DOI: 10.16452/j.cnki.sdkjzk.2024.01.009　　文章编号:1672-3767(2024)01-0082-07

带色散的四阶抛物型方程的紧致差分格式

李冉冉,王红玉,开依沙尔·热合曼
(新疆大学 数学与系统科学学院,新疆 乌鲁木齐 830046)

摘　要:本研究提出一种有效求解带色散四阶抛物型方程的四阶紧致差分格式。对该方程的空间变量用四阶紧致差分格式进行离散,对离散之后得到的常微分方程组用三次 Hermite 插值法进行求解,得到一种空间和时间方向上都具有四阶精度的数值格式,并用傅里叶方法证明了该格式的无条件稳定性。数值实验中给出三种类型的算例,并将本研究格式与 Crank-Nicolson 格式进行数值比较,证明了本研究格式的有效性。结果表明,本研究格式对求解带色散的四阶抛物型方程具有很好的实用性。

关键词:带色散的四阶抛物型方程;紧致差分格式;三次 Hermite 插值;Dirichlet 边界条件

中图分类号:O241.82　　**文献标志码**:A

Compact difference scheme for fourth-order parabolic equation with dispersion

LI Ranran, WANG Hongyu, KAYSAR Rahman
(College of Mathematics and System Science, Xinjiang University, Urumqi 830046, China)

Abstract: In this paper, a fourth-order compact difference scheme for efficiently solving the fourth-order parabolic equation with dispersion was proposed. The spatial variables of the equation were firstly discretized in the fourth-order compact difference scheme. The system of ordinary differential equations obtained after the discretization was then solved by the cubic Hermite interpolation method and a numerical scheme with fourth-order accuracy in both the spatial and temporal directions was obtained. The Fourier method was used to verify the unconditional stability of the scheme. Numerical experiments was conducted, in which three types of examples were given, and numerical comparisons was made between the proposed scheme and the Crank-Nicolson scheme, which verified the validity of the scheme. Numerical results show that the proposed scheme has good practicability in solving the fourth-order parabolic equations with dispersion.

Key words: fourth-order parabolic equation with dispersion; compact difference scheme; cubic Hermite interpolation; Dirichlet boundary conditions

带色散的四阶抛物型方程是色散方程与四阶抛物型方程的结合,在扩散、渗流、热传导等领域得到广泛应用。在过去的几十年里,研究者们对该类抛物型偏微分方程进行了大量的理论和数值研究,由于带色散的四阶抛物型方程的精确解一般不容易得到,因此相关的数值处理引起了许多学者的关注。因此,对带色散的四阶抛物型方程构造高精度稳定的数值格式是非常重要的问题之一。

本研究考虑如下一维带色散的四阶抛物型方程的初边值问题:

$$\begin{cases} u_t+\alpha u_{xxx}+\beta u_{xxxx}=0,(x,t)\in[a,b]\times[T_0,T]; \\ u(x,0)=f(x),a\leqslant x\leqslant b; \\ u(a,t)=g_1(t),u(b,t)=g_2(t),T_0\leqslant t\leqslant T。\end{cases} \tag{1}$$

收稿日期:2022-10-14
基金项目:国家自然科学基金项目(11461069);新疆大学博士启动基金项目(BS150204)
作者简介:李冉冉(1996—),女,安徽亳州人,硕士研究生,主要从事微分方程数值计算的研究.
开依沙尔·热合曼(1978—),男,新疆乌鲁木齐人,副教授,博士,主要从事微分方程数值计算的研究,本文通信作者.
E-mail:kaysar106@xju.edu.cn

式中:α、β 为常系数且不同时为零,f、g_1、g_2 为已知充分光滑的函数,u 为待求未知量。

三阶、四阶空间导数项常见于复杂的偏微分方程,如 KdV 方程、RLW 方程、Kuramoto-Sivashinsky 方程等,因而许多学者对包含高阶导数项的偏微分方程的数值格式进行了研究[1-11]。文献[1]用局部间断 Petrov-Galerkin 和 TVDRK3 方法求解了非线性色散方程;文献[2]对该类方程构造了时间方向上具有二阶精度、空间方向上具有四阶精度的差分格式;文献[3]针对 KdV 方程的初边值问题构造了时间和空间方向上都具有二阶精度的差分格式;文献[4]提出一种求解广义 Rosenau-KdV 方程的有限差分方法,数值结果表明该方法在时间和空间方向上分别达到了二阶和四阶的精度;文献[5]提出一种时间二阶精度、空间四阶精度的差分格式来求解 Rosenau-KdV-RLW 方程;文献[6]结合四阶差分格式和 TVDRK3 方法求解了 Kuramoto-Sivashinsky 方程,文献[7]对该类方程构造了时间二阶精度、空间四阶精度的差分格式;文献[8-12]给出色散方程和四阶抛物型方程的各种数值方法,不过这些数值方法仅适用于周期边界条件;文献[13]给出了两点边值问题的四阶紧致差分格式,文献[14-15]将该格式应用到了 Burgers 方程的数值模拟中;文献[16]对双曲型电信方程的空间变量用四阶紧致差分格式,时间变量采用三次 Hermite 插值法,提出求解该方程的四阶精度的格式。本研究结合四阶紧致差分格式和三次 Hermite 插值法,构造出带色散的四阶抛物型方程的时间空间都具有四阶精度的无条件稳定的差分格式。

1 空间离散

为了逼近带色散的四阶抛物型方程中的空间导数,将计算域 $\Omega\times[T_0,T]=\{(x,t)\,|\,a\leqslant x\leqslant b,T_0\leqslant t\leqslant T\}$ 划分为由点集 $\{(x_i,t_j)\}$ 描述的均匀网格,记 $x_i=a+(i-1)\Delta x,i=1,2,\cdots,M,\Delta x=\dfrac{b-a}{M-1}$;$t_n=T_0+n\Delta t,n=0,1,\cdots,N,\Delta t=\dfrac{T-T_0}{N}$,分别称 Δx 和 Δt 为空间步长和时间步长。

若 u'_i 表示 $u(x)$ 在 i 处的一阶导数的近似值,则有[13]:

$$\begin{cases}4u'_2+u'_3=\dfrac{1}{\Delta x}\left(-\dfrac{11}{12}u_1-4u_2+6u_3-\dfrac{4}{3}u_4+\dfrac{1}{4}u_5\right),i=1;\\ u'_{i-1}+4u'_i+u'_{i+1}=\dfrac{3}{\Delta x}(u_{i+1}-u_{i-1}),i=2,3,\cdots,M-1;\\ u'_{M-2}+4u'_{M-1}=\dfrac{1}{\Delta x}\left(-\dfrac{1}{4}u_{M-4}+\dfrac{4}{3}u_{M-3}-6u_{M-2}+4u_{M-1}+\dfrac{11}{12}u_M\right),i=M。\end{cases}\tag{2}$$

将式(2)写作矩阵形式:

$$\boldsymbol{L}_x\boldsymbol{U}'=\boldsymbol{M}_x\boldsymbol{U}+\boldsymbol{b}_1。$$

式中:$\boldsymbol{L}_x=\begin{bmatrix}4&1&0&\cdots&0\\1&4&1&\vdots&0\\0&\ddots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&1&4&1\\0&\cdots&0&1&4\end{bmatrix}_{(M-2)\times(M-2)}$,$\boldsymbol{M}_x=\dfrac{3}{\Delta x}\begin{bmatrix}-\frac{4}{3}&2&-\frac{4}{9}&\frac{1}{12}&0&\cdots&0\\-1&0&1&0&0&&\vdots\\0&-1&0&1&0&\ddots&0\\&\vdots&\vdots&\vdots&&&\\\vdots&&0&-1&0&1&0\\&&0&0&-1&0&1\\0&\cdots&0&-\frac{1}{12}&\frac{4}{9}&-2&\frac{4}{3}\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{b}_1=\dfrac{11}{12\Delta x}(-u_1,0,\cdots,0,u_M)^{\mathrm{T}}_{1\times(M-2)}$,$\boldsymbol{U}=(u_2,u_3,\cdots,u_{M-2},u_{M-1})^{\mathrm{T}}_{1\times(M-2)}$,$\boldsymbol{U}'=(u'_2,u'_3,\cdots,u'_{M-2},u'_{M-1})^{\mathrm{T}}_{1\times(M-2)}$。则空间一阶导数可以表示为:

$$\boldsymbol{U}'=\boldsymbol{L}_x^{-1}(\boldsymbol{M}_x\boldsymbol{U}+\boldsymbol{b}_1)。\tag{3}$$

若 u''_i 表示 $u(x)$ 在 i 处的二阶导数的近似值,则有[13]:

$$\begin{cases} 14u''_2-5u''_3+4u''_4-u''_5=\dfrac{12}{\Delta x^2}(u_1-2u_2+u_3),i=1; \\ u''_{i-1}+10u''_i+u''_{i+1}=\dfrac{12}{\Delta x^2}(u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}),i=2,3,\cdots,M-1; \\ -u''_{M-4}+4u''_{M-3}-5u''_{M-2}+14u''_{M-1}=\dfrac{12}{\Delta x^2}(u_{M-2}-2u_{M-1}+u_M),i=M。\end{cases} \tag{4}$$

式(4)写作矩阵形式:

$$\boldsymbol{L}_{xx}\boldsymbol{U}''=\boldsymbol{M}_{xx}\boldsymbol{U}+\boldsymbol{b}_2。$$

式中:$\boldsymbol{L}_{xx}=\begin{bmatrix} 14 & -5 & 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & 10 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \vdots & & 0 & 1 & 10 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 & -5 & 14 \end{bmatrix}_{(M-2)\times(M-2)}$,$\boldsymbol{M}_{xx}=\dfrac{12}{\Delta x^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{(M-2)\times(M-2)}$,

$\boldsymbol{b}_2=\dfrac{12}{\Delta x^2}(u_1,0,\cdots,0,u_M)^{\mathrm{T}}_{1\times(M-2)}$,$\boldsymbol{U}''=(u''_2,u''_3,\cdots,u''_{M-2},u''_{M-1})^{\mathrm{T}}_{1\times(M-2)}$。则空间二阶导数可以表示为:

$$\boldsymbol{U}''=\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}(\boldsymbol{M}_{xx}\boldsymbol{U}+\boldsymbol{b}_2)。\tag{5}$$

利用式(3)和式(5),空间变量的三阶、四阶导数的近似有:

$$\boldsymbol{U}'''=\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}(\boldsymbol{M}_{xx}\boldsymbol{U}'+\boldsymbol{b}_x)=\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}\boldsymbol{M}_{xx}(\boldsymbol{L}_x^{-1}(\boldsymbol{M}_x\boldsymbol{U}+\boldsymbol{b}_1))+\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}\boldsymbol{b}_x=\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}\boldsymbol{M}_{xx}\boldsymbol{L}_x^{-1}\boldsymbol{M}_x\boldsymbol{U}+\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}\boldsymbol{M}_{xx}\boldsymbol{L}_x^{-1}\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}\boldsymbol{b}_x,\tag{6}$$

$$\boldsymbol{U}^{(4)}=\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}(\boldsymbol{M}_{xx}\boldsymbol{U}''+\boldsymbol{b}_{xx})=\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}\boldsymbol{M}_{xx}(\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}(\boldsymbol{M}_x\boldsymbol{U}+\boldsymbol{b}_2))+\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}\boldsymbol{b}_{xx}=\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}\boldsymbol{M}_{xx}\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}\boldsymbol{M}_{xx}\boldsymbol{U}+\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}\boldsymbol{M}_{xx}\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}\boldsymbol{b}_{xx}。\tag{7}$$

式中:$\boldsymbol{b}_x=\dfrac{12}{\Delta x^2}[\dfrac{\partial u_1}{\partial x},0,\cdots,0,\dfrac{\partial u_M}{\partial x}]^{\mathrm{T}}_{1\times(M-2)}$,$\boldsymbol{b}_{xx}=\dfrac{12}{\Delta x^2}[\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2},0,\cdots,0,\dfrac{\partial^2 u_M}{\partial x^2}]^{\mathrm{T}}_{1\times(M-2)}$。

将式(6)和式(7)代入方程(1),得到常微分方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{U}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{B}_4\boldsymbol{b}_x+\boldsymbol{B}_5\boldsymbol{b}_{xx}, \\ u(x,0)=f(x)。\end{cases}\tag{8}$$

式中:$\boldsymbol{B}_1=-(\alpha\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}\boldsymbol{M}_{xx}\boldsymbol{L}_x^{-1}\boldsymbol{M}_x+\beta\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}\boldsymbol{M}_{xx}\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}\boldsymbol{M}_{xx})$,$\boldsymbol{B}_2=-\alpha\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}\boldsymbol{M}_{xx}\boldsymbol{L}_x^{-1}$,$\boldsymbol{B}_3=-\beta\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}\boldsymbol{M}_{xx}\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}$,$\boldsymbol{B}_4=-\alpha\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}$,$\boldsymbol{B}_5=-\beta\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}$。

2 三次 Hermite 插值法

三次 Hermite 插值多项式 $Q(x)$ 可以写成[17]:

$$Q(x)=w(x_0)v_0(x)+w(x_1)v_1(x)+w'(x_0)V_0(x)+w'(x_1)V_1(x)。$$

式中:$v_0(x)=(1+2\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0})(\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1})^2$,$v_1(x)=(1+2\dfrac{x-x_0}{x_0-x_1})(\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0})^2$,$V_0(x)=(x-x_0)(\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1})^2$,$V_1(x)=(x-x_1)(\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0})^2$。

在下列定理 1 中,给出了三次 Hermite 插值的误差。

定理 1[17] 设有两个不同的点 x_0、x_1,且 $w\in C^4[x_0,x_1]$。如果 $Q(x)$ 是三次 Hermite 插值多项式,则在区间 $[x_0,x_1]$ 中的每个 x 都对应于 $[x_0,x_1]$ 中的一个点 η,有

$$w(x)-Q(x)=\frac{w^{(4)}(\eta)}{24}(x-x_0)^2(x-x_1)^2\text{。}\tag{9}$$

根据等式(9)和定理1,可以得到积分公式:

$$\int_{x_0}^{x_1}w(x)\mathrm{d}x=\frac{x_1-x_0}{2}[w(x_0)+w(x_1)]+\frac{(x_1-x_0)^2}{12}[w'(x_0)-w'(x_1)]+\frac{w^{(4)}(\eta)}{24}(x_1-x_0)^5\text{。}\tag{10}$$

常微分方程(8)应用三次 Hermite 插值法(10),则在 Dirichlet 边界下的带色散的四阶抛物型方程(1)的差分格式:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}^{n+1}-\boldsymbol{U}^n&=\int_n^{n+1}(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{U}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{B}_4\boldsymbol{b}_x+\boldsymbol{B}_5\boldsymbol{b}_{xx})\mathrm{d}t\\
&=\frac{\Delta t}{2}(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{U}^n+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{b}_1^n+\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{b}_2^n+\boldsymbol{B}_4\boldsymbol{b}_x^n+\boldsymbol{B}_5\boldsymbol{b}_{xx}^n+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{U}^{n+1}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{b}_1^{n+1}+\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{b}_2^{n+1}+\boldsymbol{B}_4\boldsymbol{b}_x^{n+1}+\boldsymbol{B}_5\boldsymbol{b}_{xx}^{n+1})+\\
&\quad\frac{\Delta t^2}{12}[\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{U}_t^n+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{b}_{1t}^n+\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{b}_{2t}^n+\boldsymbol{B}_4\boldsymbol{b}_{xt}^n+\boldsymbol{B}_5\boldsymbol{b}_{xxt}^n-(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{U}_t^{n+1}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{b}_{1t}^{n+1}+\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{b}_{2t}^{n+1}+\boldsymbol{B}_4\boldsymbol{b}_{xt}^{n+1}+\boldsymbol{B}_5\boldsymbol{b}_{xxt}^{n+1})]\\
&=\frac{\Delta t}{2}(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{U}^n+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{b}_1^n+\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{b}_2^n+\boldsymbol{B}_4\boldsymbol{b}_x^n+\boldsymbol{B}_5\boldsymbol{b}_{xx}^n+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{U}^{n+1}+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{b}_1^{n+1}+\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{b}_2^{n+1}+\boldsymbol{B}_4\boldsymbol{b}_x^{n+1}+\boldsymbol{B}_5\boldsymbol{b}_{xx}^{n+1})+\\
&\quad\frac{\Delta t^2}{12}\{\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{U}^n+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{b}_1^n+\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{b}_2^n+\boldsymbol{B}_4\boldsymbol{b}_x^n+\boldsymbol{B}_5\boldsymbol{b}_{xx}^n)+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{b}_{1t}^n+\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{b}_{2t}^n+\boldsymbol{B}_4\boldsymbol{b}_{xt}^n+\boldsymbol{B}_5\boldsymbol{b}_{xxt}^n-\\
&\quad[\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{b}_1^{n+1}+\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{b}_2^{n+1}+\boldsymbol{B}_4\boldsymbol{b}_x^{n+1}+\boldsymbol{B}_5\boldsymbol{b}_{xx}^{n+1})+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{b}_{1t}^{n+1}+\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{b}_{2t}^{n+1}+\boldsymbol{B}_4\boldsymbol{b}_{xt}^{n+1}+\boldsymbol{B}_5\boldsymbol{b}_{xxt}^{n+1}]\}\\
&=\left(\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{B}_1-\frac{\Delta t}{12}\boldsymbol{B}_1^2\right)\boldsymbol{U}^{n+1}+\left(\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{B}_1+\frac{\Delta t}{12}\boldsymbol{B}_1^2\right)\boldsymbol{U}^n+\left(\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{B}_2+\frac{\Delta t^2}{12}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2\right)\boldsymbol{b}_1^n+\left(\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{B}_2-\frac{\Delta t^2}{12}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2\right)\boldsymbol{b}_1^{n+1}+\\
&\quad\left(\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{B}_3+\frac{\Delta t^2}{12}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_3\right)\boldsymbol{b}_2^n+\left(\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{B}_3-\frac{\Delta t^2}{12}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_3\right)\boldsymbol{b}_2^{n+1}+\left(\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{B}_4+\frac{\Delta t^2}{12}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_4\right)\boldsymbol{b}_x^n+\left(\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{B}_4-\frac{\Delta t^2}{12}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_4\right)\boldsymbol{b}_x^{n+1}+\\
&\quad\left(\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{B}_5+\frac{\Delta t^2}{12}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_5\right)\boldsymbol{b}_{xx}^n+\left(\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{B}_5-\frac{\Delta t^2}{12}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_5\right)\boldsymbol{b}_{xx}^{n+1}+\frac{\Delta t^2}{12}[\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{b}_{1t}^n-\boldsymbol{b}_{1t}^{n+1})+\boldsymbol{B}_3(\boldsymbol{b}_{2t}^n-\boldsymbol{b}_{2t}^{n+1})+\\
&\quad\boldsymbol{B}_4(\boldsymbol{b}_{xt}^n-\boldsymbol{b}_{xt}^{n+1})+\boldsymbol{B}_5(\boldsymbol{b}_{xxt}^n-\boldsymbol{b}_{xxt}^{n+1})]\}\text{。}\end{aligned}\tag{11}$$

因此,式(1)的差分格式为:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}^{n+1}=&(I-\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{B}_1+\frac{\Delta t^2}{12}\boldsymbol{B}_1^2)^{-1}\{(I+\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{B}_1+\frac{\Delta t^2}{12}\boldsymbol{B}_1^2)\boldsymbol{U}^n+(\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{B}_2+\frac{\Delta t^2}{12}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2)\boldsymbol{b}_1^n+(\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{B}_2-\frac{\Delta t^2}{12}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2)\boldsymbol{b}_1^{n+1}+\\
&(\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{B}_3+\frac{\Delta t^2}{12}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_3)\boldsymbol{b}_2^n+(\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{B}_3-\frac{\Delta t^2}{12}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_3)\boldsymbol{b}_2^{n+1}+(\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{B}_4+\frac{\Delta t^2}{12}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_4)\boldsymbol{b}_x^n+(\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{B}_4-\frac{\Delta t^2}{12}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_4)\boldsymbol{b}_x^{n+1}+\\
&(\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{B}_5+\frac{\Delta t^2}{12}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_5)\boldsymbol{b}_{xx}^n+(\frac{\Delta t}{2}\boldsymbol{B}_5-\frac{\Delta t^2}{12}\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_5)\boldsymbol{b}_{xx}^{n+1}+\frac{\Delta t^2}{12}[\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{b}_{1t}^n-\boldsymbol{b}_{1t}^{n+1})+\boldsymbol{B}_3(\boldsymbol{b}_{2t}^n-\boldsymbol{b}_{2t}^{n+1})+\\
&\boldsymbol{B}_4(\boldsymbol{b}_{xt}^n-\boldsymbol{b}_{xt}^{n+1})+\boldsymbol{B}_5(\boldsymbol{b}_{xxt}^n-\boldsymbol{b}_{xxt}^{n+1})]\}\text{。}\end{aligned}\tag{12}$$

式中:$\boldsymbol{b}_{1t}=\frac{11}{12\Delta x}[-\frac{\partial u_1}{\partial t},0,\cdots,0,\frac{\partial u_M}{\partial t}]_{1\times(M-2)}^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{b}_{2t}=\frac{12}{\Delta x^2}[\frac{\partial u_1}{\partial t},0,\cdots,0,\frac{\partial u_M}{\partial t}]_{1\times(M-2)}^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{b}_{xt}=\frac{12}{\Delta x^2}[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial t},0,\cdots,0,\frac{\partial^2 u_M}{\partial x\partial t}]_{1\times(M-2)}^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{b}_{xxt}=\frac{12}{\Delta x^2}[\frac{\partial^3 u_1}{\partial x\partial x\partial t},0,\cdots,0,\frac{\partial^3 u_M}{\partial x\partial x\partial t}]_{1\times(M-2)}^{\mathrm{T}}$。

3 稳定性分析

为研究本格式的稳定性,给出关于方程(12)的线性稳定性分析。根据傅里叶方法,定义 $u_i^n=\xi^n\mathrm{e}^{Iwi}$($I=\sqrt{-1}$)为格式(12)数值解的特征项,则式(2)、式(4)、式(6)和式(7)的傅里叶关系为:

$$(u')_i^n=\frac{6I\sin w}{\Delta x(2\cos w+4)}u_i^n,(u'')_i^n=\frac{12(2\cos w-2)}{\Delta x^2(2\cos w+10)}u_i^n,$$

$$(u''')_i^n=\frac{72I\sin w(2\cos w-2)}{\Delta x^3(2\cos w+4)(2\cos w+10)}u_i^n,(u^{(4)})_i^n=\frac{144(2\cos w-2)^2}{\Delta x^4(2\cos w+10)^2}u_i^n。\tag{13}$$

代入 $\widetilde{A}=-(\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}\boldsymbol{M}_{xx}\boldsymbol{L}_x^{-1}\boldsymbol{M}_x+\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}\boldsymbol{M}_{xx}\boldsymbol{L}_{xx}^{-1}\boldsymbol{M}_{xx})$,有

$$\widetilde{A}=-\frac{72I\sin w(2\cos w-2)}{\Delta x^3(2\cos w+4)(2\cos w+10)}-\frac{144(2\cos w-2)^2}{\Delta x^4(2\cos w+10)^2}=-\frac{I}{\Delta x^3}S_1-\frac{1}{\Delta x^4}S_2。$$

将式(13)代入格式(12),有

$$|\xi|=\left|\frac{1+\frac{\Delta t}{2}\widetilde{A}+\frac{\Delta t^2}{12}\widetilde{A}^2}{1-\frac{\Delta t}{2}\widetilde{A}+\frac{\Delta t^2}{12}\widetilde{A}^2}\right|=\left|\frac{1+\frac{\Delta t}{2}(-\frac{I}{\Delta x^3}S_1-\frac{1}{\Delta x^4}S_2)+\frac{\Delta t^2}{12}\widetilde{A}^2}{1-\frac{\Delta t}{2}(-\frac{I}{\Delta x^3}S_1-\frac{1}{\Delta x^4}S_2)+\frac{\Delta t^2}{12}\widetilde{A}^2}\right|=\left|\frac{1-\frac{I\Delta t}{2\Delta x^3}S_1-\frac{1}{2\Delta x^4}S_2+\frac{\Delta t^2}{12}\widetilde{A}^2}{1+\frac{I\Delta t}{2\Delta x^3}S_1+\frac{1}{2\Delta x^4}S_2+\frac{\Delta t^2}{12}\widetilde{A}^2}\right|。$$

显然 $S_2\geqslant 0$,因此 $|\xi|\leqslant 1$,表明使用式(6)和式(7)近似式(1),格式(12)是无条件稳定的。

4 数值实验

为了验证本研究格式的可靠性,用所提方法进行数值计算,给出数值算例的各种误差及收敛阶。其中,L_∞、L_2 误差和收敛阶的定义如下。

U_k、u_k 分别表示点 x_k 处的数值解和准确解,误差定义为:L_∞ 误差 $=\max_{k=1}^{K}|U_k-u_k|$,L_2 误差 $=\frac{1}{K}\sqrt{\sum_{k=1}^{K}|U_k-u_k|^2}$,时间和空间收敛阶定义为:$O_{\mathrm{rder}}=\frac{\lg(\|u-U_{\Delta x(\Delta t)}\|/\|u-U_{\Delta x(\Delta t)/2}\|)}{\lg 2}$。

数值例子 1 色散方程

$$\begin{cases}u_t-u_{xxx}=0,\ (x,t)\in[0,2]\times(0,T];\\ u(x,0)=\exp(x);\\ u(0,t)=\exp(t);\\ u(2,t)=\exp(2+t);\\ u(x,t)=\exp(x+t)。\end{cases}$$

表 1 中给出色散方程在不同 Δx、Δt 下,当 $T=2$ 时的格式(12)的 L_∞、L_2 误差和收敛阶。从数值结果可以看出该格式在空间和时间方向上都达到了预期的四阶精度。表 2 针对色散方程在 $T=2$,$\Delta x=1/40$ 下,给出不同 Δt 时 L_2 误差和收敛阶对比。可以看出,当空间变量离散为式(8),时间变量离散为 Crank-Nicolson 格式时时间方向只有二阶精度,本研究格式可以达到四阶精度,且具有更小的误差。

表 1 $T=2$ 时不同 Δx、Δt 时的 L_∞、L_2 误差和收敛阶

Table 1 L_∞, L_2 errors and convergence order for different Δx, Δt at $T=2$

Δx	Δt	L_∞ 误差	收敛阶	L_2 误差	收敛阶
1/5	1	$3.263\,4\times10^{-2}$	—	$2.657\,3\times10^{-2}$	—
1/10	1/2	$1.970\,0\times10^{-3}$	4.050 2	$1.692\,4\times10^{-3}$	3.972 8
1/20	1/4	$1.192\,5\times10^{-4}$	4.046 1	$1.053\,3\times10^{-4}$	4.006 1
1/40	1/8	$7.400\,4\times10^{-6}$	4.010 2	$6.620\,7\times10^{-6}$	3.991 8

表 2 $T=2$、$\Delta x=1/40$,不同 Δt 时的 L_2 误差和收敛阶比较

Table 2 Comparison of L_2 error and convergence order at different Δt for $T=2$, $\Delta x=1/40$

Δt	Crank-Nicolson		本研究格式(12)	
	L_2 误差	收敛阶	L_2 误差	收敛阶
1	1.566 5	—	2.5769×10^{-2}	—
1/2	$3.966\,3\times10^{-1}$	1.981 7	$1.639\,4\times10^{-3}$	3.974 5
1/4	$9.962\,7\times10^{-2}$	1.993 2	$1.023\,1\times10^{-4}$	4.002 2
1/8	$2.493\,1\times10^{-2}$	1.998 6	$6.617\,1\times10^{-6}$	3.950 6

数值例子 2 四阶抛物型方程

$$\begin{cases} u_t + u_{xxxx} = 0, \ (x,t) \in [0,4] \times (0,T]; \\ u(x,0) = \exp(-x); \\ u(0,t) = \exp(-t); \\ u(4,t) = \exp(-4-t); \\ u(x,t) = \exp(-x-t)。 \end{cases}$$

表 3 给出四阶抛物型方程在不同 Δx、Δt 下,当 $T=8$ 时的本研究格式(12)的 L_∞、L_2 误差和收敛阶。结果表明该格式在空间和时间方向上都具有四阶精度,这与格式的理论结果相吻合。表 4 中对该方程给出空间变量离散为式(8),时间变量离散为 Crank-Nicolson 格式和本研究格式(12)的 L_2 误差及时间方向收敛阶的对比,数值结果表明三次 Hermite 插值法比 Crank-Nicolson 更具有精确性。

表 3 $T=8$ 时不同 Δx、Δt 时的 L_∞、L_2 误差和收敛阶

Table 3 L_∞, L_2 errors and convergence order for different Δx, Δt at $T=8$

Δx	Δt	L_∞ 误差	收敛阶	L_2 误差	收敛阶
2/5	4	7.6749×10^{-3}	—	5.2020×10^{-3}	—
1/5	2	4.2751×10^{-4}	4.166 1	2.9940×10^{-4}	4.118 9
1/10	1	2.6217×10^{-5}	4.027 4	1.8459×10^{-5}	4.019 6
1/20	1/2	1.8363×10^{-6}	3.835 6	1.2795×10^{-6}	3.850 7

表 4 $T=4$、$\Delta x=1/10$,不同 Δt 时的 L_2 误差和收敛阶比较

Table 4 Comparison of L_2 error and convergence order at different Δt for $T=4$, $\Delta x=1/10$

Δt	Crank-Nicolson		本研究格式(12)	
	L_2 误差	收敛阶	L_2 误差	收敛阶
2	2.0102×10^{-2}	—	1.2808×10^{-3}	—
1	4.7207×10^{-3}	2.090 2	7.8035×10^{-5}	4.036 8
1/2	1.1660×10^{-3}	2.017 5	4.8558×10^{-6}	4.006 3
1/4	2.9067×10^{-4}	2.004 1	3.0858×10^{-7}	3.976 0

数值例子 3 带色散的四阶抛物型方程

$$\begin{cases} u_t + 3u_{xxx} + u_{xxxx} = 0, \ (x,t) \in [-1,1.5] \times (0,T], \\ u(x,0) = \exp(-x), \\ u(-1,t) = \exp(1+2t), \\ u(1.5,t) = \exp(-1.5+2t), \\ u(x,t) = \exp(-x+2t)。 \end{cases}$$

表 5 中给出了带色散的四阶抛物型方程在不同 Δx 下,当 $T=1$ 时刻的本研究格式(12)上的 L_∞、L_2 误差及其收敛阶。从数值结果可以看出,该格式在空间方向上达到四阶精度,且随着 Δx 的减小,计算结果更精确。表 6 中给出空间变量离散为式(8)、时间变量离散为 Crank-Nicolson 格式和本研究格式(12)的 L_2 误差及时间方向收敛阶的比较,数值结果表明本研究格式的 L_2 误差比 Crank-Nicolson 格式小 2~4 个数量级,说明研究的格式具有更高的精度。

表 5 $T=1$、$\Delta t=\Delta x$,不同 Δx 时的 L_∞、L_2 误差和收敛阶

Table 5 L_∞, L_2 errors and convergence order for different Δx at $T=1$

Δx	L_∞ 误差	收敛阶	L_2 误差	收敛阶
1/2	3.6240×10^{-3}	—	1.8629×10^{-3}	—
1/4	1.9905×10^{-4}	4.186 4	1.0565×10^{-4}	4.140 2
1/8	1.0762×10^{-5}	4.209 1	7.3548×10^{-6}	3.844 5
1/16	7.8279×10^{-7}	3.781 2	4.9233×10^{-7}	3.901 0

表 6 $T=1$、$\Delta x=1/10$,不同 Δt 时的 L_2 误差和收敛阶比较

Table 6 Comparison of L_2 error and convergence order at different Δt for $T=1$, $\Delta x=1/10$

Δt	Crank-Nicolson		本研究格式(12)	
	L_2 误差	收敛阶	L_2 误差	收敛阶
1/2	1.071 4	—	1.5517×10^{-2}	—
1/4	2.8280×10^{-1}	1.921 6	1.1243×10^{-3}	3.786 8
1/8	7.1707×10^{-2}	1.979 6	6.6182×10^{-5}	4.086 4
1/16	1.7996×10^{-2}	1.994 4	3.8816×10^{-6}	4.091 7

5 结论

本研究针对具有 Dirichlet 边界条件的带色散的四阶抛物型方程,空间的三阶导数项和四阶导数项用四阶精度

紧致格式离散,时间方向利用三次 Hermite 插值法,构造出一种时间空间同时具有四阶精度的无条件稳定的差分格式,用傅里叶方法证明了所提格式的无条件稳定性。数值实验中采用本格式分别计算了色散方程、四阶抛物型方程、带色散的四阶抛物型方程等三种类型方程的算例,并与该三类方程的 Crank-Nicolson 格式进行了数值比较,结果表明本研究格式比 Crank-Nicolson 格式更具有精确性。从表 1、表 3、表 5 可知,本格式在空间方向上达到了四阶的精度;从表 2、表 4、表 6 可知,本格式在时间方向上也达到了四阶精度,数值结果与理论相符合。另外,该格式可以通过利用局部一维化方法推广到二维和三维带色散的四阶抛物型方程问题的数值计算上。

参考文献:

[1] 苏晟洁,高巍. 非线性色散方程的局部间断 Petrov-Galerkin 方法[J]. 流体动力学,2020,8(4):53-61.
SU Shengjie,GAO Wei. A local discontinuous Petrov-Galerkin method for nonlinear dispersive equations[J]. International Journal of Fluid Dynamics,2020,8(4):53-61.

[2] ROUATBI A,ACHOURI T,OMRANI K. High-order conservative difference scheme for a model of nonlinear dispersive equations[J]. Computational and Applied Mathematics,2018,37(4):4169-4195.

[3] SHEN J Y,WANG X P,SUN Z Z. The conservation and convergence of two finite difference schemes for KdV equations with initial and boundary value conditions[J]. Numerical Mathematics:Theory,Methods and Application,2020,13(1):253-280.

[4] WANG X F,DAI W Z. A conservative fourth-order stable finite difference scheme for the generalized Rosenau-KdV equation in both 1D and 2D[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2019,355:310-331.

[5] WANG X F,DAI W Z. A new conservative finite difference scheme for the generalized Rosenau-KdV-RLW equation[J]. Computational and Applied Mathematics,2020,39(3):1-19.

[6] ZHANG X H,ZHANG P,DING Y. A Reduced high-order compact finite difference scheme based on proper orthogonal decomposition for the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation[J]. IAENG International Journal of Applied Mathematics,2019,49(2):1-10.

[7] MOHANTY R K,KAUR D. High accuracy two-level implicit compact difference scheme for 1D unsteady biharmonic problem of first kind:Application to the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation[J]. Journal of Difference Equations and Applications,2019,25(2):243-261.

[8] ZHU S H,YUAN G W,SHEN L J. Alternating group explicit method for the dispersive equation[J]. International Journal of Computer Mathematics,2000,75(1):97-105.

[9] WANG W Q,ZHANG Q J. A highly accurate alternating 6-point group method for the dispersive equation[J]. International Journal of Computer Mathematics,2010,87(7):1512-1521.

[10] 刘洪华. 色散方程的交替分组迭代方法[J]. 山东大学学报(理学版),2007,42(1):19-23.
LIU Honghua. The alternating group iterative method for the dispersive equation[J]. Journal of Shandong University (Natural Science),2007,42(1):19-23.

[11] 朱少红,于志玲. 色散方程的几个新的差分格式[J]. 南开大学学报(自然科学版),2001,34(3):20-23.
ZHU Shaohong,YU Zhiling. Several new difference schemes for the dispersive equation[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Nankaiensis,2001,34(3):20-23.

[12] 冯青华. 四阶抛物方程的一类交替分组方法[J]. 山东大学学报(理学版),2006,42(8):79-82.
FENG Qinghua. An alternating group method for four order parabolic equations[J]. Journal of Shandong University (Natural Science),2006,42(8):79-82.

[13] ZHAO J C. Highly accurate compact mixed methods for two point boundary value problems[J]. Applied Mathematics and Computation,2007,188(2):1402-1418.

[14] ZHANG P G,WANG J P. A predictor-corrector compact finite difference scheme for Burgers' equation[J]. Applied Mathematics and Computation,2012,219(3):892-898.

[15] BHATT H P,KHALIQ A Q M. Fourth-order compact schemes for the numerical simulation of coupled Burgers' equation[J]. Computer Physics Communications,2016,200:117-138.

[16] LUO X Q,DU Q K. An unconditionally stable fourth-order method for telegraph equation based on Hermite interpolation[J]. Applied Mathematics and Computation,2013,219(15):8237-8246.

[17] KRESS R. Numerical analysis[M]. New York:Springer-Verlag,1998:287-316.

(责任编辑:齐敏华)