

# 锚杆岩体界面载荷传递规律及锚固长度设计

赵同彬<sup>1,2</sup>, 李龙飞<sup>1</sup>, 邢明录<sup>1,2</sup>, 张玉宝<sup>1,2</sup>, 王学斌<sup>1</sup>

(1. 山东科技大学 能源与矿业工程学院, 山东 青岛 266590;

2. 山东科技大学 矿山灾害预防控制省部共建国家重点实验室培育基地, 山东 青岛 266590)

**摘要:**为揭示巷道围岩锚固界面脱粘失效机理,量化锚杆支护设计参数,采用三线性粘结滑移模型进行理论分析,对轴向载荷作用下锚固脱粘失效全过程中,锚固段界面剪应力、锚杆轴力分布演化规律以及界面极限锚固力进行研究,根据锚固段长度不同,得到两种界面剪应力分布演化类型。研究表明:当锚固长度较短时,界面剪应力存在全长软化阶段;当锚固长度较长时,界面剪应力存在弹性-软化-滑移三段共存阶段。锚固粘结界面弹性段、软化段、摩擦段内的剪应力分别呈现双曲余弦函数衰减分布、余弦函数上升分布、均匀分布规律,锚杆轴力随界面剪应力分布演化呈现多种形态的衰减分布规律。根据锚固界面模型解析计算获得极限锚固力,当不考虑脱粘摩擦力时,极限锚固力随锚固长度的增加趋近于某一固定值;当考虑脱粘摩擦力时,增加锚固长度能够持续提高锚固界面安全系数。研究成果可为锚固机制分析、锚杆支护参数设计提供理论参考。

**关键词:**锚固界面;粘结滑移模型;剪应力分布;极限锚固力;锚固长度

**中图分类号:**TD315

**文献标志码:**A

## Load transfer law and anchorage length design at interface between rock bolts and rock mass

ZHAO Tongbin<sup>1,2</sup>, LI Longfei<sup>1</sup>, XING Minglu<sup>1,2</sup>, ZHANG Yubao<sup>1,2</sup>, WANG Xuebin<sup>1</sup>

(1. College of Energy and Mining Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China;

2. State Key Laboratory of Mining Disaster Prevention and Control Co-founded by Shandong Province and the Ministry of Science and Technology, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China)

**Abstract:** To reveal the failure mechanism of anchorage interface debonding of surrounding rock in roadway and quantify the design parameters of rock bolt support, theoretical derivation was made by using the trilinear bond-slip model, and the distribution and evolution law of interfacial shear stress, axial force of bolt and ultimate anchorage force at the interface during the whole process of anchorage debonding failure under axial load were studied. According to the different lengths of anchorage section, two types of interfacial shear stress distribution and evolution were obtained. The results show that when the anchorage length is short, the interfacial shear stress has a full-length softening stage and when the anchorage length is long, the interfacial shear stress has an elastic-softening-sliding coexistence stage. The shear stress in the elastic, softening and friction sections of the anchorage bonding interface shows different distribution laws, that is, hyperbolic cosine function attenuation, cosine function rise and uniform distribution respectively. The axial force of the rock bolt shows various attenuation distribution laws with the distribution and evolution of the interfacial shear stress. According to the analytical calculation of the anchorage interface model, the ultimate anchorage force approaches a fixed value with the increase of anchorage length when the debonding friction force is not considered. When the debonding friction force is considered,

收稿日期:2023-11-13

基金项目:国家自然科学基金项目(52374097,52104137);山东省泰山学者工程项目(tstp20221126)

作者简介:赵同彬(1975—),男,黑龙江齐齐哈尔人,教授,博士生导师,主要从事矿山岩石力学与巷道支护技术研究。

李龙飞(2000—),女,河北保定人,硕士研究生,主要从事锚杆性能测试及锚固基础理论研究,本文通信作者。

E-mail:2863898939@qq.com

increasing anchorage length can continuously improve the safety factor of anchorage interface. The research results can provide theoretical reference for the analysis of anchoring mechanism and the design of rock bolt support parameters.

**Key words:** anchorage interface; bond-slip model; shear stress distribution; ultimate anchoring force; anchorage length

锚杆支护可充分发挥和提高围岩的自身强度和自稳能力,在巷道围岩支护工程中获得了广泛的应用<sup>[1-2]</sup>。锚杆-岩体界面脱粘失效是锚固系统的主要破坏形式,一旦锚固界面发生损伤或滑移,将对锚固系统的可靠性造成严重影响。因此,揭示锚固界面荷载传递规律对于巷道围岩支护控制具有重要意义。

锚固界面荷载传递是一个复杂应力传递过程。锚杆支护理论早期,一些学者便对锚固界面开展了研究<sup>[3-4]</sup>,由于不清楚锚固段的界面应力分布演化规律,通常采用剪应力沿锚固段均匀分布的假设进行锚固长度设计。20世纪70年代,Evangelista等<sup>[5]</sup>测得锚固界面的轴向剪应力沿锚固长度的分布,证明了沿锚固段剪应力是非均匀分布的;Wijk等<sup>[6]</sup>在Mindlin位移解的基础上,推导了锚杆锚固界面轴力和剪应力分布的解析解。虽然锚固界面应力分布的不均匀性已经被研究学者广泛认同,但是锚固界面发生脱粘失效全过程中锚固界面应力的分布演化规律仍存在不同见解。张季如等<sup>[7]</sup>建立了描述界面荷载传递的双曲函数模型,通过理论分析、参数演化和试验对比证明了弹性阶段界面摩阻力和锚杆轴力分布近似呈指数衰减分布;Kim等<sup>[8]</sup>建立了一种锚固界面有限元模型,通过数值模拟分析了弹塑性阶段界面剪应力和锚杆轴力的分布形式;Benmokrane等<sup>[9]</sup>针对水泥灌浆玻璃纤维塑料锚杆在轴向拉拔加载作用下的粘结破坏过程,提出了三线性模型。在上述工作基础上,众多学者进行大量研究<sup>[10-13]</sup>,证明了三线性粘结滑移本构模型能够较好地描述大多数锚固界面脱粘失效机制。

在巷道锚固支护工程设计中,一个关键问题就是锚固长度的确定,合理的锚固长度既能够保证足够的安全度,又可最大限度地发挥锚杆杆体自由段的变形吸能作用。肖世国等<sup>[14]</sup>对锚杆拉拔试验曲线进行拟合,分析了锚固界面剪应力分布特征,根据剪切极限强度理论获得了锚固长度与剪切强度的关系式;李国锋等<sup>[15]</sup>通过数值模拟探讨了剪切作用下锚固界面的失效特征,潘立志等<sup>[16]</sup>采用室内试验和数值模拟研究了矿用托盘尺寸对锚固承载力的作用及影响,均对锚固设计参数的确定具有重要的参考意义。目前,巷道围岩锚杆锚固长度设计仍然过于依赖工程经验,缺乏合适的计算依据<sup>[17]</sup>。决定锚固长度设计的重要因素是极限锚固力,其值与锚固段剪应力分布规律直接相关。因此,采用表征锚固界面粘结失效过程的三线性本构模型开展理论分析,深入探讨锚固界面剪应力分布及荷载传递响应规律,可为巷道围岩锚固支护参数设计提供参考。

## 1 锚固界面粘结滑移模型

### 1.1 界面荷载传递基本方程

矿山巷道围岩支护通常采用如图1所示的端部锚固方式,围岩变形时,载荷由岩体传递到锚杆,锚杆产生轴向拉伸荷载,在锚固端面形成锚固端头拉拔力,其中锚杆自由段提供连接锚头和锚固段以及承受拉伸变形的作用,而锚固粘结承载作用主要由锚固段提供,因此对锚固段承载能力的研究具有重要意义。

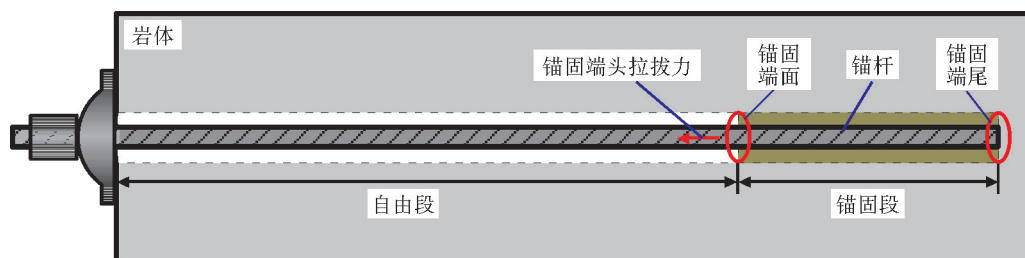


图1 端部锚固示意图

Fig. 1 Schematic diagram of end anchorage

锚固界面的承载性能由锚杆-岩体之间的载荷传递规律决定,为便于分析锚固界面应力随锚杆拉拔力的损伤演化规律,将复杂的锚固界面简化为虚拟厚度界面层,只研究锚杆向岩体的载荷传递问题。如图 2(a)所示,将锚杆与岩体耦合界面的剪切协同变形作用简化为弹簧接触模型,锚杆侧面与岩体之间以切向线弹簧连接,定义锚杆-岩体之间界面单元的载荷传递刚度  $k_{ss}$ , 表征界面剪应力  $\tau_s$  随位移  $\delta_s$  的演化关系,该切向线弹簧的刚度即为  $k_{ss}$ 。在试验标定和理论分析的基础上,获得锚杆-岩体间界面综合模型参数,便可以有效模拟室内试验及工程测试结果。

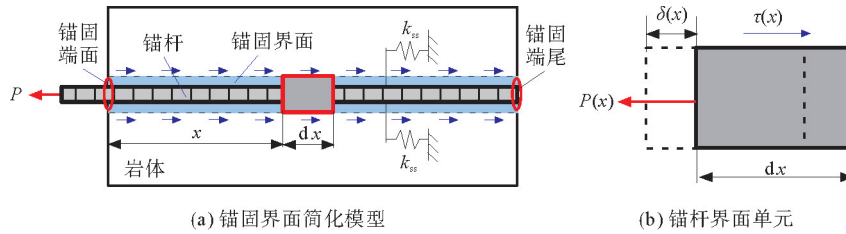


图 2 基于刚度的锚杆载荷传递分析图

Fig. 2 Analysis diagram of rock bolt load transfer based on stiffness

如图 2(b)所示,在锚固粘结段上截取锚固单元体,单元体的静力平衡条件为:

$$dP(x) = -2\pi r_b \tau(x) dx \tag{1}$$

式中:  $x$  为单元体所处的锚固深度;  $P(x)$  为沿锚固长度方向锚杆轴力分布函数;  $\tau(x)$  为沿锚杆锚固深度方向的剪应力分布函数;  $r_b$  为锚杆半径。

通过计算单元体产生的弹性伸长量,可得:

$$\frac{d\delta(x)}{dx} = -\frac{1}{\pi r_b^2 E_b} P(x) \tag{2}$$

式中:  $E_b$  为锚杆的弹性模量;  $\delta(x)$  为沿锚杆锚固长度方向的剪切位移分布函数。

对式(2)求导,并将式(1)代入,得到锚固界面载荷传递基本方程为:

$$\frac{d^2 \delta(x)}{dx^2} = \frac{2}{r_b E_b} \tau(x) \tag{3}$$

### 1.2 三线性粘结滑移模型本构关系

图 3 为表征锚固界面单元剪切应力与剪切位移关系的三线性粘结滑移本构模型。该本构模型将锚固界面单元脱粘失效过程分为三个阶段:①弹性阶段。剪应力随剪切位移线性增加,当剪应力达到峰值剪应力  $\tau_s^d$  时,锚固界面单元开始损伤;②软化阶段。剪应力随剪切位移线性下降,当剪应力下降至滑移剪应力  $\tau_s^s$  时,进入残余剪应力阶段;③摩擦滑移阶段。又称为残余剪应力阶段,摩擦滑移起主导作用,剪应力恒定不变。采用三线性粘结滑移模型可有效描述锚固界面单元逐渐脱粘、滑移的特征,其中本构模型参数可通过短锚固拉拔试验进行标定。

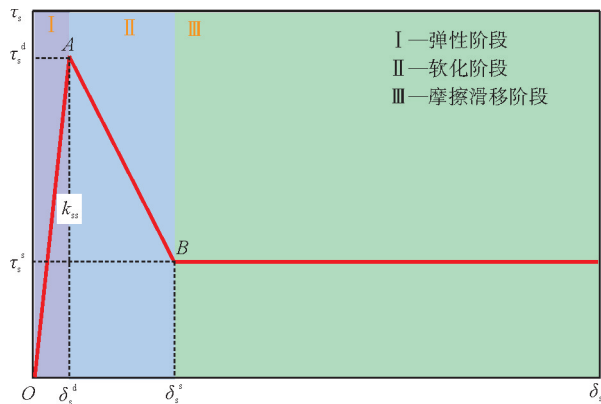


图 3 三线性粘结滑移本构模型

Fig. 3 Trilinear bond-slip constitutive model

锚固界面单元剪应力随剪切位移的损伤演化关系可通过数学表达式进行描述,根据图 3 所示锚固界面三线性粘结滑移模型,求得其本构关系为:

$$\tau_s = \begin{cases} K_{OA}\delta_s, & \delta_s \leq \delta_s^d; \\ \tau_s^d + K_{AB}(\delta_s - \delta_s^d), & \delta_s^d \leq \delta_s \leq \delta_s^s; \\ \tau_s^s, & \delta_s^s \leq \delta_s \leq \delta_s^f. \end{cases} \quad (4)$$

式中： $\tau_s$  为界面单元剪应力； $\delta_s$  为锚杆-岩体界面之间的相对剪切位移； $\delta_s^d$  为界面单元损伤起始剪切位移； $\delta_s^s$  为界面单元滑移起始剪切位移； $K_{OA}$  为 OA 段的斜率， $K_{OA} = \frac{\tau_s^d}{\delta_s^d}$ ，等于弹性阶段的载荷传递刚度  $k_{ss}$ ； $K_{AB}$  为 AB 段的斜率， $K_{AB} = \frac{\tau_s^d - \tau_s^s}{\delta_s^d - \delta_s^s}$ 。

## 2 锚杆岩体界面载荷传递过程理论分析

在轴向拉伸载荷作用下，锚固界面单元将依次经历弹性、软化、摩擦滑移阶段，而锚固界面的状态由全体界面单元所处阶段决定，锚固粘结段长度范围内将会出现部分弹性段、软化段及摩擦滑移段共存的情况，各阶段在锚固段上的占比及其应力分布演化规律与界面模型的本构参数密切相关。下面根据锚固界面单元剪应力的演化状态对界面剪应力分布和锚杆轴力分布情况进行理论分析。

### 2.1 弹性阶段

在轴向拉伸载荷作用下，当锚杆承受轴向拉伸载荷较小时，锚固界面处于全长弹性状态，如图 4 所示。

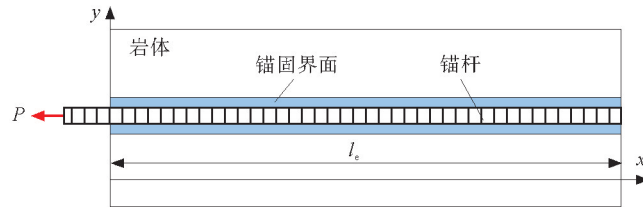


图 4 锚固粘结界面弹性阶段示意图

Fig. 4 Schematic diagram of elastic stage of anchorage bonding interface

由式(4)可得，锚固界面弹性阶段的界面剪应力和剪切位移的关系为：

$$\tau(x) = K_{OA}\delta(x). \quad (5)$$

将式(5)代入式(3)，得到弹性阶段锚固界面基本微分方程为：

$$\frac{d^2\delta(x)}{dx^2} = \frac{2K_{OA}}{r_b E_b}\delta(x). \quad (6)$$

设参数  $\alpha^2 = \frac{2K_{OA}}{r_b E_b}$ ，则式(6)简化为：

$$\frac{d^2\delta(x)}{dx^2} = \alpha^2\delta(x). \quad (7)$$

将锚固界面前后两端处轴力的边界条件  $P_e(x)|_{x=0} = P_0, P_e(x)|_{x=L} = 0$  代入式(7)，求解得锚固界面处于全长弹性状态下，沿锚固长度方向上界面剪应力和锚杆轴力的分布函数为：

$$\tau_e(x) = \frac{K_{OA}P_0 \cosh[\alpha(L-x)]}{\pi r_b^2 E_b \alpha \sinh(\alpha L)}, \quad (8)$$

$$P_e(x) = \frac{P_0 \sinh[\alpha(L-x)]}{\sinh(\alpha L)}. \quad (9)$$

### 2.2 弹性-软化阶段

随着锚杆轴向拉伸位移的增加，当拉拔端界面的剪应力达到峰值剪应力  $\tau_s^d$  时，锚固界面在锚固端面处首先进入软化阶段，并逐渐向锚固深处延伸，锚固界面进入弹性-软化阶段，如图 5 所示。

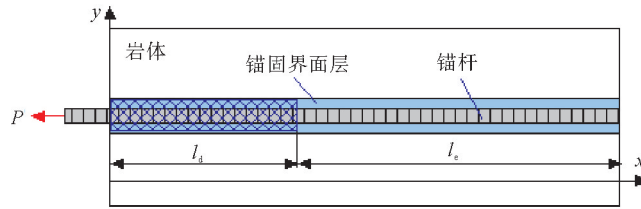


图 5 锚固粘结界面弹性-软化阶段示意图

Fig. 5 Schematic diagram of elastic-softening stage of anchorage bonding interface

假设在某拉拔时刻,软化段的长度为  $l_d$ , 弹性段的长度为  $l_e$ , 而锚固长度  $L$  等于两者之和,即:

$$L = l_d + l_e. \quad (10)$$

将式(4)代入式(3),得到弹性-软化阶段锚固界面基本微分方程为:

$$\frac{d^2 \delta(x)}{dx^2} = \begin{cases} \alpha^2 \delta(x), & 0 \leq \delta(x) \leq \delta_s^d (\text{弹性段}); \\ -\beta^2 \delta(x) + \frac{2(\tau_s^d - K_{AB} \delta_s^d)}{r_b E_b}, & \delta_s^d \leq \delta(x) \leq \delta_s^s (\text{软化段}). \end{cases} \quad (11)$$

式中:  $\beta^2 = \left| \frac{2K_{AB}}{r_b E_b} \right| = -\frac{2K_{AB}}{r_b E_b}$ .

在弹性段 ( $l_d \leq x \leq L$ ), 将锚固界面剪应力及锚杆轴力边界条件  $P_e(x) \big|_{x=L} = 0, \tau_e(x) \big|_{x=l_d} = \tau_s^d$  代入式(11), 求得锚固界面弹性段内的界面剪应力以及锚杆轴力的分布函数分别为:

$$\tau_e(x) = \frac{\tau_s^d \cosh[\alpha(L-x)]}{\cosh[\alpha(L-l_d)]}, \quad (12)$$

$$P_e(x) = \frac{\pi r_b^2 E_b \alpha \tau_s^d \sinh[\alpha(L-x)]}{K_{OA} \cosh[\alpha(L-l_d)]}. \quad (13)$$

在软化段 ( $0 \leq x \leq l_d$ ), 将锚固界面剪应力边界条件以及轴力的连续性条件  $\tau_d(x) \big|_{x=l_d} = \tau_s^d, P_d(x) \big|_{x=l_d} = P_e(x) \big|_{x=l_d}$  代入式(11), 可求得锚固界面软化段内的界面剪应力以及锚杆轴力分布函数分别为:

$$\tau_d(x) = \tau_s^d \cos[\beta(l_d-x)] + \frac{\alpha K_{AB} \tau_s^d}{\beta K_{OA}} \tanh[\alpha(L-l_d)] \sin[\beta(l_d-x)], \quad (14)$$

$$P_d(x) = \pi r_b^2 E_b \left\{ \frac{\alpha \tau_s^d \tanh[\alpha(L-l_d)] \cos[\beta(l_d-x)]}{K_{OA}} - \frac{\beta \tau_s^d \sin[\beta(l_d-x)]}{K_{AB}} \right\}. \quad (15)$$

将  $x=0$  代入式(15)求得锚固端面处的载荷  $P_0$  随软化段长度  $l_d$  变化的关系式为:

$$P_0 = \pi r_b^2 E_b \left\{ \frac{\alpha \tau_s^d \tanh[\alpha(L-l_d)] \cos(\beta l_d)}{K_{OA}} - \frac{\beta \tau_s^d \sin(\beta l_d)}{K_{AB}} \right\}. \quad (16)$$

### 2.3 全长软化阶段

当锚固长度较小时,随着锚杆轴向拉伸位移的增加,锚固界面可能出现全长粘结损伤,进入全长软化阶段,如图 6 所示。

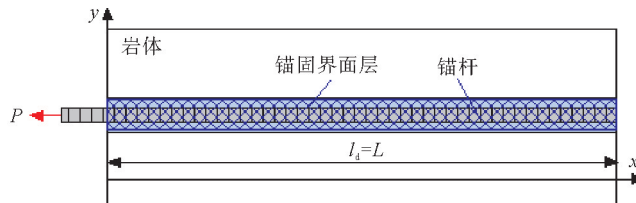


图 6 锚固粘结界面全长软化阶段示意图

Fig. 6 Schematic diagram of full-length softening stage of anchorage bonding interface

锚固界面基本微分方程为:

$$\frac{d^2 \delta(x)}{dx^2} = -\beta^2 \delta(x) + \frac{2(\tau_s^d - K_{AB} \delta_s^d)}{r_b E_b}, \quad \delta_s^d \leq \delta(x) \leq \delta_s^s. \quad (17)$$

根据锚固界面的边界条件  $P(x)|_{x=L}=0, P(x)|_{x=0}=P_0$ , 求得锚固界面全长软化阶段界面剪应力以及锚杆轴力分布函数分别为:

$$\tau_d(x) = -\frac{K_{AB} P_0 \cos[\beta(L-x)]}{\pi r_b^2 E_b \beta \sin(\beta L)}, \quad (18)$$

$$P_d(x) = \frac{P_0 \sin[\beta(L-x)]}{\sin(\beta L)}. \quad (19)$$

### 2.4 弹性-软化-摩擦滑移阶段

当锚固长度较长时,随着锚杆轴向拉伸位移的增加,当界面锚固端面处的剪应力减小至  $\tau_s^s$  时,锚固界面在锚固端面处首先进入滑移阶段,并逐渐向锚固深处延伸,而锚固端尾部分仍处于弹性阶段,锚固界面进入弹性-软化-摩擦滑移三段共存阶段,如图7所示。

假设在某拉拔时刻,滑移段的长度为  $l_f$ , 软化段长度为  $l_d$ , 弹性段长度为  $l_e$ , 锚固长度等于三者之和,即:

$$L = l_f + l_d + l_e. \quad (20)$$

将式(4)代入式(3),得到弹性-软化-摩擦滑移阶段锚固界面基本微分方程为:

$$\frac{d^2 \delta(x)}{dx^2} = \begin{cases} \alpha^2 \delta(x), & 0 \leq \delta(x) \leq \delta_s^d \text{ (弹性段)}; \\ -\beta^2 \delta(x) + \frac{2(\tau_s^d - K_{AB} \delta_s^d)}{r_b E_b}, & \delta_s^d \leq \delta(x) \leq \delta_s^s \text{ (软化段)}; \\ \frac{2\tau_s^s}{r_b E_b}, & \delta_s^s \leq \delta(x) \text{ (滑移段)}. \end{cases} \quad (21)$$

在弹性段 ( $l_f + l_d \leq x \leq L$ ), 将锚固界面剪应力及锚杆轴力边界条件  $\tau_e(x)|_{x=l_d+l_f} = \tau_s^d, P_e(x)|_{x=L} = 0$  代入式(21), 求解得到锚固界面弹性段内的界面剪应力以及锚杆轴力的分布函数分别为:

$$\tau_e(x) = \frac{\tau_s^d \cosh[\alpha(L-x)]}{\cosh[\alpha(L-l_d-l_f)]}, \quad (22)$$

$$P_e(x) = \frac{\pi r_b^2 E_b \alpha \tau_s^d \sinh[\alpha(L-x)]}{K_{OA} \cosh[\alpha(L-l_d-l_f)]}. \quad (23)$$

在锚固界面软化段 ( $l_f \leq x \leq l_f + l_d$ ) 内, 将软化段界面剪应力边界条件及锚杆的轴力连续性条件  $\tau_d(x)|_{x=l_d+l_f} = \tau_s^d, \tau_d(x)|_{x=l_f} = \tau_s^s, P_d(x)|_{x=l_d+l_f} = P_e(x)|_{x=l_d+l_f}$  代入式(21), 求解得到锚固界面软化段内的界面剪应力分布函数以及锚杆轴力的分布函数分别为:

$$\tau_d(x) = \frac{\tau_s^s \sin[\beta(l_d+l_f-x)] - \tau_s^d \sin[\beta(l_f-x)]}{\sin(\beta l_d)}, \quad (24)$$

$$P_d(x) = \pi r_b^2 E_b \tau_s^s \left\{ \frac{\alpha \tanh[\alpha(L-l_d-l_f)] \cos[\beta(l_d+l_f-x)]}{K_{OA}} - \frac{\beta \sin[\beta(l_d+l_f-x)]}{K_{AB}} \right\}. \quad (25)$$

在锚固界面摩擦滑移段 ( $0 \leq x \leq l_f$ ) 内, 将锚杆轴力边界条件和连续性条件  $P_f(x)|_{x=l_f} = P_d(x)|_{x=l_f}, P_f(x)|_{x=0} = P_0$  代入式(21), 求得锚固界面摩擦滑移段内的界面剪应力以及锚杆轴力的分布函数分别为:

$$\tau_f(x) = \tau_s^s, \quad (26)$$

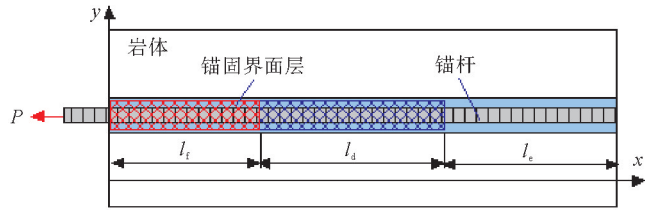


图7 锚固粘结界面弹性-软化-滑移阶段示意图  
Fig. 7 Schematic diagram of elastic-softening-sliding stage of anchorage bonding interface

$$P_f(x) = -\pi r_b^2 E_b \left\{ \frac{\beta \tau_s^d \sin(\beta l_d)}{K_{AB}} - \frac{\alpha \tau_s^d \tanh[\alpha(L - l_d - l_f)] \cos(\beta l_d)}{K_{OA}} - \frac{2\tau_s^s(l_f - x)}{r_b E_b} \right\} \quad (27)$$

将  $x=0$  代入式(27),求得锚固界面处于弹性-软化-摩擦滑移阶段锚固端面处的载荷随滑移段长度  $l_f$  变化的关系式为:

$$P_0 = -\pi r_b^2 E_b \left\{ \frac{\beta \tau_s^d \sin(\beta l_d)}{K_{AB}} - \frac{\alpha \tau_s^d \tanh[\alpha(L - l_d - l_f)] \cos(\beta l_d)}{K_{OA}} - \frac{2\tau_s^s l_f}{r_b E_b} \right\} \quad (28)$$

### 2.5 软化-摩擦滑移阶段

随着锚杆轴向拉伸位移的继续增加,当界面锚固端尾处的剪应力增加至峰值剪应力  $\tau_s^d$  时,锚固界面弹性段消失,进入软化-摩擦滑移阶段,如图 8 所示。

假设在某拉拔时刻,软化段的长度为  $l_d$ ,滑移段的长度为  $l_f$ ,锚固长度等于两者之和,即:

$$L = l_d + l_f. \quad (29)$$

锚固界面基本微分方程为:

$$\frac{d^2 \delta(x)}{dx^2} = \begin{cases} -\beta^2 \delta(x) + \frac{2(\tau_s^d - K_{AB} \delta_s^d)}{r_b E_b}, \delta_s^d \leq \delta(x) \leq \delta_s^s \text{ (软化段)}; \\ \frac{2\tau_s^f}{r_b E_b}, \delta_s^s \leq \delta(x) \text{ (滑移段)}. \end{cases} \quad (30)$$

在软化段( $l_f \leq x \leq L$ ),将锚固界面剪应力及锚杆轴力边界条件为  $P_d(x)|_{x=L} = 0, \tau_d(x)|_{x=l_f} = \tau_s^s$  代入式(30),求解得锚固界面软化段的界面剪应力以及锚杆轴力的分布函数分别为:

$$\tau_d(x) = \frac{\tau_s^s \cos[\beta(L-x)]}{\cos[\beta(L-l_f)]}, \quad (31)$$

$$P_d(x) = -\frac{\pi r_b^2 E_b \beta \tau_s^s \sin[\beta(L-x)]}{K_{AB} \cos[\beta(L-l_f)]}. \quad (32)$$

在摩擦滑移段( $0 \leq x \leq l_f$ ),将锚固界面摩擦滑移段的界面剪应力边界条件和锚杆轴力的连续性条件  $P_f(x)|_{x=l_f} = P_d(x)|_{x=l_f}, \delta_f(x)|_{x=l_f} = \delta_s^s$  代入式(32),求解得锚固界面摩擦滑移段的界面剪应力以及锚杆轴力的分布函数分别为:

$$\tau_f(x) = \tau_s^s, \quad (33)$$

$$P_f(x) = 2\pi r_b \tau_s^s (l_f - x) + \frac{2\pi r_b \tau_s^s \tan[\beta(L-l_f)]}{\beta}. \quad (34)$$

将  $x=0$  代入式(34),求得锚固界面处于软化-摩擦滑移阶段锚固端面处载荷随  $l_f$  变化的关系式为:

$$P_0 = 2\pi r_b \tau_s^s l_f + \frac{2\pi r_b \tau_s^s \tan[\beta(L-l_f)]}{\beta}. \quad (35)$$

### 2.6 全长摩擦滑移阶段

随着锚杆轴向拉伸位移的继续增加,当界面锚固端尾处的剪应力降低至残余剪应力  $\tau_s^s$  时,锚固界面软化段消失,滑移段布满整个锚固段,即进入全长摩擦滑移阶段,如图 9 所示。

锚固界面剪应力以及锚杆轴力的分布函数分别为:

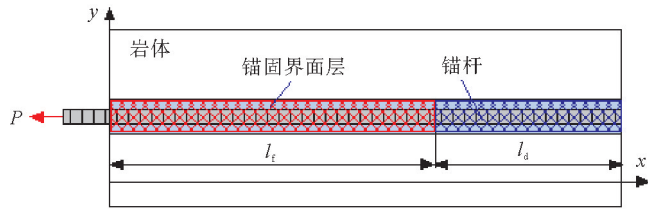


图 8 锚固粘结界面软化-滑移阶段示意图

Fig. 8 Schematic diagram of softening-sliding stage of anchorage bonding interface

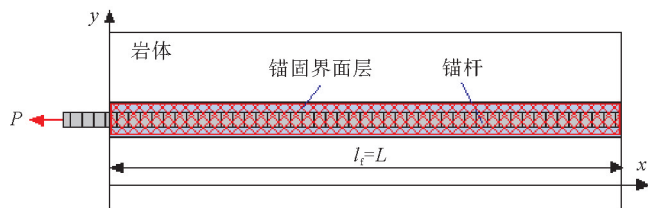


图 9 锚固粘结界面滑移阶段示意图

Fig. 9 Schematic diagram of sliding stage of anchorage bonding interface

$$\tau_f(x) = \tau_s^s, \tag{36}$$

$$P_f(x) = P_0 - 2\pi r_b \tau_s^s x. \tag{37}$$

式中： $\delta_0$  为锚固端面的剪切位移。

### 3 锚固界面载荷传递分析

#### 3.1 界面剪应力及锚杆轴力分布

根据上述理论分析可知,锚固界面轴向拉伸过程中经历了弹性、弹性-软化、全长软化或弹性-软化-摩擦滑移、软化-摩擦滑移、全长摩擦滑移五个阶段。Li 等<sup>[18]</sup>在研究锚杆锚固强度时进行室内短锚杆拉拔试验,为进一步分析锚固界面的剪应力及锚杆轴力分布演化规律,对其室内短锚杆锚固拉拔试验获得的试验数据进行处理,基于试验数据标定了一组三线性锚固界面本构模型参数,如表 1 所示。

表 1 锚杆及界面本构模型参数

Table 1 Parameters of constitutive model of anchorage interface

| 锚杆半径<br>$r_b$ /mm | 锚杆弹性模量<br>$E_b$ /GPa | 界面极限强度<br>$\tau_s^d$ /MPa | 界面残余强度<br>$\tau_s^s$ /MPa | 界面极限位移<br>$\delta_s^d$ /mm | 界面残余位移<br>$\delta_s^s$ /mm |
|-------------------|----------------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 10                | 200                  | 7.0                       | 2.5                       | 1.0                        | 2.0                        |

在已知锚固界面本构模型参数的情况下,锚固界面剪应力的分布形态及发展过程与锚固长度相关,锚固界面进入弹性-软化阶段后,若  $\tau_d(x)$  满足式(38)条件,则当锚固端尾弹性段消失,锚固端面还未出现摩擦滑移段时,锚固段全长处于软化阶段。

$$\begin{cases} \tau_d(x) |_{x=0} = \tau_s^s, \\ \tau_d(x) |_{x=l_d=L} = \tau_s^d. \end{cases} \tag{38}$$

将式(14)代入式(38),求得判定锚固界面是否出现全长软化阶段的临界锚固长度  $L_{cr} = 578$  mm。

若设计锚固长度  $L \geq L_{cr}$ ,随着锚固界面剪应力分布状态的演化,假设锚固界面进入弹性-软化-摩擦滑移阶段后,其软化段的长度不变,则在弹性-软化阶段结束时,锚固端面的剪应力为:

$$\tau_d(x) |_{x=0} = \tau_s^s. \tag{39}$$

将式(14)代入式(39),可以求解得到当设计锚固长度  $L \geq L_{cr}$  时,锚杆拉拔过程中界面剪应力分布的软化段最大长度  $l_{dmax}$ 。

根据锚固界面是否存在剪应力分布的全长软化阶段,可将锚固界面剪应力分布演化过程分为两种情况进行分析:其一,当设计的锚固长度  $L \leq L_{cr}$  时,锚固界面将经历弹性、弹性-软化、全长软化、软化-滑移、全长滑移五个阶段,出现软化段占据整个锚固长度的情况,假设锚固长度  $L = 400$  mm,其界面剪应力分布及演化规律如图 10(a)所示;其二,当设计的锚固长度  $L \geq L_{cr}$  时,锚固界面将经历弹性、弹性-软化、弹性-软化-滑移、软化-滑移、全长滑移五个阶段,假设锚固长度  $L = 700$  mm,其界面剪应力分布及演化规律如图 10(b)所示。结合式(8)、式(18)及式(36)可知,沿锚固长度方向,锚固界面弹性段内的剪应力呈双曲余弦函数衰减规律分布,软化段内的剪应力呈余弦函数上升规律分布,摩擦段内的剪应力呈均匀分布。该理论计算所得锚固界面弹性、软化、滑移段的剪应力分布规律与赵同彬等<sup>[19]</sup>提出的界面剪应力分布模型及 Li 等<sup>[20]</sup>拉拔试验结果基本相符。图 11 为对应于图 10 中各阶段的锚杆轴力分布演化图,可以看出,锚杆轴力随界面剪应力分布演化呈现不同形态的衰减分布规律。

#### 3.2 极限锚固力预计

极限锚固力是进行锚杆锚固长度设计的重要依据,锚固界面极限锚固力与界面剪应力分布演化规律有关,为求得已知锚固条件下的极限锚固力,需要确定极限锚固力所对应界面剪应力的分布状态。当不考虑摩擦滑移阶段的残余剪应力对极限锚固力的贡献时,极限锚固力存在于锚杆拉拔界面剪应力分布的弹性-软化阶段。对式(16)求极值,即将式(16)对  $l_d$  求导,并令其导数等于 0,假定求得的  $l_d$  与  $L$  的关系为:



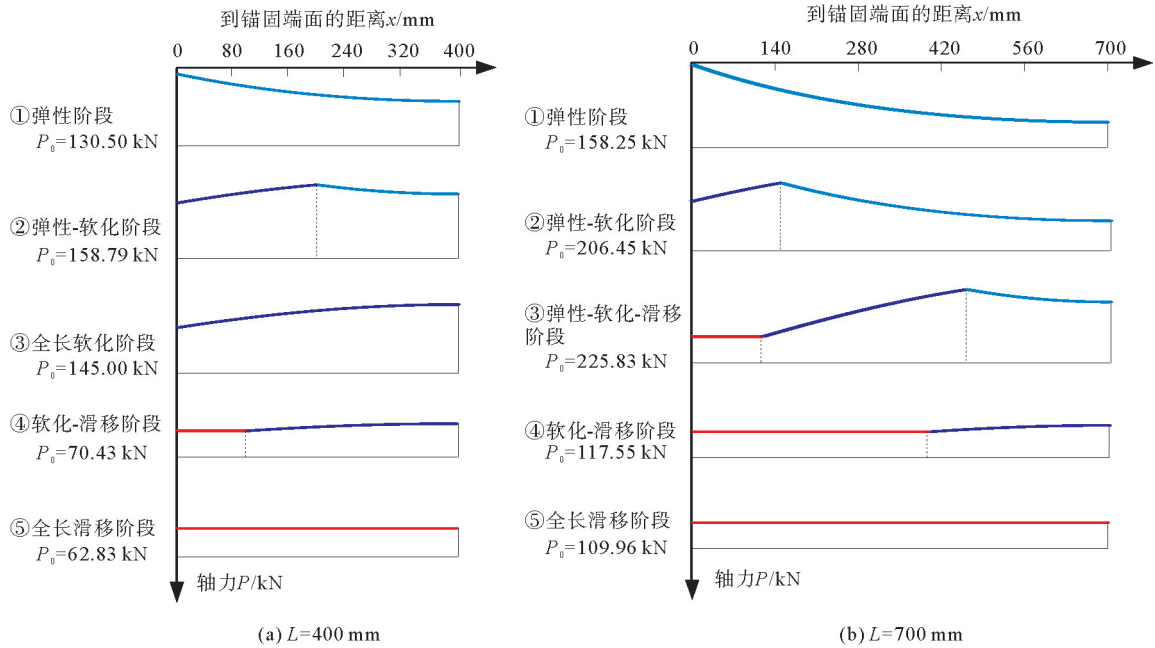


图 10 不同锚固长度界面剪应力分布演化过程图

Fig. 10 Evolution process diagram of shear stress distribution at interfaces with different anchorage lengths

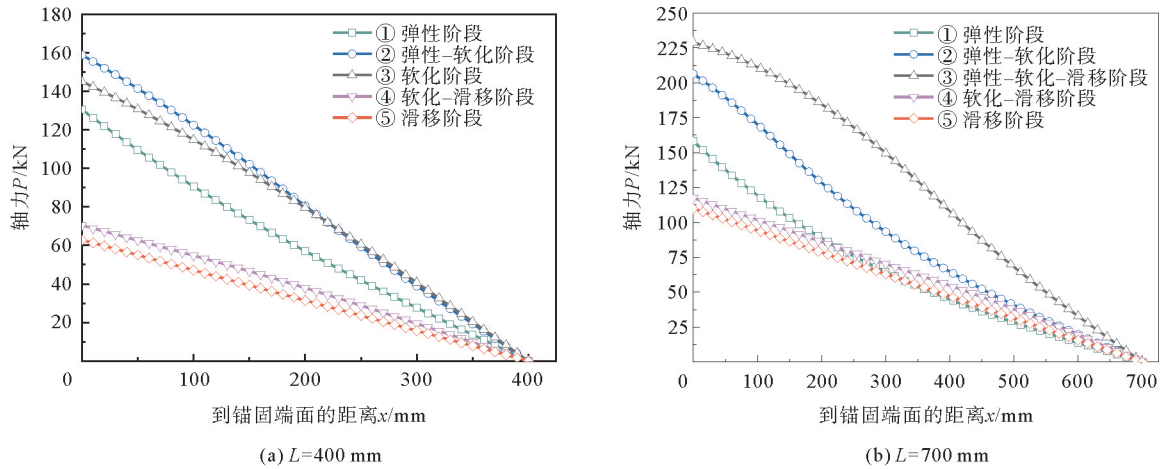


图 11 不同锚固长度锚杆轴力分布演化过程

Fig. 11 Evolution process of axial force distribution of rock bolts with different anchorage lengths

$$l_d = Q_1(L)。 \tag{40}$$

将式(40)带入式(16),可得不考虑残余剪应力影响的极限锚固力计算公式:

$$P_{1max} = \pi r_b^2 E_b \left\{ \frac{\alpha \tau_s^d \tanh[\alpha(L - Q_1(L))] \cos(\beta Q_1(L))}{K_{OA}} - \frac{\beta \tau_s^d \sin(\beta Q_1(L))}{K_{AB}} \right\}。 \tag{41}$$

当考虑滑移阶段剪应力分布对极限锚固力的贡献时,在锚杆拉拔过程中,极限锚固力出现在弹性-软化-滑移阶段。确定极限锚固力大小,需对式(28)求极值,将式(28)对  $l_f$  求导,令其导数等于 0,假定求得的  $l_f$  与  $L$  的关系为:

$$l_f = Q_2(L)。 \tag{42}$$

将式(42)带入式(28),可得考虑界面脱粘后存在残余剪应力的极限锚固力计算公式:

$$P_{2\max} = \pi r_b^2 E_b \left\{ \frac{\alpha \tau_s^d \tanh[\alpha(L - l_d - Q_2(L))]}{K_{OA}} \cos(\beta l_d) - \frac{\beta \tau_s^d \sin(\beta l_d)}{K_{AB}} + \frac{2\tau_s^s Q_2(L)}{r_b E_b} \right\} \quad (43)$$

式中,软化段长度  $l_d$  由式(39)确定。

在锚固条件确定的情况下,可通过标定试验确定本构模型参数,进而对不同锚固长度下的极限锚固力进行理论预计。

若根据界面剪应力均匀分布假设,界面极限锚固力计算公式为:

$$P_{3\max} = 2\pi r_b L \tau_s^d \quad (44)$$

假设锚固界面本构模型参数符合表 1 所列,根据式(41)、式(43)、式(44)计算可得极限锚固力随锚固长度的变化规律,如图 12 所示。由图 12 可以看出,当锚固段长度小于临界锚固长度  $L_{cr} = 578$  mm 时,增加锚固段长度能够有效提高界面极限锚固力,但界面剪应力均匀分布计算所得的极限锚固力大于按式(41)、式(43)求得的理论计算值;由于锚固界面不存在弹性-软化-滑移共存的阶段,极限锚固力存在于弹性-软化阶段,脱粘摩擦力对极限锚固力的计算无影响,故式(41)、式(43)求得的极限锚固力变化相同;当锚固段长度大于临界锚固长度  $L_{cr} = 578$  mm,假设界面剪应力均匀分布计算所得的极限锚固力仍随锚固长度的增加线性增加,按式(41)、式(43)求得的界面极限锚固力随锚固长度的增加增速逐渐减小;当锚固段长度大于 800 mm,若不考虑脱粘后残余的摩擦剪应力对极限锚固力的贡献,极限锚固力会随着锚固长度的增加趋近于某一固定值;若考虑残余剪应力贡献,增加锚固段长度仍然能够有效提高界面极限锚固力,但极限锚固力的增加幅度远小于假设剪应力均匀分布的情况。

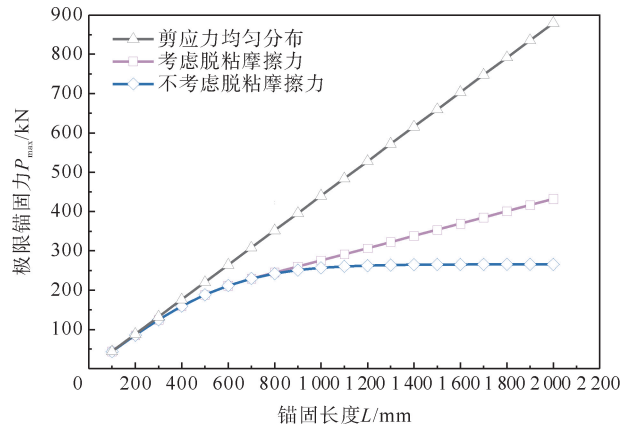


图 12 不同锚固长度下极限锚固力变化曲线

Fig. 12 Variation curve of ultimate anchorage force under different anchorage lengths

#### 4 锚固长度设计

在进行巷道围岩支护设计时,锚固长度设计应满足设计锚固力的需求,并取一定的安全系数。为防止破碎岩体垮落、稳定围岩变形、控制层状岩体张开位移等,根据工程经验、数值计算等手段评估给出稳定巷道围岩所需要的支护力后,可求得单根锚杆需要提供的支护抗力,而设计极限锚固力应大于工程现场所要求的锚杆支护抗力设计值。因此,定义锚固安全系数为:

$$F_s = \frac{P_{\max}}{P_a} \quad (45)$$

式中:  $F_s$  为锚固安全系数;  $P_{\max}$  为极限锚固力;  $P_a$  为岩体所需单根锚杆的支护抗力设计值。极限锚固力  $P_{\max}$  与设计锚固长度  $L_d$  的关系分别由式(41)和式(43)决定,难以获得解析解,但可通过带入具体参数求得。设  $L_d = Q_3(P_{\max})$ , 可得:

$$L_d = Q_3(F_s \cdot P_a) \quad (46)$$

设计实例:假设某锚杆锚固界面本构模型参数符合表 1 所列,根据现场地质力学条件,设计单根锚杆需要提供的支护抗力  $P_a = 150$  kN,联立式(41)和(46)、式(43)和(46),计算得到不同安全系数对应的设计锚固长度,如图 13 所示。

由图 13 可以看出,相同锚固长度下,假设剪应力均匀分布计算求得的安全系数偏大。当锚固长度小于临界锚固长度值  $L_{cr} = 578$  mm 时,增加锚固长度能够明显提高锚固界面的安全系数,当锚固长度达到

400 mm 时,锚固界面安全系数为 1。为降低锚固界面失效风险,通常要求锚固安全系数大于 1。当锚固长度超过临界锚固长度值  $L_{cr} = 578$  mm 后,若不考虑脱粘摩擦力对极限锚固力的贡献,锚固长度达到 1 000 mm 时,锚固安全系数达到 1.7,之后继续增加锚固长度,安全系数始终维持在 1.7 左右,基本不再增大;若考虑锚固界面脱粘后残余摩擦力对极限锚固力的贡献,安全系数随锚固长度的增加持续增大,但增速降低。根据设计实例计算结果,若取安全系数  $F_s = 1.5$ ,则设计锚固长度取 700 mm 为宜,锚固段具体设计长度还应考虑现场应力及施工扰动等情况。

## 5 结论

采用三线性粘结滑移模型表征锚固界面单元本构关系,通过理论推导和算例分析,对锚固界面载荷传递响应规律及现场锚固长度设计进行了探究,所得结论如下。

1) 三线性界面本构模型能够较好地反映锚固界面剪应力与剪切位移的阶段性特征,基于三线性剪切滑移模型理论推导得到了锚杆拉拔全过程界面剪应力和锚杆轴力的分布公式。

2) 基于给定界面模型参数可以求得判定锚固界面是否出现全长软化阶段的临界锚固长度  $L_{cr}$ 。在锚固粘结界面上,界面弹性段内的剪应力呈双曲余弦函数衰减规律分布,软化段内的剪应力呈余弦函数上升规律分布,摩擦段内的剪应力呈均匀分布。沿锚固长度方向,锚杆轴力随界面剪应力分布演化呈现多种形态的衰减分布规律。

3) 锚固界面极限锚固力与界面剪应力分布演化规律有关,当不考虑滑移阶段剪应力分布对极限锚固力的贡献时,极限锚固力随着锚固长度的增加趋近于某一固定值;但当考虑滑移阶段剪应力分布对极限锚固力的贡献时,极限锚固力随着锚固长度的增加呈正相关关系;在锚固长度设计时,假设锚固界面剪应力均匀分布求得相同锚固长度下的极限锚固力及安全系数偏大。

## 参考文献:

- [1] 宁义国,马双文,CAO Chen. 深部回采巷道锚固失效分析及支护对策[J]. 煤炭科学技术,2021,49(8):23-29.  
NING Yiguo,MA Shuangwen,CAO Chen. Analysis of bolting failure in deep mining roadway and support countermeasures [J]. Coal Science and Technology,2021,49(8):23-29.
- [2] 王志,尹延春,赵同彬,等. 软岩巷道扩孔锚固机理及支护控制数值模拟研究[J]. 山东科技大学学报(自然科学版),2021,40(3):35-43.  
WANG Zhi,YIN Yanchun,ZHAO Tongbin,et al. Numerical simulation study on bolting mechanism and support control of soft rock roadway[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology(Natural Science),2021,40(3):35-43.
- [3] GOTO Y. Cracks formed in concrete around deformed tension bars[J]. Journal of American Concrete Institute,1971,68(4):244-251.
- [4] SERRANO A,OLALLA C. Ultimate bearing capacity of rock masses[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences,1994,31(2):93-106.
- [5] EVANGELISTA A,SAPIO G. Behaviour of ground anchors in stiff clays[J/OL]. Revue Française de Géotechnique,1978,3. DOI:10.1051/geotech/1978003039.
- [6] WIJK G. A theoretical remark on the stress field around prestressed rock bolts[J]. International Journal of Rock Mechanics

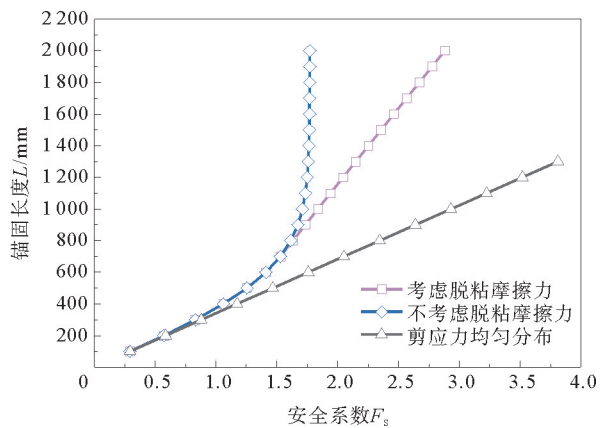


图 13 不同安全系数对应的锚固长度

Fig. 13 Anchorage lengths corresponding to different safety factors

- and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts,1978,15(6):289-294.
- [7] 张季如,唐保付. 锚杆荷载传递机理分析的双曲函数模型[J]. 岩土工程学报,2002,24(2):188-192.  
ZHANG Jiru,TANG Baofu. Hyperbolic function model to analyze load transfer mechanism on bolts[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering,2002,24(2):188-192.
- [8] KIM N K,PARK J S,KIM S K. Numerical simulation of ground anchors[J]. Computers and Geotechnics,2007,34(6):498-507.
- [9] BENMOKRANE B,CHENNOUF A,MITRI H S. Laboratory evaluation of cement-based grouts and grouted rock anchors [J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences,1995,32(7):633-642.
- [10] NEMCIK J,MA S,AZIZ N,et al. Numerical modelling of failure propagation in fully grouted rock bolts subjected to tensile load[J/OL]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences,2014,71. DOI:10.1016/j.ijrmms.2014.07.007.
- [11] CHEN J H,LIU P,ZHAO H B,et al. Analytical studying the axial performance of fully encapsulated rock bolts[J/OL]. Engineering Failure Analysis,2021,128(1). DOI:10.1016/j.engfailanal.2021.105580.
- [12] ZHONG W Y,AKANG L,PENG W,et al. An analytical analysis for the mechanical performance of fully-grouted rockbolts based on the exponential softening model[J]. International Journal of Mining Science and Technology,2022,32(5):981-995.
- [13] HØIEN A H,LI C C,ZHANG N. Pull-out and critical embedment length of grouted rebar rock bolts: Mechanisms when approaching and reaching the ultimate load[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering,2021,54(3):1431-1447.
- [14] 肖世国,周德培. 非全长粘结型锚索锚固段长度的一种确定方法[J]. 岩石力学与工程学报,2004,23(9):1530-1534.  
XIAO Shiguo,ZHOU Depei. Calculation method of length of anchoring segment for partial-cohesive cable[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering,2004,23(9):1530-1534.
- [15] 李国锋,王九红,刘建荣,等. 巷道围岩锚固结构面剪切特性与破坏特征研究[J]. 山东科技大学学报(自然科学版),2022,41(4):47-55.  
LI Guofeng,WANG Jiuhong,LIU Jianrong,et al. Study on shear properties and failure characteristics of bolted joint of roadway surrounding rock[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology(Natural Science),2022,41(4):47-55.
- [16] 潘立志,赵同彬,邢明录,等. 矿用碟形托盘压缩变形及承载特性研究[J]. 山东科技大学学报(自然科学版),2023,42(2):53-61.  
PAN Lizhi,ZHAO Tongbin,XING Minglu,et al. Research on compression deformation process and load-bearing characteristics of saucer tray used in mining[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology(Natural Science),2023,42(2):53-61.
- [17] 渠时勤,黄中木. 锚杆锚固段合理设计长度分析[J]. 重庆交通学院学报,2000,19(3):94-97.  
QU Shiqin,HUANG Zhongmu. Bond length prediction of fully-grouted cable bolts in rock[J]. Journal of Chongqing Jiaotong University,2000,19(3):94-97.
- [18] LI C C,KRISTIANSOON G,HØIEN A H. Critical embedment length and bond strength of fully encapsulated rebar rock bolts[J/OL]. Tunnelling Underground Space Technology,2016,59. DOI:10.1016/j.tust.2016.06.007.
- [19] 赵同彬,尹延春,谭云亮,等. 锚杆界面力学试验及剪应力传递规律细观模拟分析[J]. 采矿与安全工程学报,2011,28(2):220-224.  
ZHAO Tongbin,YIN Yanchun,TAN Yunliang,et al. Mechanical test of bolt interface and microscopic simulation of transfer law for shear stress[J]. Journal of Mining and Safety Engineering,2011,28(2):220-224.
- [20] LI C C,HØIEN A H. The experimental determination of shear stress distribution along fully grouted rock bolts with different bond lengths subjected to pull testing[J/OL]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences,2023,170. DOI:10.1016/j.ijrmms.2023.105557.

(责任编辑:吕海亮)