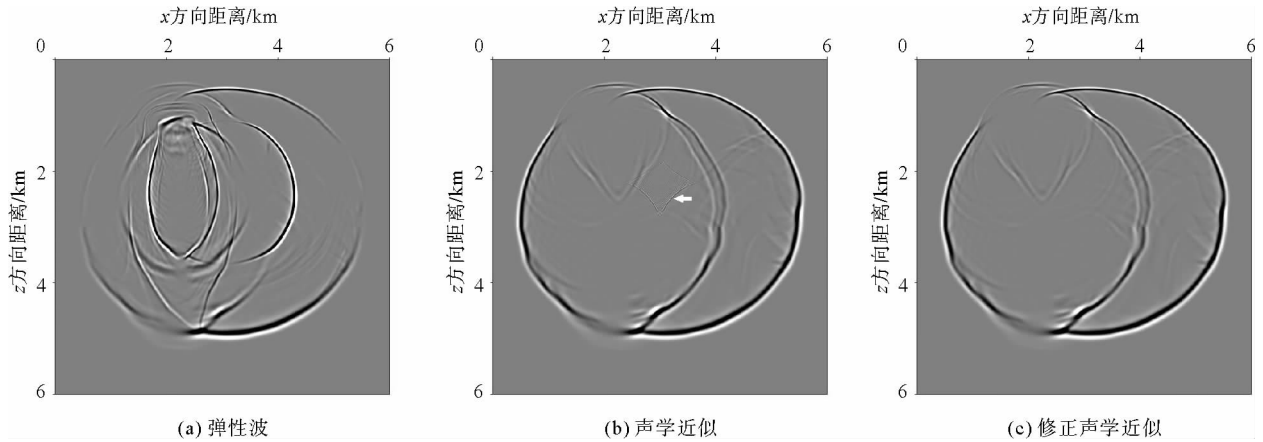


图 7 波场快照

Fig. 7 Snapshots in BP model

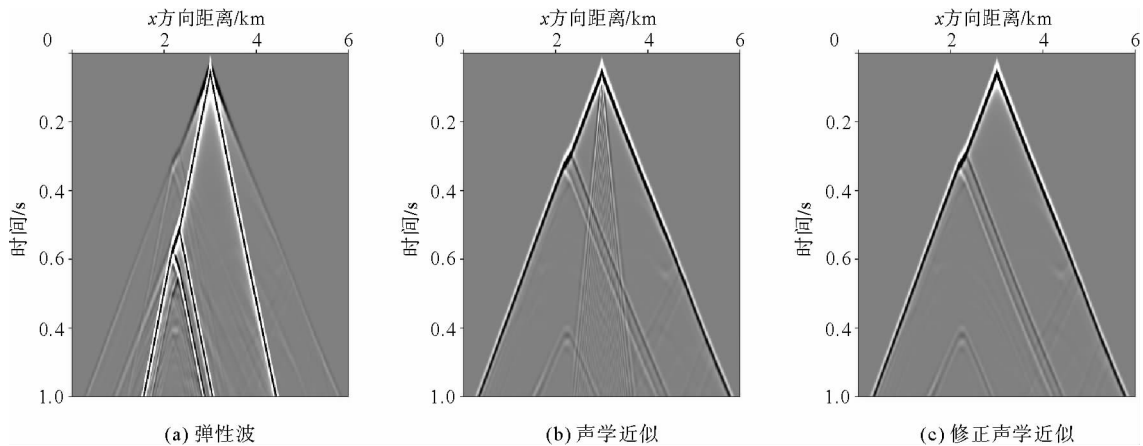


图 8 单炮记录

Fig. 8 Seismic records

4 结论

本研究对声学近似进行了修正,推导了 VTI 介质修正声学近似 qP 波频散关系和波动方程,采用混合有限差分/伪谱算法实现了 VTI 介质纯 qP 波正演模拟。通过理论分析和数值示例得到如下结论。

1) 基于修正声学近似的 qP 波波动方程是关于时间二阶导数的偏微分方程,其一组共轭解对应发散和汇聚的 qP 波,因此该方程的解不包含退化 qSV 波,而是纯 qP 波方程。

2) 基于修正声学近似的 qP 波波动方程包含椭圆项和非椭圆项两部分,非椭圆项在椭圆各向异性介质中等于零,因此该方程在椭圆各向异性介质中是完全精确的。

3) 因为退化 qSV 波在 $\epsilon < \delta$ 的 VTI 介质中存在数值溢出,导致模拟结果不稳定,而基于修正声学近似的 qP 波波动方程不包含退化 qSV 波,因此该方程在 $\epsilon \geq \delta$ 和 $\epsilon < \delta$ 的 VTI 介质中均是稳定的,能够适用于复杂 VTI 介质。

4) 直接用有限差分法求解波动方程中高阶导数是比较困难的,而混合有限差分/伪谱算法能够较好地解决波数 k_x 、 k_z 高阶项的计算问题。

参考文献:

- [1] CHENG J B, FOMEL S. Fast algorithms for elastic-wave-mode separation and vector decomposition using low-rank approximation for anisotropic media[J]. *Geophysics*, 2014, 79(4): C97-C110.
- [2] 杨佳佳, 何兵寿. 任意裂隙方位双相 HTI 介质的地震波方程及正演模拟[J]. *山东科技大学学报(自然科学版)*, 2011, 30(3): 38-48.
YANG Jiajia, HE Bingshou. The seismic wave equation and simulation in dual-phase anisotropic media with arbitrary fracture azimuth[J]. *Journal of Shandong University of Science and Technology(Natural Science)*, 2011, 30(3): 38-48.
- [3] ALKHALIFAH T. Acoustic approximations for processing in transversely isotropic media[J]. *Geophysics*, 1998, 63(2): 623-631.
- [4] DUVENECK E, BAKKER P M. Stable P-wave modeling for reverse time migration in tilted TI media[J]. *Geophysics*, 2011, 76(2): S65-S75.
- [5] ZHANG Y, ZHANG H Z, ZHANG G Q. A stable TTI reverse time migration and its implementation[J]. *Geophysics*, 2011, 76(3): WA3-WA11.
- [6] SCHLEICHER J, COSTA J C. A separable strong-anisotropy approximation for pure qP-wave propagation in transversely isotropic media[J]. *Geophysics*, 2016, 81(6): C337-C354.
- [7] 杨鹏, 李振春, 谷丙洛. 一种 TI 介质纯 qP 波正演方法及其在逆时偏移中的应用[J]. *地球物理学报*, 2017, 60(11): 4447-4467.
YANG Peng, LI Zhenchun, GU Bingluo. Pure quasi-P wave forward modeling method in TI media and its application to RTM[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2017, 60(11): 4447-4467.
- [8] XU S B, STOVAS A, ALKHALIFAH T, et al. New acoustic approximation for transversely isotropic media with a vertical symmetry axis[J]. *Geophysics*, 2020, 85(1): C1-C12.
- [9] LI B, STOVAS A. Optimized acoustic approximation and simulation of P wave in transversely isotropic media[C]//82nd EAGE Conference & Exhibition. Amsterdam, Dec. 8-11, 2020.
- [10] 梁锴, 孙上饶, 曹丹平, 等. TTI 介质弹性波近似解耦波动方程[J]. *地球物理学报*, 2021, 64(12): 4607-4617.
LIANG Kai, SUN Shangrao, CAO Danping, et al. Approximate decoupled wave equations for elastic waves in TTI media[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2021, 64(12): 4607-4617.
- [11] LIANG K, CAO D P, SUN S R, et al. Decoupled wave equation and forward modeling of qP wave in VTI media with the new acoustic approximation[J]. *Geophysics*, 2023, 88(1): WA335-WA344.
- [12] 刘洋, 李承楚, 牟永光. 任意偶数阶精度有限差分法数值模拟[J]. *石油地球物理勘探*, 1998, 33(1): 1-10.
LIU Yang, LI Chengchu, MOU Yongguang. Finite-difference numerical modeling of any even-order accuracy[J]. *Oil Geophysical Prospecting*, 1998, 33(1): 1-10.
- [13] PESTANA R C, URSIN B, STOFFA P L. Rapid expansion and pseudo spectral implementation for reverse time migration in VTI media[J]. *Journal of Geophysics and Engineering*, 2012, 9(3): 291-301.
- [14] WU Z D, LIU H W, ALKHALIFAH T. Pure quasi-P-wave calculation in transversely isotropic media using a hybrid method[J]. *Geophysical Journal International*, 2018, 214: 421-429.
- [15] FANG G, FOMEL S, DU Q Z, et al. Lowrank seismic-wave extrapolation on a staggered grid[J]. *Geophysics*, 2014, 79(3): T157-T168.
- [16] THOMSEN L. Weak elastic anisotropy[J]. *Geophysics*, 1986, 51(10): 1954-1966.

(责任编辑:高丽华)