

基于部分参数约束的粒子加速器隧道控制网平差

刘忠贺,李宗春,何 华

(信息工程大学 地理空间信息学院,河南 郑州 450001)

摘要:为控制隧道控制网平差时的误差累积问题,提高隧道控制网平差精度,设计了 3 种约束方案。首先,考虑到测站铅垂线之间的不平行性,依据控制网规模计算测站铅垂线与储存环中心铅垂线之间的夹角,在平差时顾及该约束,使平差模型更加严密。然后,为提高隧道控制网的平面精度,使用全站仪对距离较远的控制点进行长边夹角测量,在平差过程中附加长边夹角约束。其次,按照一等水准规范,对隧道地面点进行水准测量,基于水准测量结果,采用最小二乘转换方法,将控制网转换至水平面,进一步提高控制网竖向精度。最后,对周长为 1 360 m 的隧道控制网进行仿真试验。结果表明,顾及测站垂差及水准点高程或高差平差值可提高控制网竖向精度;附加长边夹角约束可提高控制网平面精度;同时顾及测站垂差、长边夹角观测值及水准高程或高差平差值可提高控制网的点位精度,验证了约束条件的有效性。研究成果可为相关工程布设控制网提供参考。

关键词:自由设站;隧道控制网;误差累积;三维控制网平差

中图分类号:P258

文献标志码:A

Adjustment of particle accelerator tunnel control network based on partial parameter constraints

LIU Zhonghe, LI Zongchun, HE Hua

(School of Geospatial Information, Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: To control the error accumulation problem and improve the accuracy of the adjustment of tunnel control network, this study designed three constraint schemes. Firstly, considering the non-parallelism between the plumb-lines of the station, the angle of the plumb-line between the station and the storage ring center was calculated based on the control network. This constraint condition was taken into account during adjustment, making the adjustment model more rigorous. Secondly, in order to improve the plane accuracy of the tunnel control network, a total station was used to measure the long side angle of the control points that were far away, and the angle constraint was added in the adjustment process. Thirdly, the first-order levelling measurement was carried out for tunnel ground points. Based on the results of levelling, the control network was transformed to the horizontal plane by using the least square transformation method to further improve the vertical accuracy of the control network. Finally, a simulation experiment was conducted on a tunnel control network with a circumference of 1 360 m. The results indicate that considering the difference of the plumb-line between stations and benchmark leveling or elevation difference and adjustment value can improve the vertical accuracy of the control network. Adding the constraints of the angle of the long side can improve the plane accuracy of the control network. Simultaneously considering the angle of the plumb-line between stations, long side angle observation values, and benchmark leveling or elevation difference and adjustment value can improve the accuracy of control point positions, verifying the effectiveness of constraint

收稿日期:2023-11-11

基金项目:国家自然科学基金项目(41974216)

作者简介:刘忠贺(1995—),男,河南濮阳人,博士研究生,主要从事精密工程测量方面的研究。E-mail: 2936054806@qq.com
李宗春(1973—),男,山东日照人,教授,博士生导师,主要从事精密工程测量方面的研究,本文通信作者。

E-mail:13838092876@139.com

conditions. The research results can provide a reference for the deployment of control networks in related engineering projects.

Key words: free stationing; tunnel control network; error accumulation; adjustment of three-dimensional control network

粒子加速器隧道控制网^[1]是加速器设备安装调整的基准,也是设备成功运行的重要基础和保障,一般要求相邻相对点位精度优于±0.1 mm。激光跟踪仪测量系统(以下简称跟踪仪)是目前加速器隧道控制网测量和磁铁准直安装的主要仪器^[2],在较小范围内可实现高精度的点位坐标测量^[3-4],但其量程有限,一般采用自由设站法和搬站搭接的方式对整个隧道控制网进行测量,相邻测站只能通过公共点建立联系,使得测站之间的空间约束力较弱,公共点误差无法得到控制,且会传递到相邻的测站参数,测站参数误差又通过公共点传递到下一站,导致误差不断累积^[5]。另外,隧道控制网横向和竖向(垂直束流方向)观测条件差,也是影响控制网精度的重要因素^[6]。

从平差模型出发,三维控制网平差^[7-8]相比于“2+1”维平差更加严密和合理,能够充分利用观测数据并顾及控制网点之间的空间关系。加速器规模较小时,可以认为所有测站调平后铅垂线是平行的,数据处理时可采用边角网、测边网等平差方法,其精度一般能够满足要求^[9-11]。随着加速器规模的增大,隧道控制网平差时误差累积问题十分严重,需要顾及重力场不均匀性的影响,考虑各测站铅垂线同全局坐标系的竖向偏差,应附加其他测量仪器的高精度观测值或骨干网^[12]进行约束,以提高控制网的平差精度。此外,也可采用投影方式处理数据,要求跟踪仪在测量时需依铅垂线方向建立水平测站坐标系,平差前将所有观测数据投影到统一平面上,得到投影后的平面观测数据(平距和水平角观测值),然后进行平差计算。投影过程中,对原始观测值的归算带有近似性,会引入归算误差,且控制点的三维整体性被破坏。相比之下,三维网平差可直接利用原始观测值建立误差方程,数学模型更加严密,且观测数据利用充分,效率高于投影方式;但随测站数或工程范围的增加,三维网平差的误差累积问题愈发显著,导致控制网精度低,其效果较投影方式差。整体大地测量^[13]不需要参考椭球面作为计算基准面,因而也不用对几何观测量进行投影归算,在计算重力场扰动量时可免去积分概念。但是,大范围三维控制网的精度受到一定制约,如三角高程测量中的垂直角观测值受大气折光的影响,局部重力场的变化导致不同测站铅垂线方向的差异,所以在平差时应充分顾及。

依据最小二乘原则,可以达到合理消除隧道控制网各种几何条件不符值的目的,平差网形的最佳位置已经确定^[14]。对于较大规模的隧道控制网,其平差^[15-16]过程必然面临误差累积问题,为了探究不同约束条件对隧道控制网平差精度的改善情况,对某周长为1 360 m的隧道控制网进行了仿真设计试验。采用经典自由网平差和附合网平差^[17],对顾及测站间垂线偏差、附加长边夹角观测值约束及一等水准测量等多类观测值的三维控制网平差模型进行研究,以期控制误差累积,提高控制网的精度。

1 光束法平差模型

1.1 自由设站与搭接测量

跟踪仪设站后,通过测量目标点A的水平方向H、天顶距V和斜距D计算其测站坐标系下的三维坐标A(x,y,z),即

$$\begin{cases} x = D \sin V \cos H, \\ y = D \sin V \sin H, \\ z = D \cos V. \end{cases} \quad (1)$$

如图1所示,相邻测站间的搭接通过公共点的转换实现,将所有测站转换到以某测站坐标系为测量坐标系的统一坐标系下,即可得到目标点在测量坐标系下的坐标。

假设在第*i*测站对第*j*个控制点进行

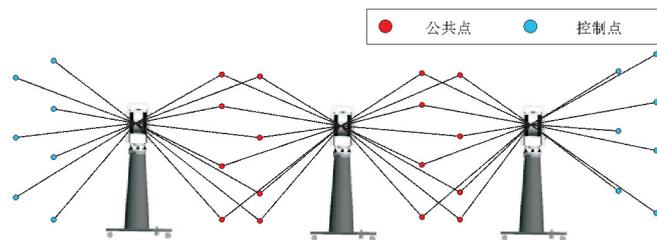


图1 自由设站与搭接测量

Fig. 1 Free station setting and overlap measurement

测量,获得该点在第 i 测站坐标系下的角度和距离观测值为 $({}^iH_j, {}^iV_j, {}^iD_j)$, 对应坐标为 $({}^ix_j, {}^iy_j, {}^iz_j)$, $i = 1, 2, \dots, m$, 该点在测量坐标系下的坐标为 (X_j, Y_j, Z_j) , $j = 1, 2, \dots, n$ 。设测量坐标系分别沿 X 轴、 Y 轴、 Z 轴平移 $T_{x_i}, T_{y_i}, T_{z_i}$, 然后绕 Z 轴、 Y 轴、 X 轴逆时针旋转 $\gamma_i, \beta_i, \alpha_i$ 角度后与第 i 测站所在坐标系重合, 对应旋转矩阵分别为 $\mathbf{R}(\gamma_i), \mathbf{R}(\beta_i), \mathbf{R}(\alpha_i)$, 且尺度因子为 1, 则第 j 个目标点在第 i 测站坐标系下的坐标 $({}^ix_j, {}^iy_j, {}^iz_j)$ 与测量坐标系下的坐标 (X_j, Y_j, Z_j) 的转换关系为

$$\begin{bmatrix} {}^ix_j \\ {}^iy_j \\ {}^iz_j \end{bmatrix} = \mathbf{R}_i \cdot \begin{bmatrix} X_j - T_{x_i} \\ Y_j - T_{y_i} \\ Z_j - T_{z_i} \end{bmatrix}; \quad (2)$$

式中, \mathbf{R}_i 为测站坐标系与测量坐标系之间的旋转矩阵, 有

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}(\alpha_i) \cdot \mathbf{R}(\beta_i) \cdot \mathbf{R}(\gamma_i) = \begin{bmatrix} {}^ia_1 & {}^ia_2 & {}^ia_3 \\ {}^ib_1 & {}^ib_2 & {}^ib_3 \\ {}^ic_1 & {}^ic_2 & {}^ic_3 \end{bmatrix}。 \quad (3)$$

式中: ${}^ia_1, {}^ia_2, {}^ia_3, {}^ib_1, {}^ib_2, {}^ib_3, {}^ic_1, {}^ic_2, {}^ic_3$ 为旋转矩阵的 9 个元素。

1.2 误差方程

假设目标点 A 在第一象限, 在第 i 测站对第 j 个目标点 A 进行测量, 以 $({}^iH_j, {}^iV_j, {}^iD_j)$ 为观测值, 以 $(T_{x_i}, T_{y_i}, T_{z_i}, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, X_j, Y_j, Z_j)$ 为待求参数, 可得:

$$\begin{cases} {}^iH_j = \arctan \frac{{}^ib_1 \cdot (X_j - T_{x_i}) + {}^ib_2 \cdot (Y_j - T_{y_i}) + {}^ib_3 \cdot (Z_j - T_{z_i})}{{}^ia_1 \cdot (X_j - T_{x_i}) + {}^ia_2 \cdot (Y_j - T_{y_i}) + {}^ia_3 \cdot (Z_j - T_{z_i})}, \\ {}^iV_j = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{{}^ic_1 \cdot (X_j - T_{x_i}) + {}^ic_2 \cdot (Y_j - T_{y_i}) + {}^ic_3 \cdot (Z_j - T_{z_i})}{\sqrt{({}^ia_1 \cdot (X_j - T_{x_i}) + {}^ia_2 \cdot (Y_j - T_{y_i}) + {}^ia_3 \cdot (Z_j - T_{z_i}))^2 + ({}^ib_1 \cdot (X_j - T_{x_i}) + {}^ib_2 \cdot (Y_j - T_{y_i}) + {}^ib_3 \cdot (Z_j - T_{z_i}))^2}}, \\ {}^iD_j = \sqrt{(X_j - T_{x_i})^2 + (Y_j - T_{y_i})^2 + (Z_j - T_{z_i})^2}. \end{cases} \quad (4)$$

将式(4)线性化, 按泰勒级数展开并保留一次项, 得到观测值误差方程

$$\mathbf{V} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}. \quad (5)$$

式中: $\mathbf{V} = [V_{iH_j} \quad V_{iV_j} \quad V_{iD_j}]^T$ 为观测值改正数; 未知参数近似值 $\mathbf{X}_0 = (T_{x_i}^0, T_{y_i}^0, T_{z_i}^0, \alpha_i^0, \beta_i^0, \gamma_i^0, X_j^0, Y_j^0, Z_j^0)^T$

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_j^H \\ l_j^V \\ l_j^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^iH_j - \arctan \frac{{}^iy_j^0}{{}^ix_j^0} \\ {}^iV_j + \arctan \frac{{}^iz_j^0}{\sqrt{({}^ix_j^0)^2 + ({}^iy_j^0)^2}} - \frac{\pi}{2} \\ {}^iD_j - {}^iD_j^0 \end{bmatrix}, \quad {}^iD_j^0 = \sqrt{(X_j^0 - T_{x_i}^0)^2 + (Y_j^0 - T_{y_i}^0)^2 + (Z_j^0 - T_{z_i}^0)^2}; \quad \hat{\mathbf{x}} =$$

$(\delta T_{x_i}, \delta T_{y_i}, \delta T_{z_i}, \delta \alpha_i, \delta \beta_i, \delta \gamma_i, \delta X_j, \delta Y_j, \delta Z_j)^T$ 为参数改正数; \mathbf{B} 为系数矩阵。

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^iH_j}{\partial T_{x_i}} & \frac{\partial {}^iH_j}{\partial T_{y_i}} & \frac{\partial {}^iH_j}{\partial T_{z_i}} & \frac{\partial {}^iH_j}{\partial \alpha_i} & \frac{\partial {}^iH_j}{\partial \beta_i} & \frac{\partial {}^iH_j}{\partial \gamma_i} & \frac{\partial {}^iH_j}{\partial X_j} & \frac{\partial {}^iH_j}{\partial Y_j} & \frac{\partial {}^iH_j}{\partial Z_j} \\ \frac{\partial {}^iV_j}{\partial T_{x_i}} & \frac{\partial {}^iV_j}{\partial T_{y_i}} & \frac{\partial {}^iV_j}{\partial T_{z_i}} & \frac{\partial {}^iV_j}{\partial \alpha_i} & \frac{\partial {}^iV_j}{\partial \beta_i} & \frac{\partial {}^iV_j}{\partial \gamma_i} & \frac{\partial {}^iV_j}{\partial X_j} & \frac{\partial {}^iV_j}{\partial Y_j} & \frac{\partial {}^iV_j}{\partial Z_j} \\ \frac{\partial {}^iD_j}{\partial T_{x_i}} & \frac{\partial {}^iD_j}{\partial T_{y_i}} & \frac{\partial {}^iD_j}{\partial T_{z_i}} & \frac{\partial {}^iD_j}{\partial \alpha_i} & \frac{\partial {}^iD_j}{\partial \beta_i} & \frac{\partial {}^iD_j}{\partial \gamma_i} & \frac{\partial {}^iD_j}{\partial X_j} & \frac{\partial {}^iD_j}{\partial Y_j} & \frac{\partial {}^iD_j}{\partial Z_j} \end{bmatrix}。$$

采用跟踪仪对隧道控制网进行测量, 涉及角度和距离两类观测值, 采用经验定权法, 参考仪器标称精度确定观测值权比, 即

$$P = \text{diag} \left(\frac{\sigma_0}{m_H^2}, \frac{\sigma_0}{m_V^2}, \frac{\sigma_0}{m_D^2} \right). \quad (6)$$

式中: $\text{diag}(\cdot)$ 表示对角矩阵; m_H, m_V, m_D 分别为水平方向、天顶距以及斜距中误差; σ_0 为给定单位权方差, 一般取 $\sigma_0 = m_H^2$ 。

假设整个隧道控制网包含 n 个控制点, 共设 m 个测站。以第一测站为测量坐标系, 则参数个数 $t = 6(m-1) + 3n$, 令 $\hat{x} = (\delta T_{x_2}, \delta T_{y_2}, \delta T_{z_2}, \delta \alpha_2, \delta \beta_2, \delta \gamma_2, \dots, \delta T_{x_m}, \delta T_{y_m}, \delta T_{z_m}, \delta \alpha_m, \delta \beta_m, \delta \gamma_m, \delta X_1, \delta Y_1, \delta Z_1, \dots, \delta X_n, \delta Y_n, \delta Z_n)^T$ 。对矩阵 B, P 及 l 进行调整, 依据 $\min(V^T P V)$ 平差准则, 参数解可表示为:

$$\hat{x} = (B^T P B)^{-1} B^T P l. \quad (7)$$

当参数之间满足一定的约束条件, 约束条件方程可表示为:

$$C \hat{x} - W_x = 0. \quad (8)$$

式中: C 为系数矩阵; W_x 为自由项向量。

结合式(5), 采用附加约束条件的参数平差方法, 参数解可表示为:

$$\hat{x} = (G^{-1} - G^{-1} C^T \bar{G}^{-1} C G^{-1}) W + G^{-1} C^T \bar{G}^{-1} W_x. \quad (9)$$

式中: $G = B^T P B, W = B^T P l, \bar{G} = C G^{-1} C^T$ 。

1.3 约束条件函数模型

1.3.1 测站垂差约束

假设某一周长为 L 的储存环, 以环中心为原点, 环中心处铅垂线方向向上为 Z 轴, 平面内过原点且指向北方向为 Y 轴, 根据右手坐标系确定 X 轴, 建立储存环全局坐标系, 其布局如图 2(a) 所示。

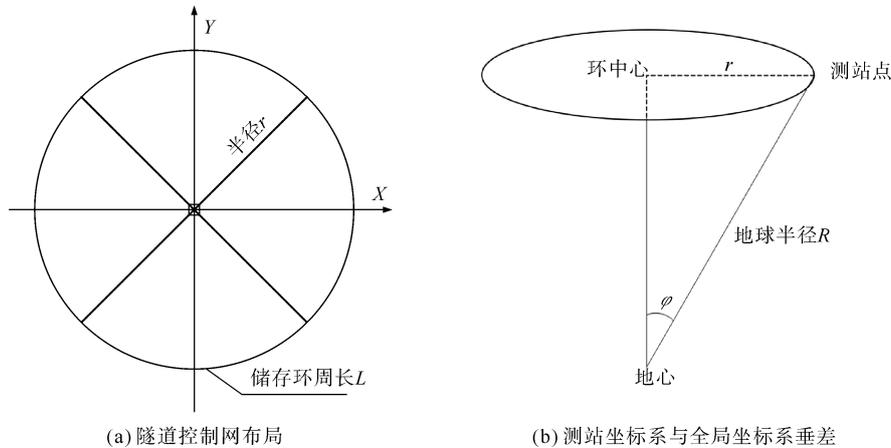


图 2 测站垂差计算

Fig. 2 Calculation of station vertical difference

将所有测站铅垂线统一至储存环中心, 根据储存环半径 r 计算垂差 $\varphi = \rho'' \cdot \arcsin(r/R)$, 取 $\rho'' = 206\ 264.8''$, 几何关系如图 2(b) 所示。

针对第 k 测站, 顾及测站垂差后, 测站旋转参数满足的约束条件为:

$$\alpha_k^2 + \beta_k^2 = \varphi^2. \quad (10)$$

对式(10)线性化, 得到约束条件方程

$$C_1 \hat{x} - W_1 = 0. \quad (11)$$

式中: $C_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times (3(2k-3))} & \alpha_k^0, \beta_k^0 & \mathbf{0}_{1 \times (6(m-k)+3n+1)} \end{bmatrix}$, α_k^0 和 β_k^0 为第 k 测站旋转参数近似值, $W_1 = (\varphi^2 - (\rho'' \cdot \alpha_k^0)^2 - (\rho'' \cdot \beta_k^0)^2) / 2$ 。

1.3.2 全站仪长边夹角约束

为了提高隧道控制网的平面精度, 增加全站仪对长边夹角的观测量。如图 3 所示, 测量时将全站仪整平对中于 Q_1 点, 观测前后地面点 Q_2 和 Q_3 , 获取夹角观测值 ϕ 。

全站仪测量的长边夹角可由控制点坐标参数表示,即

$$\phi = \pi - \arctan \left| \frac{\eta_2 \mu_1 - \eta_1 \mu_2}{\eta_1 \eta_2 - \mu_1 \mu_2} \right| \quad (12)$$

式中: $\eta_1 = X_2 - X_1$, $\eta_2 = X_3 - X_1$, $\mu_1 = Y_2 - Y_1$, $\mu_2 = Y_3 - Y_1$ 。对式(12)线性化,得到坐标参数的约束条件方程

$$\mathbf{C}_2 \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{W}_2 = 0 \quad (13)$$

式中: $\mathbf{C}_2 = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ 0, \dots, 0, K_{X_1}, K_{Y_1}, 0, \dots, 0, K_{X_2}, K_{Y_2}, 0, \dots, 0, K_{X_3}, K_{Y_3}, 0, \dots, 0 \end{array} \right]$, $\mathbf{W}_2 = \rho'' \cdot$

$\left(\varphi - (\pi - \arctan \left| \frac{\eta_2^0 \mu_1^0 - \eta_1^0 \mu_2^0}{\eta_1^0 \eta_2^0 - \mu_1^0 \mu_2^0} \right|) \right)$, 令 $M_1 = \eta_2^0 \mu_1^0 - \eta_1^0 \mu_2^0$, $M_2 = \eta_1^0 \eta_2^0 - \mu_1^0 \mu_2^0$, 则

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{X_1} = \rho'' \cdot \frac{M_2(\mu_2^0 - \mu_1^0) - M_1(2X_1^0 - X_2^0 - X_3^0)}{M_1^2 + M_2^2}, \\ K_{Y_1} = \rho'' \cdot \frac{M_2(\eta_1^0 - \eta_2^0) - M_1(2Y_1^0 - Y_2^0 - Y_3^0)}{M_1^2 + M_2^2}, \\ K_{X_2} = \rho'' \cdot \frac{-M_2 \mu_2^0 - M_1 \mu_1^0}{M_1^2 + M_2^2}, \\ K_{Y_2} = \rho'' \cdot \frac{M_2 \eta_2^0 - M_1 \mu_1^0}{M_1^2 + M_2^2}, \\ K_{X_3} = \rho'' \cdot \frac{M_2 \mu_1^0 - M_1 \eta_1^0}{M_1^2 + M_2^2}, \\ K_{Y_3} = \rho'' \cdot \frac{-M_2 \eta_1^0 - M_1 \mu_1^0}{M_1^2 + M_2^2}. \end{array} \right.$$

1.3.3 水准测量约束

以跟踪仪第一站坐标系作为测量坐标系进行平差后,第一测站坐标系所在平面与全局坐标系水平面并不平行,为了提高控制网竖向精度并将平差结果转换至水平面,增加水准观测数据。水准测量以水平面为基准面,将水准测量平差结果作为约束条件,通过最小二乘转换,一方面可以得到控制网在水平面上的坐标,另一方面能够提高控制点的 Z 坐标精度。

采用最小二乘转换方法,将控制点坐标所在坐标系 X, Y 轴旋转至水平面,其转换关系为

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega \sin \zeta & -\sin \omega \cos \zeta \\ 0 & \cos \zeta & \sin \zeta \\ \sin \omega & -\cos \omega \sin \zeta & \cos \omega \cos \zeta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ h - z_0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中: $[X \ Y \ Z]^T$ 为隧道控制网平差后控制点的三维坐标; ω 和 ζ 分别为控制点坐标绕 X 轴和 Y 轴旋转的角度参数; x 和 y 为控制点转换至水平面的坐标参数; h 是水准点高程; z_0 为 Z 轴方向的平移参数。

对式(14)进行线性化,误差方程为:

$$\begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z_0} & \frac{\partial X}{\partial \omega} & \frac{\partial X}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z_0} & \frac{\partial Y}{\partial \omega} & \frac{\partial Y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z_0} & \frac{\partial Z}{\partial \omega} & \frac{\partial Z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z_0 \\ \delta \omega \\ \delta \zeta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_X \\ l_Y \\ l_Z \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中: $[l_X \ l_Y \ l_Z]^T = [X \ Y \ Z]^T - \mathbf{A} \mathbf{X}^0$; \mathbf{A} 为系数矩阵; $\mathbf{X}^0 = [x^0 \ y^0 \ z_0^0 \ \omega^0 \ \zeta^0]^T$ 为参数近似值,

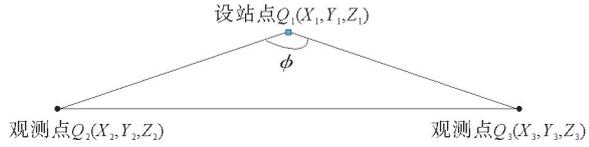


图3 全站仪测量长边夹角

Fig. 3 Measurement of angle between the long side with total station

角度和平移参数近似值初始迭代时可赋值为 0, 后经迭代不断更新。

依据 $\min(\mathbf{V}^T \mathbf{P} \mathbf{V})$ 平差准则求解未知参数, 然后将所有控制点坐标代入模型进行转换, 得到所有控制点在水平面上的坐标。

1.3.4 地面一级网约束

为了控制隧道控制网的误差累积问题, 拟采用地面控制网对隧道网进行强约束, 并采用附合网平差方法处理数据。

将地面点坐标视为具有一定权阵的观测值引入平差模型, 则带权约束参数平差法的误差方程为:

$$\begin{cases} \mathbf{V}' = \mathbf{B}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{x}_2 - \mathbf{l}' \mathbf{P}' \\ \mathbf{V}_x = \mathbf{B}_x \mathbf{x}_1 - \mathbf{l}_x \mathbf{P}_x \end{cases} \quad (16)$$

式中: \mathbf{V}' 为隧道控制网边角观测值的改正数向量; \mathbf{V}_x 为地面控制网点坐标观测值改正数向量; \mathbf{x}_1 为地面点的坐标参数向量, 隧道控制网坐标参数包括 \mathbf{x}_1 和 \mathbf{x}_2 ; \mathbf{B}_1 和 \mathbf{B}_2 为隧道控制网观测误差方程的系数矩阵; \mathbf{B}_x 为地面点的坐标误差方程的系数矩阵; \mathbf{P}' 为边角观测值的权阵; \mathbf{P}_x 为坐标观测值权阵; \mathbf{l}' 和 \mathbf{l}_x 分别为边角观测值和地面点坐标观测值的自由项向量。

在带权约束参数法平差模型中, 引入地面点坐标作为观测向量, 其权阵 $\mathbf{P}_x = \text{diag} [\infty]_{d \times d}$ 表示坐标观测值权无穷大, d 为坐标观测值个数, 当 d 大于必要观测数时, 即为附合网平差。

依据 $\min((\mathbf{V}')^T \mathbf{P}' \mathbf{V}' + \mathbf{V}_x^T \mathbf{P}_x \mathbf{V}_x)$ 原则, 得到未知参数的解

$$\mathbf{x} = (\mathbf{N} + \mathbf{N}_x)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}' \mathbf{l}' \quad (17)$$

式中: $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T \quad \mathbf{x}_2^T]^T$, $\mathbf{N} = \mathbf{B}^T \mathbf{P}_g \mathbf{B}$, $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2]$; $\mathbf{N}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_x^T \mathbf{P}_x \mathbf{B}_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。根据协方差传播率, 参数的协因数阵为:

$$\mathbf{Q}_{xx} = (\mathbf{N} + \mathbf{N}_x)^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}' \mathbf{B} (\mathbf{N} + \mathbf{N}_x)^{-1} \quad (18)$$

2 仿真试验

2.1 模拟数据

假设隧道周长为 1 360 m, 仿照隧道场景, 每组布设 5 个控制点, 间隔 5.7 m 设置一组点, 则全环可布设 240 组共 1 200 个控制点, 单组控制点布局如图 4(a) 所示。共设 60 测站, 每站测量前后 4 组点, 相邻测站公共点数量为 20, 隧道控制网俯视图如图 4(b) 所示。

为了模拟测站与环中心垂差, 以全局坐标系 Z 轴指向为基准, 对所有测站坐标系 (除第一测站外) 下的坐标进一步处理: 首先, 绕 z 轴顺时针旋转 θ° , 如图 5(a) 所示; 然后, 根据环半径 r 计算垂差 $\varphi = 7.01''$; 最后, 绕 x 轴旋转 φ 角度, 得到控制点在新的测站坐标系 $o-x'y'z'$ 下的坐标, 如图 5(b) 所示。

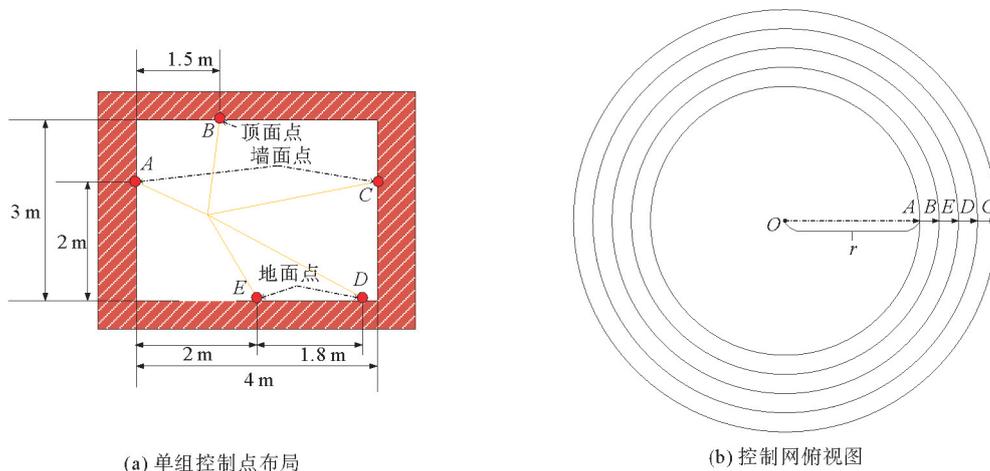


图 4 隧道控制网设计

Fig. 4 Design of tunnel control network

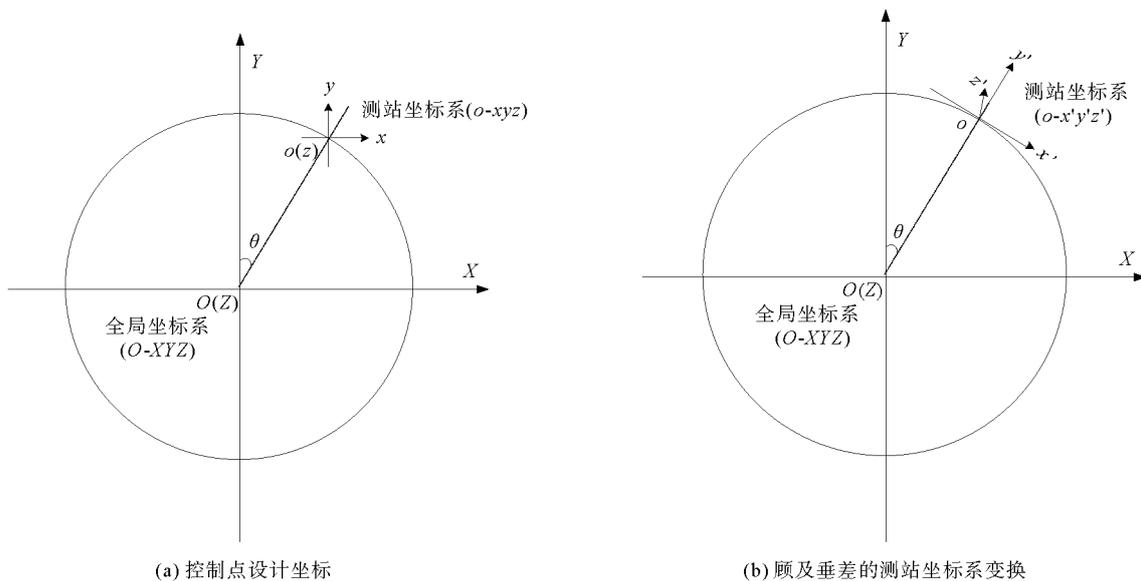


图 5 测站垂差设计

Fig. 5 Design of vertical difference of measuring station

按照水平方向中误差 2"、天顶距中误差 3"、测距中误差 2 μm/m 的观测精度向观测值中添加随机误差,得到顾及测站垂差的观测数据。

根据图 4(a)控制点布设情况及隧道通视条件,采用 TS60 全站仪对地面 E 类点(E_1, E_2, \dots, E_{240})进行测量,从 E 类点中等间距选取 24 个点作为观测点,如图 6 所示。

以某一地面点为设站点,利用全站仪观测与设站点距离 S 约为 57 m 的前后两个地面点,可获得 24 个夹角观测值。如图 7 所示,实际测量时,假设在 E_1 点设站,全站仪对中误差取 $s=0.2$ mm,则角 $\tau = \rho'' \cdot s/S = 0.72''$,设仪器测角精度为 $\pm 0.5''$,则全站仪夹角测量精度为 $m_\phi = \pm \sqrt{(2 \cdot \tau)^2 + 0.5^2} = \pm 1.53''$ 。模拟数据时,向理论夹角观测值中添加精度为 $\pm 1.53''$ 的随机误差。

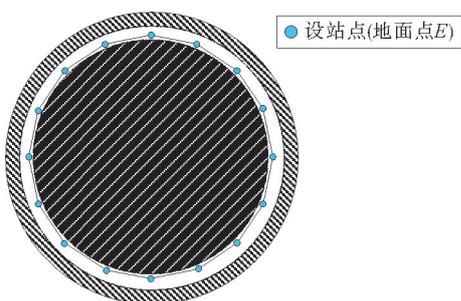


图 6 全站仪设站点分布

Fig. 6 Distribution of total station instrument stations

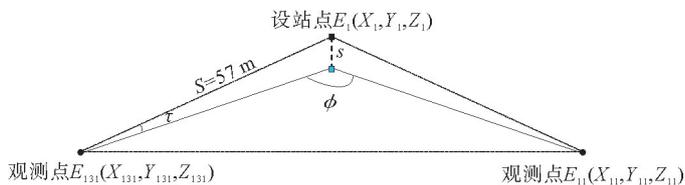


图 7 全站仪测量长边夹角

Fig. 7 Measurement of long side angle considering alignment error

全环设置 60 个水准点,分为 4 个闭合环往返测,如图 8 所示。基于 DiNi03 电子水准仪标称精度(每千米往返测高差中误差 0.3 mm)向数据中添加随机误差,按照一等水准要求模拟测量数据。

水准路线总长 1.44 km,以 E_1 点为已知点,测段数为 60,测段平均长 0.02 km。经平差,验后单位权中误差 0.13 mm,全环高差闭合差 0.23 mm,每千米高差中数的偶然中误差为 0.09 mm,均满足限差要求。

地面网控制点设计坐标如表 1 所示,布局如图 9(a)所示。

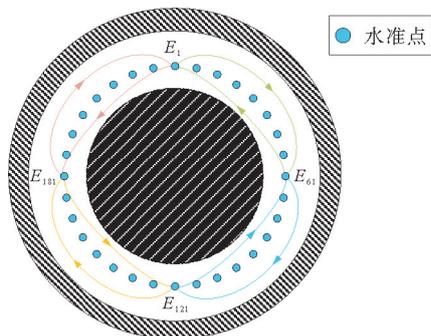


图 8 水准网设计
Fig. 8 Design of leveling network

表 1 地面网设计坐标

Table 1 Design coordinates of ground network mm

点名	X	Y	Z
E_1	0	218 450.723	-1 600.000
E_{61}	218 450.723	0	-1 600.000
E_{121}	0	-218 450.723	-1 600.000
E_{181}	-218 450.723	0	-1 600.000

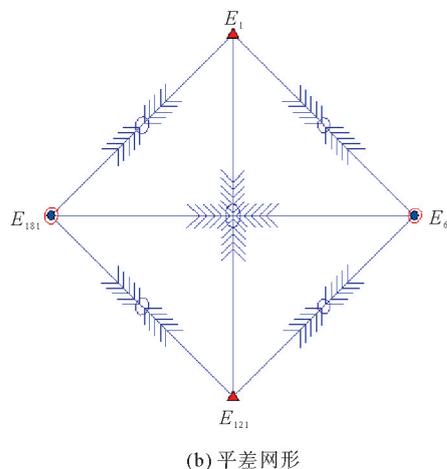
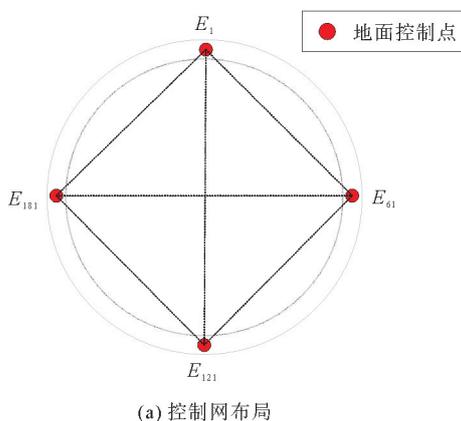


图 9 地面网模拟测量和平差

Fig. 9 Simulation measurement and adjustment of ground network

利用全球导航卫星系统(global navigation satellite system,GNSS)测量地面控制点,假设 E_1 和 E_{121} 为地面 GNSS 网投影点,平面坐标精度为 ± 2.5 mm,在点 E_{121} 的平面设计坐标上添加 2.5 mm 的误差。采用全圆观测法对地面一级网模拟测量,按照 TS60 全站仪的标称精度(测角精度 $\pm 0.5''$,测距精度 $\pm (0.6 \text{ mm} + 1 \times 10^{-6} \cdot D)$)向观测数据中添加随机误差,并以 E_1 和 E_{121} 点为起算数据进行平差,网形见图 9(b)。控制点 Z 坐标采用一等水准测量结果,地面控制点坐标平差值如表 2 所示。

表 2 地面点坐标平差值

Table 2 Adjustment value of ground point coordinates mm

点名	X	Y	Z
E_1	0	218 450.723	-1 600.000
E_{61}	218 452.157	-0.211	-1 600.040
E_{121}	2.500	-218 453.223	-1 600.040
E_{181}	-218 449.245	-2.768	-1 600.090

2.2 试验与分析

采用经典自由网平差方法处理数据,设计如下 5 种试验方案,其中方案②~⑤均在方案①基础上附加约束条件。

方案①:经典自由网平差;方案②:顾及测站垂差,附加测站旋转参数约束;方案③:附加全站仪长边夹角约束;方案④:附加测站旋转参数和长边夹角约束;方案⑤:以水准点高程为基准,对方案④结果进行最小二乘转换。

由于方案⑤通过方案④拟合转换得到,无法对其坐标中误差进行统计,所以将方案①~④所得控制点坐标分量中误差及统计量,包括最大值(maximum, max)、最小值(minimum, min)、均方根值(root mean square,rms),分别如图 10 和表 3 所示。

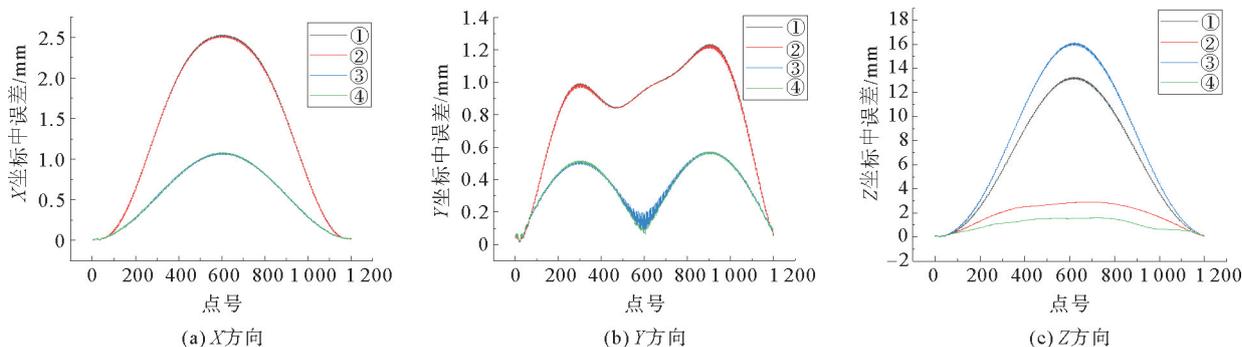


图 10 经典自由网平差的控制点坐标中误差

Fig. 10 Mean square error of control point coordinates

表 3 经典自由网平差的控制点坐标中误差统计量

Table 3 Mean square error statistics in control point coordinates

mm

方案	X			Y			Z		
	max	min	rms	max	min	rms	max	min	rms
①	2.530	0.001	1.629	1.236	0.014	0.888	13.264	0.025	7.943
②	2.514	0.001	1.620	1.230	0.014	0.884	2.898	0.025	2.088
③	1.070	0.002	0.657	0.572	0.017	0.387	16.113	0.031	9.638
④	1.080	0.002	0.661	0.571	0.018	0.387	1.597	0.033	1.127

由图 10 和表 3 可以看出,对于方案①,不施加约束情况下,经典自由网平差结果精度较低,X 和 Y 方向坐标中误差 max 分别为 2.530 和 1.236 mm,而 Z 方向精度最差,max 达到 13.264 mm,其误差累积十分严重,且主要集中在 Z 方向。方案③和方案④在平面方向的精度高于方案①,X 方向 rms 分别达 0.657 和 0.661 mm,Y 方向均达 0.387 mm。方案③在 Z 方向的精度最低,max 和 rms 分别为 16.113 和 9.638 mm,表明附加长边夹角约束可提高控制网的平面精度,但会降低控制点的 Z 坐标精度。因此,在不顾及测站垂差情况下,长边夹角约束无法提升 Z 向精度,却在一定程度上扭曲了网的结构。在平面方向,方案②与方案①结果基本一致,而在 Z 方向,方案②和方案④精度均远高于方案①,优于 3.000 mm,说明顾及测站垂差后,控制点 Z 坐标精度有较大程度的提高,而对平面坐标精度并未改善。因此,方案④在各个方向的精度均最高,表明在顾及测站垂差基础上附加长边夹角约束能够提高控制点的坐标精度。

所有控制点点位中误差、A 号点的相对点位中误差及其统计量分别如图 11 与表 4 所示。由图 11(a)和表 4 可以看出,方案②和方案④结果较优,方案④点位精度优于 2.000 mm;方案③的精度最低,点位中误差 max 达 16.149 mm,结合图 10 可知,精度较低的主要原因为 Z 方向的精度低。由图 11(b)和表 4 可以看出,方案②和方案④的相对点位精度均高于方案①和方案③,精度分别优于 0.150 和 0.180 mm,而方案③相对点位精度最低,max 达 0.290 mm,说明附加长边夹角约束降低了控制点的相对点位精度。

上述试验结果表明,在经典自由网平差基础上,附加约束条件在一定程度上可以提高点位精度和相对点位精度。

采用附合网平差方法对隧道控制网仿真数据进行处理,设计如下 5 种试验方案,方案⑦~⑩均在方案⑥基础上附加约束条件。

方案⑥:以地面点坐标为起算数据,采用带权约束参数平差法处理数据;方案⑦:附加测站旋转参数约束;方案⑧:附加长边夹角约束;方案⑨:附加水准测量高差平差值约束;方案⑩:附加测站旋转参数、长边夹角及水准测量高差平差值约束。

利用方案⑥~⑩处理仿真数据,得到所有控制点坐标分量中误差及统计量,分别如图 12 和表 5 所示。

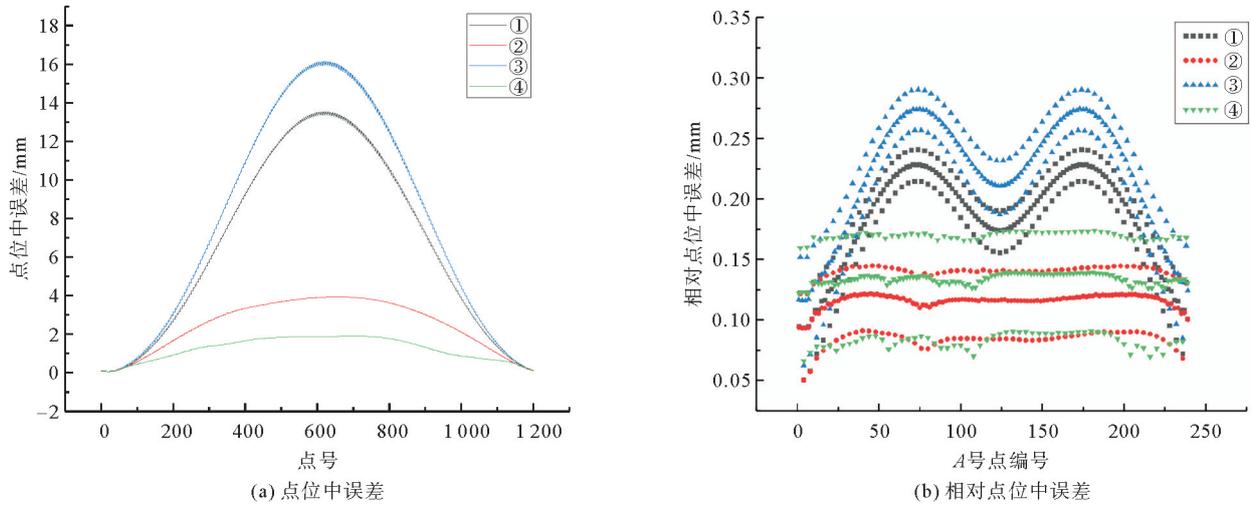


图 11 经典自由网平差的控制点点位误差

Fig. 11 Position error of control point

表 4 经典自由网平差的控制点点位误差统计量

Table 4 Position error statistics in control point coordinates mm

方案	点位中误差			A 号点相对点位中误差		
	max	min	rms	max	min	rms
①	13.536	0.034	8.156	0.241	0.050	0.187
②	3.938	0.034	2.787	0.145	0.050	0.116
③	16.149	0.042	9.668	0.290	0.062	0.225
④	1.909	0.045	1.363	0.174	0.066	0.134

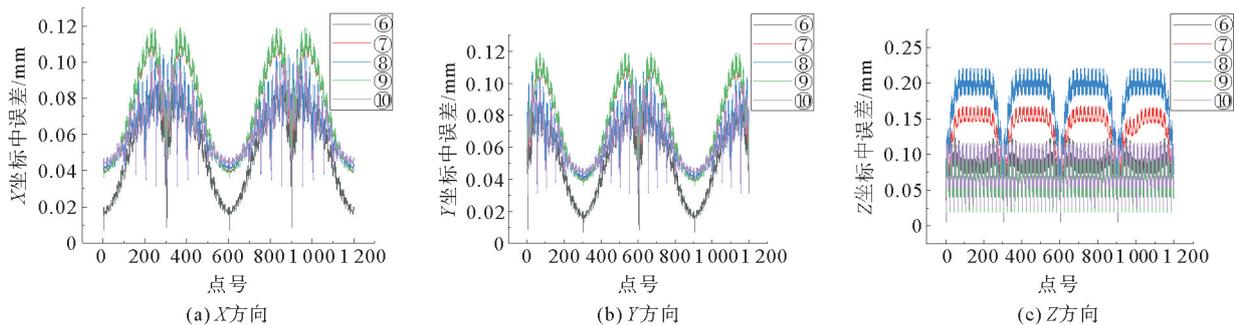


图 12 附合网平差的控制点坐标中误差

Fig. 12 Mean square error of control point coordinates

表 5 附合网平差的控制点坐标中误差统计量

Table 5 Mean square error statistics in control point coordinates mm

方案	X			Y			Z		
	max	min	rms	max	min	rms	max	min	rms
⑥	0.091	0.007	0.057	0.091	0.007	0.057	0.123	0.006	0.094
⑦	0.116	0.036	0.078	0.115	0.036	0.078	0.168	0.042	0.139
⑧	0.108	0.030	0.065	0.108	0.030	0.065	0.221	0.052	0.182
⑨	0.119	0.036	0.080	0.119	0.036	0.080	0.092	0.019	0.068
⑩	0.100	0.031	0.064	0.100	0.031	0.064	0.116	0.026	0.083

由图 12 和表 5 可以看出,5 种方案平面方向精度均优于 0.120 mm,Z 坐标精度均优于 0.230 mm。平面方向附加约束条件后,其坐标精度不升反降,说明附加约束条件难以提升平差精度。由图 12(c)可以看出,方案⑨在 Z 方向精度最高,表明将水准测量高差平差值作为约束条件,能够提高 Z 坐标精度。

所有控制点点位中误差、A 号点的相对点位中误差及其统计量分别如图 13 与表 6 所示。由图 13(a)和表 6 可以看出,方案⑩的点位精度最高,rms 达到 0.123 mm,同方案⑥一致,而方案⑦~⑨精度均低于方案⑥。表明单独附加任意一种约束条件,点位精度均未提高,但同时附加 3 种约束情况下,可以在一定程度上保持控制点点位精度。图 13(b)和表 6 中,A 号控制点的相对点位精度,方案⑥、方案⑦及方案⑨结果基本一致,而方案⑧和方案⑩较差,说明长边夹角约束降低了控制点相对点位精度。总体来看,附加约束条件未能提升控制点相对点位精度。

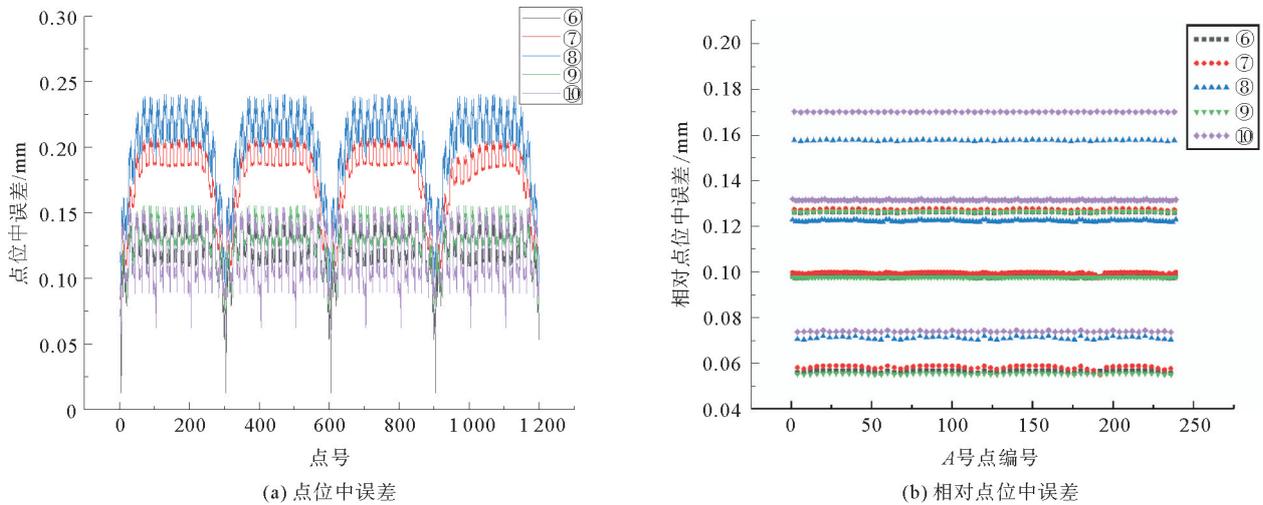


图 13 附合网平差的控制点点位误差

Fig. 13 Position error of control point

表 6 附合网平差的控制点点位误差统计量

Table 6 Mean square error statistics in control point coordinates mm

方案	点位中误差			A 号点相对点位中误差		
	max	min	rms	max	min	rms
⑥	0.146	0.013	0.123	0.126	0.056	0.098
⑦	0.208	0.069	0.178	0.128	0.055	0.099
⑧	0.241	0.072	0.204	0.158	0.070	0.122
⑨	0.156	0.058	0.132	0.126	0.055	0.098
⑩	0.155	0.058	0.123	0.170	0.073	0.131

由表 4 和表 6 可以看出,在同样约束条件下,附合网平差结果的 rms 均小于经典自由网平差。上述试验结果表明,经典自由网平差精度(点位精度和相对点位精度)低于附合网,表明附合网平差在约束隧道控制网的误差累积问题上更加有效。

为了分析不同方案的平差精度,其验后单位权中误差如表 7 所示。

表 7 验后单位权中误差

Table 7 Standard deviations of the unit weights mm

方案	①	②	③	④	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
$\hat{\sigma}_0$	1.377	1.379	1.707	1.817	1.383	1.396	1.723	1.391	1.895

由表7可以看出,几种方案的平差精度均在2.000 mm以内。在附加约束条件后,平差的精度均有所下降,方案①和方案⑥基本相等,说明经典自由网平差与附和网平差的验后精度相差不多。

为探究不同方案所得控制点绝对位置精度,将10种方案平差后的控制点坐标与设计值作差,其均方根误差如表8所示。

表8 控制点绝对位置精度

Table 8 Absolute position accuracy of control points mm

平差方法	方案	坐标			点位
		X	Y	Z	
经典自由网	①	0.836	1.181	7.913	8.044
	②	0.844	1.159	3.633	3.906
	③	0.844	0.765	17.894	17.930
	④	0.910	0.834	5.348	5.489
	⑤	0.915	0.832	0.918	1.540
附和网	⑥	1.620	1.782	1.547	2.862
	⑦	1.609	1.788	1.284	2.727
	⑧	1.380	1.729	1.575	2.715
	⑨	1.548	1.753	0.073	2.339
	⑩	1.448	1.705	0.110	2.240

由表8可以看出,经典自由网平差时,方案①中,平面坐标绝对位置精度高于Z坐标,Z坐标绝对位置精度达7.913 mm,表明Z方向误差累积问题最为严重。在顾及测站垂差后,Z坐标绝对位置精度显著提高,达3.633 mm,而平面绝对位置精度基本不变。附加长边夹角约束后,平面方向Y坐标绝对位置精度有所提高,但Z坐标绝对位置精度大大降低,接近18 mm。在同时顾及测站垂差并附加长边夹角约束情况下,Y坐标和Z坐标的绝对位置精度均得到提高。方案⑤利用水准高程对方案④平差后的控制点坐标进行最小二乘拟合,显著提升了Z坐标的绝对位置精度,达0.918 mm。对于附和网平差,方案⑥中,坐标分量的绝对位置精度相差较小,地面点坐标及水准点高程较好地控制了控制网的误差累积,其绝对点位精度可达2.862 mm。附加长边夹角约束条件下,X坐标绝对位置精度提高0.240 mm,其他方向基本不变。而方案⑨中,在附加水准高差平差值情况下,Z方向的绝对位置精度显著提高,达0.073 mm。同时附加3种约束条件后,控制点各个方向的绝对位置精度均得到提高,点位绝对精度达2.240 mm,验证了附加约束条件的有效性。

综合来看,经典自由网平差在平面方向上的绝对位置精度高于附和网,而在Z方向上,附和网平差的绝对位置精度更高。

3 结论

为控制隧道控制网的误差累积问题,设计了顾及测站垂差、控制网长边夹角观测值以及水准高程(或高差平差值)3种约束条件,并推导了函数模型。模拟周长为1360 m的隧道控制网,设计了仿真试验。结果表明,顾及测站垂差及水准点高程或高差平差值可提高控制网Z方向精度,对平面方向影响不大;附加长边夹角约束可提高控制网平面精度,但降低了控制点Z坐标精度;同时顾及测站垂差、长边夹角观测值及水准高程或高差平差值可提高控制点各个方向的坐标精度及点位精度。经典自由网平差误差累积问题较为严重,尤其体现在Z方向,所得控制点点位精度和相对点位精度均低于附和网。因地面网精度受限,经典自由网平差的平面绝对位置精度高于附和网,但Z坐标绝对位置精度低于附和网。

参考文献:

[1] 杨凡. 高能粒子加速器工程精密测量研究[D]. 郑州:解放军信息工程大学,2011.
 YANG Fan. Research on precise survey of high energy particle accelerator project[D]. Zhengzhou:PLA Information Engineering University,2011.

[2] 罗涛,何晓业,汪昭义,等. 粒子加速器隧道准直测量中激光跟踪仪光束法平差的误差分析和应用研究[J]. 武汉大学学报(信息科学版),2023,48(6):919-925.
 LUO Tao, HE Xiaoye, WANG Zhaoyi, et al. Error analysis and application of laser tracker's bundle adjustment in the tunnel alignment measurement of particle accelerator[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University,2023,48(6):919-925.

- [3] 范百兴,李广云,周维虎,等.激光跟踪仪空间联合平差模型及精度分析[J].武汉大学学报(信息科学版),2018,43(1):120-126.
FAN Baixing,LI Guangyun,ZHOU Weihu, et al. Precision analysis of the unified spatial metrology network adjustment model[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University,2018,43(1):120-126.
- [4] 邹进贵,杨丁亮.无定向点优化布局的多边交会测量精度分析[J].武汉大学学报(信息科学版),2022,47(10):1758-1765.
ZOU Jingui,YANG Dingliang. Measurement accuracy analysis of multilateral method based on optimal layout with non-directional point calibration[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University,2022,47(10):1758-1765.
- [5] 王小龙,康玲,董岚,等.加速器准直控制网数据处理误差累积研究[J/OL].核技术,2021,44(9). DOI:10.11889/j.0253-3219.2021.hjs.44.090201.
WANG Xiaolong,KANG Ling,DONG Lan, et al. Data processing error accumulation of accelerator alignment control network[J/OL]. Nuclear Techniques,2021,44(9). DOI:10.11889/j.0253-3219.2021.hjs.44.090201.
- [6] 郭迎钢,李宗春,刘忠贺,等.加速器隧道控制网变形可监测性及稳定性分析[J].原子能科学技术,2019,53(9):1634-1642.
GUO Yinggang,LI Zongchun,LIU Zhonghe, et al. Deformation detectability and stability analysis for tunnel control network of particle accelerator[J]. Atomic Energy Science and Technology,2019,53(9):1634-1642.
- [7] MANWILLER P E. Three-dimensional network adjustment of laser tracker measurements for large-scale metrology applications[J/OL]. Journal of Surveying Engineering,2021,147(1). DOI:10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000332.
- [8] 田鸿飞.高铁CPⅢ控制网优化与数据处理[D].阜新:辽宁工程技术大学,2016.
TIAN Hongfei. The optimization of high-speed railway CPIII control network and data processing[D]. Fuxin:Liaoning Technical University,2016.
- [9] 范百兴.激光跟踪仪高精度坐标测量技术研究及实现[D].郑州:解放军信息工程大学,2013.
FAN Baixing. Research and realization of the high precision coordinate measurement technique using laser tracker[D]. Zhengzhou:PLA Information Engineering University,2013.
- [10] 罗涛.激光跟踪仪光束法平差模型和软件实现研究[D].武汉:武汉大学,2009.
LUO Tao. Research on bundle adjustment model and its software realization for laser tracker[D]. Wuhan:Wuhan University,2009.
- [11] 李方,邹进贵,王铜,等.粒子直线加速器精密三维控制网研究[J].地理空间信息,2018,16(2):87-89.
- [12] GUO Y G,LI Z C. A sectional control method to decrease the accumulated survey error of tunnel installation control network[J]. American Journal of Modern Physics,2021,10(1):7-15.
- [13] 周江文.大地测量联解法与旋转矩阵[J].测绘学报,1986,15(1):1-6.
ZHOU Jiangwen. Integrated geodesy and rotation matrices[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica,1986,15(1):1-6.
- [14] 陶本藻.自由网平差与变形分析[M].武汉:武汉测绘科技大学出版社,2001.
TAO Benzao. Free network adjustment and deformation analysis[M]. Wuhan:Wuhan University of Surveying and Mapping Press,2001.
- [15] 刘硕,刘光博,刘尚国.利用重心基准的激光跟踪三维测边网平差[J].山东科技大学学报(自然科学版),2021,40(6):20-27.
LIU Shuo,LIU Guangbo,LIU Shangguo. Adjustment of 3-D laser tracking network based on barycenter datum[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology(Natural Science),2021,40(6):20-27.
- [16] 郭迎钢,赵文斌,李宗春,等.激光跟踪仪多测站抗差马氏光束法平差[J].光学精密工程,2020,28(9):2046-2055.
GUO Yinggang,ZHAO Wenbin,LI Zongchun, et al. Robust Mahalanobis bundle adjustment for laser tracker multi-station measurement[J]. Optics and Precision Engineering,2020,28(9):2046-2055.
- [17] 刘根友,郝晓光,柳林涛.参数约束平差法[J].大地测量与地球动力学,2006,26(4):5-9.
LIU Genyou,HAO Xiaoguang,LIU Lintao. Method of parameter constraint adjustment[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics,2006,26(4):5-9.

(责任编辑:高丽华)