

食饵种群中具有时滞的分数阶生态 流行病系统动力学分析

张佳慧,肖敏

(南京邮电大学 自动化学院 人工智能学院,江苏 南京 210023)

摘要:本研究提出一个具有时滞的分数阶生态流行病系统,着重分析引入时滞对系统的动力学影响。以时滞作为分岔参数,利用线性化方法和 Laplace 变换法分析系统在正平衡点附近发生 Hopf 分岔的条件,推导出时滞临界值的计算式。研究表明,当时滞穿越相应的临界值时,系统将失去稳定性,并发生 Hopf 分岔。同时发现随着系统阶次的增加,系统分岔也会提前发生。最后,通过数值仿真验证理论分析的正确性,以及分数阶次的变化对系统稳定域的影响。

关键词:生态流行病系统;分数阶;时滞延迟;稳定性;Hopf 分岔

中图分类号:TP273

文献标志码:A

Kinetic analysis of fractional eco-epidemiological systems with time delays in prey populations

ZHANG Jiahui, XIAO Min

(College of Automation & College of Artificial Intelligence, Nanjing University of
Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China)

Abstract: This paper proposed a fractional eco-epidemic system with time delays and focused our analysis on the kinetic effects of introducing time delays on the system. Taking the time delay as the bifurcation parameter, it first analyzed the conditions of Hopf bifurcation near the positive equilibrium point by using the linearization method and the Laplace transform method, and then derived the formula of the critical value of the time delay. It is shown that when the delay passes the corresponding critical value, the system will lose stability and Hopf bifurcation will occur. With the increase of the system order, the system bifurcation occurs earlier. Finally, we conducted numerical simulations to validate the theoretical analysis and effect of fractional order changes on the stability domain of the system.

Key words: eco-epidemic system; fractional order; time delay; stability; Hopf bifurcation

捕食关系是自然界中最常见的现象,长期以来受到许多研究人员的关注。Lotka-Volterra 模型是第一个基本的食饵-捕食者系统^[1],受到了广泛关注。Ma 等^[2]提出了不同的单食饵-双捕食者竞争系统;Wu 等^[3]研究了双食饵-捕食者竞争系统。在研究生态系统时,疾病的传播也是捕食者与猎物之间相互作用的一个重要因素。研究生态流行病系统的主要目的是控制传染病^[4]。Hilker 等^[5]将疾病引入到捕食系统中,从而稳定食饵-捕食者的振荡。冯涛等^[6]研究了传染病和环境噪声对捕食者-食饵种群的影响。Juneja 等^[7]模拟了

收稿日期:2023-03-06

基金项目:国家自然科学基金项目(62073172);江苏省自然科学基金项目(BK20221329);工业控制技术国家重点实验室开放课题(ICT2022B43)

作者简介:张佳慧(1997—),女,安徽宿州人,硕士研究生,主要从事网络化系统与优化控制方面的研究。

肖敏(1977—),男,江西萍乡人,教授,博士生导师,主要从事复杂系统优化控制方面的研究,本文通信作者。

E-mail:candymanxm2003@aliyun.com

只有捕食者感染某种疾病的情况。上述研究表明,受感染捕食者的捕食率降低有助于系统免受感染。

从动力系统的角度,研究时滞微分方程比常微分方程表现出更复杂的动力学特征,时滞的存在会使动力系统失去稳定性,也会引起各种振荡和周期解^[8-11]。食饵-捕食者模型的延迟主要有两个时期,一个是妊娠期,另一个是成熟期,其中由于怀孕造成的时间延迟是一个常见的例子。时滞微分方程表现出比常微分方程更为复杂的动力学。文献[12]提出一个具有时滞的生态流行病模型,分析了模型形成局部稳定和 Hopf 分岔的充分条件。文献[13]研究了具有时滞的捕食-被捕食系统的分岔控制方法,提出一种新的时滞反馈控制方案,有效控制了系统的分岔,为研究生态流行病系统提供了新思路。文献[14]考虑了猎物成熟时间和捕食者怀孕时间,建立了一个具有阶段性结构的时滞捕食-被捕食模型,并讨论了 Hopf 分岔的方向和周期解的稳定性。然而这些研究大多数只分析了时滞对模型的影响,很少考虑生物系统的记忆效应。

近年来,使用整数阶微分方程的数学模型在理解生物系统动力学方面已被证明是有价值的。然而,大多数生物、物理和工程系统都具有长时记忆,将分数阶微分理论应用于生物系统建模中受到了广泛的关注^[15-16]。由于分数阶在模型中加入了记忆效应^[17],用分数阶微分方程对生物系统进行建模,比经典的整数阶数学建模具有更多的优点。Zhao 等^[18]提出一般分数阶导数的定义,以描述具有记忆效应的动力学。整数阶导数更多的是对实际系统的偏理想化处理,而分数阶导数能够更好地满足复杂系统的实际需求,进一步提高对实际系统的控制能力^[19],因此得到广泛的研究和应用。文献[20-21]提出一类食饵种群中存在疾病的分数阶生态流行病学模型,讨论了与理论和数值分析相关的问题。文献[22]提出一个基于 Rosenzweig-MacArthur 食饵-捕食者模型的分数阶生态流行病模型,并分析了其局部稳定性。文献[23]提出了食饵种群中存在疾病的分数阶生态流行病模型,研究了其动力学行为。本研究在生态流行病系统中同时引入分数阶导数和多时滞,并讨论时滞和分数阶次对生态流行病传播机制的影响。

由于生态系统模型的普遍性和重要性,不同类型的生态系统模型被广泛研究。然而,在这些研究中大多研究带有时滞的整数阶方程或无时滞的分数阶方程。考虑到目前关于时滞对分数阶生态流行病模型稳定性的研究还较少,而大多数生态系统都具有长时记忆的特性,本研究在文献[23]的基础上,将系统的整数阶导数变换为区间(0,1)内 α 阶的分数阶导数。同时考虑到捕食者孕育所需的时间,本研究将捕食者种群孕育而产生的时滞纳入到系统中,将时滞和分数阶导数相结合,让模型更符合相互作用的实际情况,并以时滞作为分岔参数,研究系统在平衡点的稳定性和 Hopf 分岔的条件。

本研究主要创新点有:①引入捕食者种群孕育而产生的时滞和分数阶导数,建立分数阶时滞的生态流行病捕食-被捕食者模型,采用分数阶微积分理论分析模型平衡点的稳定性以及 Hopf 分岔;②给出局部稳定性的条件,并推导出分数阶捕食-被捕食者模型产生 Hopf 分岔的阈值;③给出时滞和阶次变动对分岔点的响应关系,并通过数值模拟刻画出时滞对捕食-被捕食模型非平凡平衡点的稳定性和 Hopf 分岔的影响。

1 预备知识和模型描述

分数阶导数一般有三种定义:Grünwald-Letnikov 分数阶导数、Riemann-Liouville 分数阶导数和 Caputo 分数阶导数。其中,Riemann-Liouville 方法要求初始条件必须以分数形式给出,而 Caputo 定义允许将分数阶方程的初始条件以整数阶导数的形式表示,其物理意义更好理解,在工程中应用较多^[24-25]。因此本研究选取 Caputo 分数阶导数来研究生态流行病系统。

定义 1^[26] 连续函数 $f(t)$ 的 q 阶 Caputo 分数阶导数定义为:

$$D_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{q+1-n}} d\tau。$$

式中: n 是大于 q 的最小正整数,且 q 满足 $n-1 < q < n$; $\Gamma(\cdot)$ 表示 Gamma 函数。当 $0 < q < 1$ 时,

$$D_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^q} d\tau。$$

引理 1^[27] 考虑如下分数阶系统

$$D_t^q x(t) = f(t, x(t)),$$

$$x(0) = x_0.$$

式中: $q \in (0, 1]$, $f(t, x(t)): \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 。如果分数阶系统在平衡点处的雅可比矩阵 $\frac{\partial f(t, x(t))}{\partial x}$ 的所有特征值 λ_i 均具有负实部或满足 $|\arg(\lambda_i)| > \frac{q\pi}{2}$, 则系统的平衡点是局部渐近稳定的。

文献[23]通过加入捕食者的攻击率和半饱和常数, 建立了一个新的生态流行病学系统:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = r - \beta SI - d_1 S + \gamma I, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \frac{\alpha PI}{1+aI} - d_2 I - \gamma I, \\ \frac{dP}{dt} = \frac{c\alpha PI}{1+aI} - d_3 P. \end{cases} \quad (1)$$

式中: S 表示易感染猎物种群密度; I 表示受感染猎物种群密度; P 表示捕食者种群密度; r 表示猎物种群的招募率; β 表示疾病在猎物中的传播系数; γ 表示受感染猎物的恢复率; α 表示捕食者的攻击率; a 表示半饱和常数; c 表示捕食者的转化率; d_1 、 d_2 和 d_3 分别表示易感染猎物、受感染猎物和捕食者的自然死亡率。所有参数均为正数。

但模型(1)没有考虑捕食者孕育所需时间对生态流行病传播的影响, 也未考虑到流行病传播时的记忆性。受文献[28]的启发, 本研究将捕食者孕育所产生的时滞引入系统中, 同时考虑到分数阶导数更加贴合生态流行病系统的特性, 得到具有时滞的分数阶生态流行病系统为:

$$\begin{cases} D_t^q S(t) = r - \beta SI - d_1 S + \gamma I, \\ D_t^q I(t) = \beta SI - \frac{\alpha PI}{1+aI} - d_2 I - \gamma I, \\ D_t^q P(t) = \frac{c\alpha P(t-\tau)I(t-\tau)}{1+aI(t-\tau)} - d_3 P. \end{cases} \quad (2)$$

式中: D_t^q 表示 Caputo 分数阶导数, $0 < q \leq 1$; τ 表示捕食者孕育产生的时间延迟。系统(2)的初始条件为 $S(\theta) = \phi_1(\theta) > 0, I(\theta) = \phi_2(\theta) > 0, P(\theta) = \phi_3(\theta) > 0$ 。

与系统(1)对比, 系统(2)引入了孕育时滞和分数阶导数。时滞的出现将系统(1)从三维拓展到无穷维, 使得特征方程中出现指数型超越项; 分数阶导数的引入使得特征方程从整数幂次变为分数幂次。上述引入让特征根的分布变得更加复杂。

2 稳定性分析和 Hopf 分岔

本节以时滞 τ 作为分岔参数, 通过分析对应的特征方程, 研究分数阶系统(2)平衡点的局部稳定性和 Hopf 分岔。

系统(2)可以得到零平衡点 $E = (r/d_1, 0, 0)$, 正平衡点 $E^* = (S^*, I^*, P^*)$ 。其中:

$$S^* = \frac{r(c\alpha - ad_3) + \gamma d_3}{\beta d_3 + d_1(c\alpha - ad_3)}, I^* = \frac{d_3}{c\alpha - ad_3}, P^* = \frac{cd_1(\gamma + d_2)[R_0 - 1 - \frac{\beta d_2 d_3}{d_1(\gamma + d_2)(c\alpha - ad_3)}]}{d_1(c\alpha - ad_3) + \beta d_3}.$$

考虑到系统(2)刻画了生态系统中流行病的演化过程以及实际意义, 本研究着重分析三种生物共存时正平衡点的稳定性和 Hopf 分岔情况。

基本再生数 R_0 是生态流行病学系统的一项重要指标, 可以准确反应出系统平衡点的状况。本研究中重点关注 $R_0 > 1$ 时的正定性。根据文献[29]中再生矩阵的方法计算基本再生数, 由式(2)可得

$$R_0 = \frac{r\beta}{d_1(\gamma + d_2)}.$$

据此可以得到,当 $R_0 > 1 + \frac{\beta d_2 d_3}{d_1(\gamma + d_2)(c\alpha - ad_3)}$ 时, S^*, I^*, P^* 都是正实数。

令 $\tilde{S} = S - S^*, \tilde{I} = I - I^*, \tilde{R} = R - R^*$, 代入式(2), 在平衡点 $E^* = (S^*, I^*, P^*)$ 处进行线性化处理, 得到系统:

$$\begin{cases} D_t^q S(t) = a_{11} S(t) + a_{12} I(t), \\ D_t^q I(t) = a_{21} S(t) + a_{22} I(t) + a_{23} P(t), \\ D_t^q P(t) = a_{31} P(t) + b_{11} I(t - \tau) + b_{12} P(t - \tau). \end{cases} \quad (3)$$

式中: $a_{11} = -\beta I^* - d_1, a_{12} = -\beta S^* + \gamma, a_{21} = \beta I^*, a_{22} = \beta S^* - \frac{\alpha P^*}{(1 + aI^*)^2} - d_2 - \gamma, a_{23} = -\frac{\alpha I^*}{1 + aI^*}, a_{31} = -d_3, b_{11} = -\frac{c\alpha P^*}{(1 + aI^*)^2}, b_{12} = \frac{c\alpha I^*}{1 + aI^*}$ 。

对式(3)进行 Laplace 变换, 得到特征矩阵为:

$$\begin{bmatrix} s^q - a_{11} & -a_{12} & 0 \\ -a_{21} & s^q - a_{22} & -a_{23} \\ 0 & -b_{11}e^{-s\tau} & s^q - a_{31} - b_{12}e^{-s\tau} \end{bmatrix}。$$

因此, 可得到式(3)的特征方程为:

$$A_1(s) + A_2(s)e^{-s\tau} = 0. \quad (4)$$

式中: $A_1(s) = S^{3q} + B_1 S^{2q} + B_2 S^q + B_3, A_2(s) = B_4 S^{2q} + B_5 S^q + B_6; B_1 = -a_{11} - a_{22} - a_{31}, B_2 = a_{11}a_{22} + a_{11}a_{31} + a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}, B_3 = a_{12}a_{21}a_{31} - a_{11}a_{22}a_{31}, B_4 = -b_{12}, B_5 = a_{11}b_{12} + a_{22}b_{12} - a_{23}b_{11}, B_6 = a_{12}a_{21}b_{12} + a_{23}a_{11}b_{11} - a_{11}a_{22}b_{12}$ 。

系统平衡点的稳定性取决于式(4)特征方程中特征根的分布, 如果式(4)特征方程中所有特征根的实部都为负, 则系统(2)稳定; 如果系统存在一个根的实部为正, 则系统(2)不稳定。下面分析系统(2)特征根的分布情况。

例 1 若时滞参数 $\tau = 0$, 则系统的特征方程变为:

$$\lambda^3 + C_1 \lambda^2 + C_2 \lambda + C_3 = 0. \quad (5)$$

式中: $\lambda = S^q, C_1 = -a_{11} - a_{22} - a_{31} - b_{12}, C_2 = a_{11}a_{22} + a_{11}a_{31} + a_{22}a_{31} + a_{11}b_{12} + a_{22}b_{12} - a_{12}a_{21} - a_{23}b_{11}, C_3 = a_{12}a_{21}a_{31} + a_{12}a_{21}b_{12} + a_{11}a_{23}b_{11} - a_{11}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{22}b_{12}$ 。

当时滞参数 $\tau = 0$ 时, 为保证系统(2)在正平衡点处是渐近稳定的, 提出假设条件 $H_1: \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0,$

$$\Delta_3 > 0. \text{ 其中, } \Delta_1 = |C_1| > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} C_1 & 1 \\ C_3 & C_2 \end{vmatrix} > 0, \Delta_3 = C_3 \Delta_2 > 0.$$

由引理 1, 进一步得到以下结论。

定理 1 当 $\tau = 0, q \in (0, 1]$, 并且在假设条件 H_1 都成立的情况下, 则系统(2)在正平衡点 E^* 处是局部渐近稳定的。

证明: 在时滞参数 $\tau = 0$ 时, 式(5)可以改写为 $(\lambda - z_1)(\lambda - z_2)(\lambda - z_3) = 0$, 其中 z_1, z_2, z_3 是式(5)的根。根据赫尔维判据, 若假设条件 H_1 成立, 则式(5)的所有特征根都具有负实部。进而可以得出系统(2)的正平衡点 E^* 是局部渐近稳定的。

例 2 当时滞参数 $\tau > 0$ 时, 假设特征方程(式(4))有一对纯虚根, 将 $s = i\omega = \omega e^{\frac{\pi i}{2}}$ 代入式(4)得:

$$e^{-s\tau} = e^{-i\tau\omega} = \cos(\tau\omega) - i \sin(\tau\omega),$$

$$s^\alpha = \omega^\alpha \left(\cos \frac{\alpha\pi}{2} + i \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right),$$

$$s^{2\alpha} = \omega^{2\alpha} [\cos(\alpha\pi) + i \sin(\alpha\pi)],$$

$$s^{3\alpha} = \omega^{3\alpha} \left(\cos \frac{3\alpha\pi}{2} + i \sin \frac{3\alpha\pi}{2} \right).$$

故式(4)可化为:

$$[\cos(\tau\omega) - i \sin(\tau\omega)](D_1 + iD_2) + (D_3 + iD_4) = 0.$$

式中: $D_1 = B_4\omega^{2q} \cos(q\pi) + B_5\omega^q \cos(\frac{\alpha\pi}{2}) + B_6$, $D_2 = B_4\omega^{2q} \sin(q\pi) + B_5\omega^q \sin(\frac{\alpha\pi}{2})$, $D_3 = \omega^{3q} \cos(\frac{3q\pi}{2}) + B_1\omega^{2q} \cos(q\pi) + B_2\omega^q \cos(\frac{q\pi}{2})$, $D_4 = \omega^{3q} \sin(\frac{3q\pi}{2}) + B_1\omega^{2q} \sin(q\pi) + B_2\omega^q \sin(\frac{q\pi}{2})$.

分离等式的实部和虚部可得:

$$\begin{aligned} \cos(i\omega) &= -\frac{D_1D_3 + D_2D_4}{D_1^2 + D_2^2}, \\ \sin(i\omega) &= \frac{D_1D_4 - D_2D_3}{D_1^2 + D_2^2}. \end{aligned}$$

由 $\cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau) = 1$, 根据式(5)可得 $D_3^2 + D_4^2 - D_1^2 - D_2^2 = 0$. 代入 $D_i (i=1, 2, 3, 4)$ 的定义式, 整理可得:

$$E_1\omega^{6q} + E_2\omega^{5q} + E_3\omega^{4q} + E_4\omega^{3q} + E_5\omega^{2q} + E_1\omega^q + E_0 = 0.$$

式中: $E_1 = 1$, $E_2 = 2B_1 \cos \frac{q\pi}{2}$, $E_3 = B_1^2 - B_4^2 + 2B_2$, $E_4 = 2B_1B_2 \cos \frac{q\pi}{2}$, $E_5 = B_2^2 - B_5^2 - 2B_4B_6 \cos(\alpha\pi)$, $E_6 = -2B_6B_5 \cos \frac{q\pi}{2}$, $E_7 = -B_6^2$.

进一步, 令 $z = \omega^q$, 定义连续函数

$$h(z) = z^6 + E_2z^5 + E_3z^4 + E_4z^3 + E_5z^2 + E_6z + E_7. \tag{6}$$

当方程 $h(z) = 0$ 存在一个正跟 z_c 时, 式(4)特征方程必定存在一个正根 $\omega_c = \sqrt[q]{z_c}$.

引理 2 对于 $h(z) = 0$ 有以下结论成立:

- 1) 当 $E_i \geq 0 (i=2, 3, \dots)$ 时, $h(z) = 0$ 无正根;
- 2) 当 $E_7 < 0$ 时, $h(z) = 0$ 至少有一个正根。

证明: 根据 $h(z)$ 的函数单调性可以得:

- 1) 由 $E_i \geq 0 (i=2, 3, \dots)$, 可计算得 $h'(z) > 0, z \in (0, +\infty)$ 恒成立, $h(z) = 0$ 无正根。
- 2) 根据零点定理可以得到, 当 $h(0) = E_7 < 0, \lim_{z \rightarrow +\infty} h(z) > 0$, 所以 $h(z) = 0$ 至少存在一个正根。

当式(6)存在一个正实根, 则式(4)特征方程必定存在一个正实根。假设式(4)特征方程有正实根 ω_0 , 根据式(6)得:

$$\tau_0^{(k)} = \frac{1}{\omega_0} \left[\arccos \left(-\frac{D_1D_3 + D_2D_4}{D_1^2 + D_2^2} \right) + 2k\pi \right], k = 0, 1, \dots.$$

定义分岔阈值点 $\tau_0 = \min\{\tau_0^{(k)}\} = \tau_0^{(0)}$, 其中 $\tau_0^{(k)}$ 为特征根穿越虚轴临界时滞的值。为建立 $\tau = \tau_0$ 处的 Hopf 分岔, 需证明 $\text{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_0} \neq 0$ 。接下来, 将验证穿越条件。

对式(4)特征方程两端关于 τ 进行求导得:

$$\{A'_1(s) + [A'_2(s) - \tau A_2(s)]e^{-s\tau}\} \frac{ds}{d\tau} - sA_2(s)e^{-s\tau} = 0.$$

式中: $A'_i(s)$ 是 $A_i(s) (i=1, 2)$ 关于 τ 的导数, 化简得:

$$\left(\frac{ds}{d\tau} \right)^{-1} = \frac{A'_1(s)e^{s\tau} + A'_2(s)}{sA_2(s)} - \frac{\tau}{s}. \tag{7}$$

将 $s = i\omega_0, \tau = \tau_0$ 代入式(7)得:

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^{-1} = \frac{M_1 + iM_2}{N_1 + iN_2} - \frac{\tau_0}{i\omega_0},$$

$$M_1 = \text{Re}[A'_1(i\omega_0)]\cos\omega_0\tau_0 - \text{Im}[A'_1(i\omega_0)]\sin\omega_0\tau_0 + \text{Re}[A'_2(i\omega_0)],$$

$$M_2 = \text{Re}[A'_1(i\omega_0)]\sin\omega_0\tau_0 + \text{Im}[A'_1(i\omega_0)]\cos\omega_0\tau_0 + \text{Im}[A'_2(i\omega_0)],$$

$$N_1 = -\omega_0 \text{Im}[A_2(i\omega_0)], N_2 = \omega_0 \text{Re}[A_2(i\omega_0)].$$

根据以上计算,可以推导出

$$\text{Re}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^{-1}_{\tau=\tau_0} = \frac{M_1N_1 + M_2N_2}{N_1^2 + N_2^2}.$$

显然, $\text{Re}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^{-1}_{\tau=\tau_0}$ 的正负值取决于 $M_1N_1 + M_2N_2$ 的正负。因此,当 $M_1N_1 + M_2N_2 > 0$ 时, $\text{Re}\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^{-1}_{\tau=\tau_0} > 0$, 特征方程(式(4))的根穿越虚轴,系统出现 Hopf 分岔现象。根据以上分析,可得:

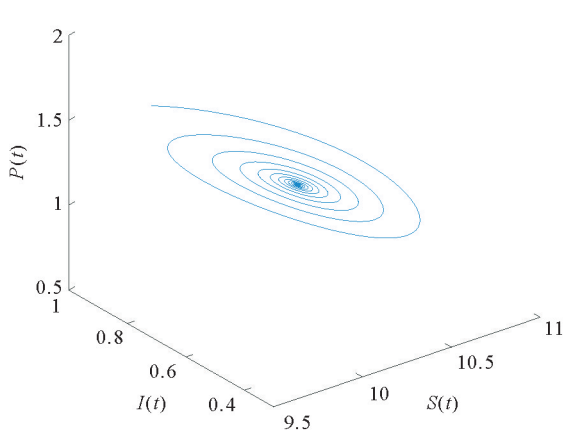
定理 2 假设系统(2)满足 $R_0 > 1 + \frac{\beta d_2 d_3}{d_1(\gamma + d_2)(c\alpha - ad_3)}$, 则当时滞参数 $0 < \tau < \tau_0$ 时,系统(2)在正平衡点 E^* 是局部渐近稳定;当时滞参数 $\tau > \tau_0$ 时,系统在正平衡点 E^* 处失去稳定性。当时滞参数 $\tau = \tau_0$ 时,系统(2)在正平衡点 E^* 处产生 Hopf 分岔现象。

3 数值模拟

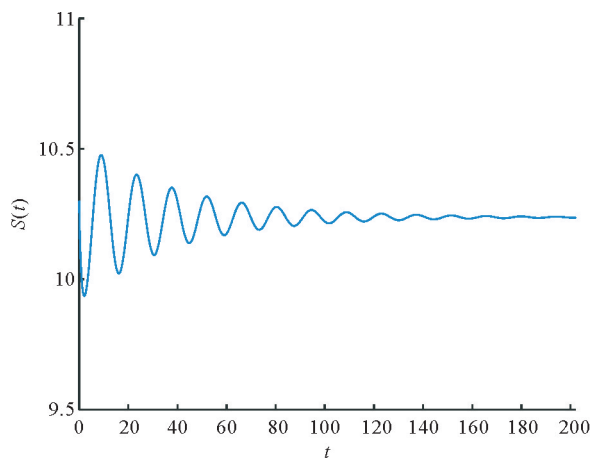
为了验证理论分析的正确性,本节进行数值仿真。首先,设置系统(2)的参数为: $r = 11, \beta = 0.6, d_1 = 1, d_2 = 0.43, d_3 = 0.4, c = 1, \gamma = 5, \alpha = 1$, 满足定理 1 的条件。当系统的分数阶阶次选取 $q = 0.96$ 时,计算得系统(2)的正平衡点 $E^* = (S^*, I^*, P^*) = (10.24, 0.67, 1.19)$, $\omega_0 = 0.42, \tau_0 = 0.41$, 且有 $M_1N_1 + M_2N_2 > 0$ 。

根据定理 2, 当时滞 $\tau = 0.2 < \tau_0 = 0.41$ 时,仿真结果如图 1 所示,系统(2)在 $E^* = (S^*, I^*, P^*)$ 处是局部渐近稳定的,此时易感染猎物、受感染猎物和捕食者种群的密度将趋于稳定,即三个物种的密度将处于一种理想的稳定状态,并且可以控制疾病在猎物之间的传播。

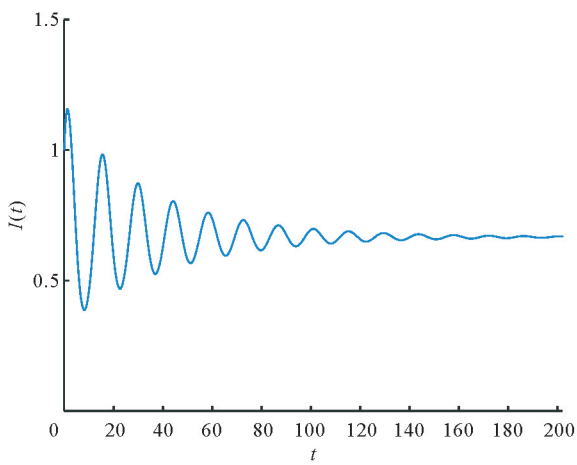
当时滞 $\tau = 0.6 > \tau_0 = 0.41$ 时,仿真结果如图 2 所示,系统(2)在 $E^* = (S^*, I^*, P^*)$ 处发生一系列正平衡点分岔的周期解,系统变得不稳定并出现 Hopf 分岔,表明由捕食者孕育产生的时滞在破坏系统稳定性方面起着非常复杂的作用,此时三个物种的密度会以振荡的方式存在,疾病在猎物之间的传播也会失去控制。



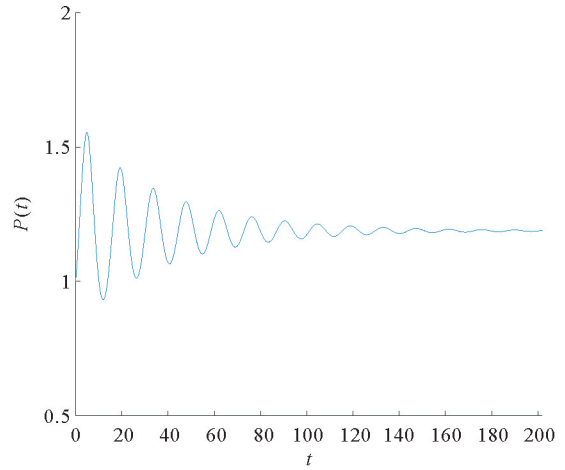
(a) 变量 $S(t), I(t), P(t)$ 的相图



(b) 变量 $S(t)$ 的波形图



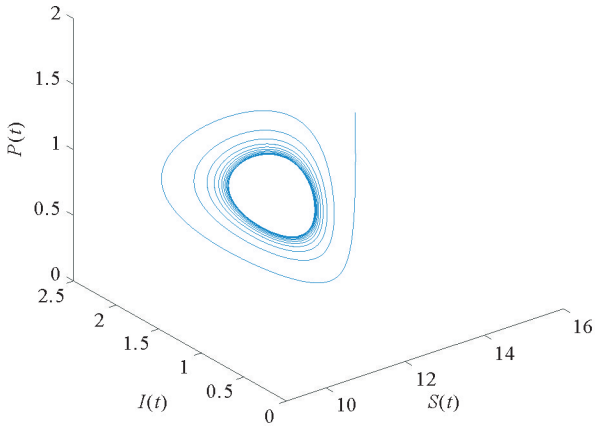
(c) 变量 $I(t)$ 的波形图



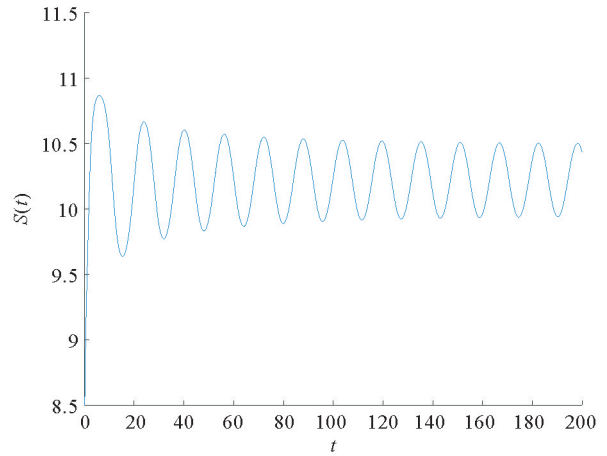
(d) 变量 $P(t)$ 的波形图

图 1 当 $\tau=0.2 < \tau_0=0.41$ 时,系统(2)在平衡点 E^* 渐近稳定

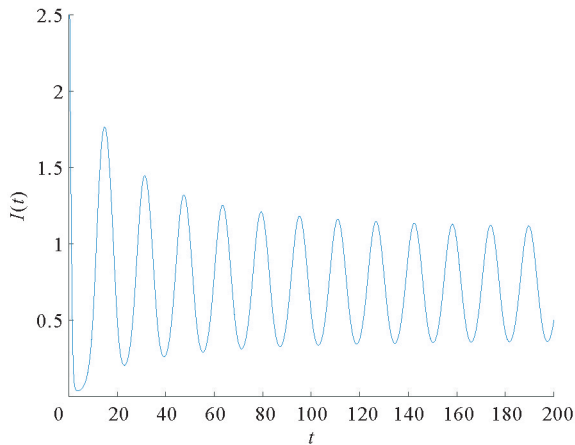
Fig. 1 Asymptotic stability of system (2) at the equilibrium point E^* when $\tau=0.2 < \tau_0=0.41$



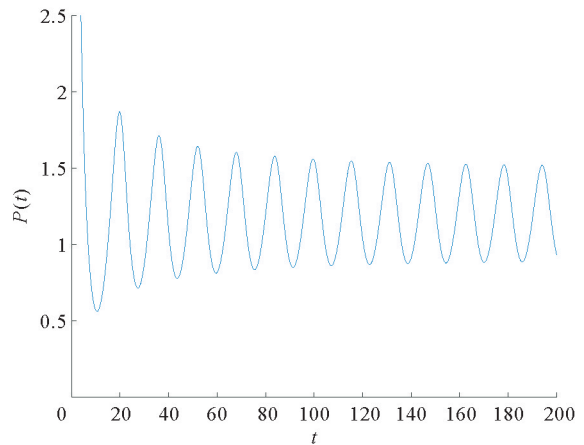
(a) 变量 $S(t), I(t), P(t)$ 的相图



(b) 变量 $S(t)$ 的波形图



(c) 变量 $I(t)$ 的波形图



(d) 变量 $P(t)$ 的波形图

图 2 当 $\tau=0.6 > \tau_0=0.41$ 时,系统(2)在平衡点 E^* 不稳定

Fig. 2 Instability of system (2) at equilibrium point E^* when $\tau=0.6 > \tau_0=0.41$

图 3 为时滞随分数阶次 q 的变化关系。由图 3 可以看到,当 $q \in [0.9, 0.99]$ 时,分数阶次 q 越大,时滞 τ 越小,说明系统分岔提前发生。

4 结论

本研究引入一个具有时滞的分数阶生态流行病系统模型,以捕食者怀孕引起的时滞作为分岔参数,给出了系统局部稳定的充分条件和产生 Hopf 分岔的临界值。研究发现,捕食者孕育引起的时间延迟是显著的。当时滞小于临界值时,系统是局部渐近稳定的,三个物种的密度将趋于稳定;当时滞足够大时,系统变得不稳定,三个物种的密度出现持续振荡,疾病在猎物之间传播也将失去控制。

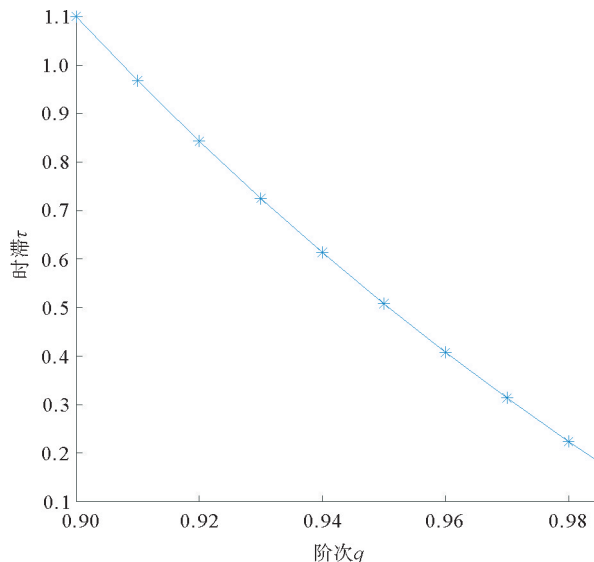


图 3 分数阶次 q 对 τ 的影响

Fig. 3 Effect of the fractional order q on τ

参考文献:

- [1] BOCCARA N. Power-law distributions[M]Modeling complex systems. New York:Springer,2010:371-433.
- [2] MA Z P, YUE J L. Competitive exclusion and coexistence of a delayed reaction-diffusion system modeling two predators competing for one prey[J]. Computers & Mathematics with Applications,2016,71(9):1799-1817.
- [3] WU C C. The spreading speed for a predator-prey model with one predator and two preys[J]. Applied Mathematics Letters,2019,91:9-14.
- [4] JUNEJA N, AGNIHOTRI K. Conservation of a predator species in SIS prey-predator system using optimal taxation policy [J]. Chaos, Solitons & Fractals,2018,116:86-94.
- [5] HILKER F M, SCHMITZ K. Disease-induced stabilization of predator-prey oscillations[J]. Journal of Theoretical Biology, 2008,255(3):299-306.
- [6] 冯涛,孟新柱.一类捕食者染病的捕食者-食饵系统的随机动力学行为[J].山东科技大学学报(自然科学版),2017,36(1):99-110.
FENG Tao, MENG Xinzhu. Stochastic dynamics of a predator-prey system with disease in predator[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology(Natural Science),2017,36(1):99-110.
- [7] JUNEJA N, AGNIHOTRI K. Global stability of harvested prey-predator model with infection in predator species[M]Information and Decision Sciences. Singapore:Springer,2018:559-568.
- [8] QESMI R. Hopf bifurcation in an opinion model with state-dependent delay[J/OL]. Chaos, Solitons & Fractals,2021,153. DOI:10.1016/j.chaos.2021.111511.
- [9] WANG T S, WANG Y, CHENG Z S. Stability and Hopf bifurcation analysis of a general tri-diagonal BAM neural network with delays[J]. Neural Processing Letters,2021,53(6):4571-4592.
- [10] LI T Y, WANG Q R. Stability and Hopf bifurcation analysis for a two-species commensalism system with delay[J]. Qualitative Theory of Dynamical Systems,2021,20(3):1-20.
- [11] 程惠东,孙秋霞,常正波.具有阶段结构与时滞的捕食系统模型的永久持续生存和稳定性[J].山东科技大学学报(自然科学版),2008(4):74-77.
CHENG Huidong, SUN Qiuxia, CHANG Zhengbo. The permanent survival and stability for predatory system model with stage structure and time delay[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology(Natural Science),2008,27(4):74-77.
- [12] ZHOU X Y, CUI J G. Stability and Hopf bifurcation analysis of an eco-epidemiological model with delay[J]. Journal of the

- Franklin Institute,2010,347(9):1654-1680.
- [13] JIANG X, CHEN X, HUANG T, et al. Bifurcation and control for a predator-prey system with two delays[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2020, 68(1): 376-380.
- [14] HU D P, LI Y Y, LIU M, et al. Stability and Hopf bifurcation for a delayed predator-prey model with stage structure for prey and Ivlev-type functional response[J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 99(4): 3323-3350.
- [15] ANSARI S P, AGRAWAL S K, DAS S. Stability analysis of fractional-order generalized chaotic susceptible-infected-recovered epidemic model and its synchronization using active control method[J]. Pramana, 2015, 84(1): 23-32.
- [16] 张冲, 黄霞. 不连续时滞分数阶忆阻神经网络的非线性动力学分析[J]. 山东科技大学学报(自然科学版), 2019, 38(3): 82-90.
ZHANG Chong, HUANG Xia. Nonlinear dynamic analysis of discontinuous fractional memristive neural networks with time delay[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology(Natural Science), 2019, 38(3): 82-90.
- [17] DJILALI S, GHANBARI B. The influence of an infectious disease on a prey-predator model equipped with a fractional-order derivative[J]. Advances in Difference Equations, 2021, 2021(1): 1-16.
- [18] ZHAO D Z, LUO M K. Representations of acting processes and memory effects: General fractional derivative and its application to theory of heat conduction with finite wave speeds[J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 346: 531-544.
- [19] ALMEIDA R, BRITO C A, MARTINS N, et al. An epidemiological MSEIR model described by the Caputo fractional derivative[J]. International Journal of Dynamics and Control, 2019, 7(2): 776-784.
- [20] MOMDAL S, LAHIRI A, BAIRAGI N. Analysis of a fractional order eco-epidemiological model with prey infection and type II functional response[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2017, 40(18): 6776-6789.
- [21] NUGRAHENI K, TRISILOWATI T, SURYANTO A. Dynamics of a fractional order eco-epidemiological model[J]. Journal of Tropical Life Science, 2017, 7(3): 243-250.
- [22] PANIGORO H S, SURYANTO A, KUSUMAWINAHYU W M, et al. Dynamics of an eco-epidemic predator-prey model involving fractional derivatives with power-law and Mittag-Leffler kernel[J/OL]. Symmetry, 2021, 13(5). DOI:10.3390/sym13050785.
- [23] MOUSTAFA M, MOHD M H, ISMAIL A I, et al. Dynamical analysis of a fractional-order eco-epidemiological model with disease in prey population[J]. Advances in Difference Equations, 2020, 2020(1): 1-24.
- [24] RIHAN F A, AL-MDALLAL Q M, ALSAKAJI H J, et al. A fractional-order epidemic model with time-delay and nonlinear incidence rate[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2019, 126: 97-105.
- [25] 丁鹏, 王震. 一类新的分数阶食饵捕食者模型动力学分析[J]. 数学的实践与认识, 2021, 51(13): 305-312.
DING Peng, WANG Zhen. Dynamics analysis of a new fractional prey-predator models[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2021, 51(13): 305-312.
- [26] 吴睿, 高珊珊, 程毅. 一类 Caputo 型分数阶微分包含的非局部问题[J]. 吉林大学学报, 2021, 59(1): 55-59.
WU Rui, GAO Shanshan, CHENG Yi. Nonlocal problems of a class of Caputo-type fractional differential inclusions[J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2021, 59(1): 55-59.
- [27] 朱呈祥, 邹云. 分数阶控制研究综述[J]. 控制与决策, 2009, 24(2): 161-169.
ZHU Chengxiang, ZOU Yun. Summary of research on fractional-order control[J]. Control and Decision, 2009, 24(2): 161-169.
- [28] DRIESSCHE P, WATMOUGH J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. Mathematical Biosciences, 2002, 180: 29-48.
- [29] XIA W J, KUNDU S, MAITRA S. Hopf bifurcation of a delayed ecoepidemic model with ratio-dependent transmission rate[J]. Journal of Function Spaces, 2018, 10(1): 562-609.

(责任编辑:齐敏华)