

基于改进型障碍 Lyapunov 函数的 非线性内联系统输出调节

索旭东^{1,2}, 宋文浩³, 许清婷¹, 孙伟杰¹

(1. 华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510641;

2. 智能移动机器人(中山)研究院, 广东 中山 528403;

3. 山东科技大学 电气与自动化工程学院, 山东 青岛 266590)

摘要:基于内模控制、自适应控制和改进型障碍 Lyapunov 函数,研究了一类非线性内联系统的预设性能鲁棒输出调节问题。首先,通过内模控制原理和坐标变换,将非线性内联系统的预设性能鲁棒输出调节问题,转化为增广系统的预设性能镇定问题。然后,针对增广系统,结合自适应控制方法与改进型障碍 Lyapunov 函数,设计反馈控制器解决该增广系统的预设性能镇定问题。最后,通过 MATLAB 仿真,验证了算法的可行性和有效性。

关键词:输出调节;预设性能;障碍 Lyapunov 函数;非线性内联系统;自适应控制

中图分类号:TP242

文献标志码:A

Output regulation of nonlinear interconnected systems based on modified barrier Lyapunov function

SUO Xudong^{1,2}, SONG Wenhao³, XU Qingting¹, SUN Weijie¹

(1. School of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China;

2. Intelligent Mobile Robot Research Institute (Zhongshan), Zhongshan 528403, China;

3. College of Electrical Engineering and Automation, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China)

Abstract: Based on internal model control (IMC), adaptive control and modified barrier Lyapunov function, the robust output regulation for a class of nonlinear interconnected systems with prescribed performance is studied. Firstly, by means of IMC method and coordinate transformation, the robust output regulation problem of nonlinear interconnected systems with prescribed performance is transformed into the robust stabilization problem of augmented systems with prescribed performance. Then, a feedback controller is designed for the augmented system by combining the adaptive control method and the modified barrier Lyapunov function. Finally, the feasibility and validity of the control algorithm are verified by MATLAB simulation.

Key words: output regulation; prescribed performance; barrier Lyapunov function; nonlinear interconnected system; adaptive control

鲁棒输出调节问题是指在系统具有不确定因素的情况下,设计一个反馈控制器,使得被控系统在内部状态均有界的情况下,输出能够渐近并且稳定地跟踪外部信号,同时拥有抵抗未知扰动的能力^[1-2]。从20世纪70年代末期开始,鲁棒输出调节问题主要围绕线性系统进行研究^[3-4]。线性系统的鲁棒输出调节问题的解取决于调节器方程是否有解,直接采用调节器方程的解来设计前馈控制器需要非常精准的信息和参数,不能

收稿日期:2023-11-21

基金项目:山东省自然科学基金项目(ZR2021QF032)

作者简介:索旭东(1988—),男,山西长治人,硕士,主要从事移动机器人研究。

孙伟杰(1981—),男,福建泉州人,副教授,博士,主要从事非线性系统控制、学习控制与自适应优化研究,本文通信作者。E-mail:auwjsun@scut.edu.cn

解决系统不确定性的问题。使用内模控制方法,通过将控制问题转化为增广系统的镇定问题,可以简化问题的复杂性并保证系统的鲁棒性^[2]。

在过去的几十年里,对鲁棒输出调节问题的研究逐渐从线性系统发展到非线性系统^[5-6],并建立了解决鲁棒输出调节问题的基本框架:首先设计非线性系统的内模动态方程;然后结合内模和坐标变换把输出调节问题转化为增广系统的误差镇定问题,设计相应的反馈控制器^[2]。Zhao 等^[7]研究了双曲型偏微分方程系统的输出调节问题,其中扰动是由一个完全未知的外部系统产生,实现跟踪误差的指数收敛。然而,实际工程应用中,往往会受到外部环境、系统本身参数或物理结构等因素的限制,为了使受控系统保持稳定,实际物理系统需要考虑进行预设性能控制^[8]。例如,在机器人控制领域中,要在控制机器人手臂的位置和速度的同时,防止与周围的人或物产生碰撞^[8-10]。在电力系统领域,预设性能控制可以在电力传输时将电压和电流控制在安全的范围内^[11]。

Lyapunov 函数一直是研究鲁棒稳定性问题的重点,早期主要是采用二次型形式^[12-14]。传统的二次型 Lyapunov 函数仅具有稳定性设计的渐近性质,但是无法解决系统对预设性能的要求。近些年,国内外学者提出了多种形式的 Lyapunov 函数及其应用,其中包括障碍 Lyapunov 函数^[15-17]。相比于传统的二次型 Lyapunov 函数,障碍 Lyapunov 函数能够保证非线性系统中的预设性能要求。文献[16]提出一种基于障碍 Lyapunov 函数和自适应控制的方法,将基于障碍 Lyapunov 函数设计的控制器与基于二次型 Lyapunov 函数设计的控制器进行了对比。仿真结果显示,二次型 Lyapunov 函数无法保证系统输出在跟踪外部信号的过程中不超出预设的约束区域,而障碍 Lyapunov 函数表现出更好的跟踪控制性能和鲁棒性,在工业领域也得到了广泛的应用。文献[17]将自适应神经网络与控制器相结合,通过障碍 Lyapunov 函数约束系统的输出,解决了被控系统的预设性能控制问题。

本研究采用改进型障碍 Lyapunov 函数,研究一类非线性内联系统的预设性能鲁棒输出调节问题,通过内模控制方法和坐标变换,将非线性内联系统的预设性能鲁棒输出调节问题,转换为增广系统的预设性能镇定问题,结合自适应控制方法与改进型障碍 Lyapunov 函数设计反馈控制器,解决该类非线性内联系统的预设性能镇定问题。

1 问题假设和定理介绍

考虑一类非线性内联系统:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{w})\mathbf{z}_i + \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_{ij}(y_1, y_2, \dots, y_N, \mathbf{v}, \mathbf{w})y_j, \\ \dot{y}_i = \mathbf{H}_i(\mathbf{w})\mathbf{z}_i + \sum_{j=1}^N K_{ij}(y_1, y_2, \dots, y_N, \mathbf{v}, \mathbf{w})y_j + b_i(\mathbf{w})u_i, \\ e_i = y_i - y_{ri}(t), i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (1)$$

式中: $(\mathbf{z}_i, y_i)^T \in \mathbf{R}^{n_i \times 1} \times \mathbf{R}$, $u_i \in \mathbf{R}$, $y_i \in \mathbf{R}$ 分别是系统状态、系统输入和系统输出, n_i 为正整数; $y_{ri}(t) \in \mathbf{R}$, 是各个子系统的给定目标参考输出; $e_i \in \mathbf{R}$ 为各个子系统的输出误差; $\mathbf{G}_{ij} \in \mathbf{R}^{n_i \times 1}$, $K_{ij} \in \mathbf{R}$ 分别为以 $y_1, y_2, \dots, y_N, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 为变量的多项式向量和标量函数, $\mathbf{w} \in \mathbf{W} \subset \mathbf{R}^{n_w \times 1}$ 为不确定常参数向量; $\mathbf{F}_i(\mathbf{w}) \in \mathbf{R}^{n_i \times n_i}$, $\mathbf{H}_i(\mathbf{w}) \in \mathbf{R}^{1 \times n_i}$ 和 $b_i(\mathbf{w}) \in \mathbf{R}$ 为 $\mathbf{w}$ 的相关向量和标量函数。外部信号 $\mathbf{v}(t) \in \mathbf{V} \subset \mathbf{R}^{n_v \times 1}$ 满足:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{S}(\sigma)\mathbf{v}, \\ y_{ri}(t) = q_i(\mathbf{v}, \mathbf{w}). \end{cases} \quad (2)$$

式中: $\mathbf{S}(\sigma) \in \mathbf{R}^{n_v \times n_v}$, σ 为未知常数, $q_i(\cdot) \in \mathbf{R}$ 为外部系统产生的参考输出。

建立各内联子系统的动态输出反馈控制器为:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}}_i = \mathbf{M}_i \boldsymbol{\eta}_i + \mathbf{N}_i u_i, \\ u_i = \mathbf{F}_i(\boldsymbol{\eta}_i, \hat{\boldsymbol{\Psi}}_i, k_i, e_i), \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\Psi}}}_i = \mathbf{G}_i(\boldsymbol{\eta}_i, \hat{\boldsymbol{\Psi}}_i, k_i, e_i), \\ \dot{k}_i = \rho_i(\boldsymbol{\eta}_i, \hat{\boldsymbol{\Psi}}_i, k_i, e_i). \end{cases} \quad (3)$$

式中: $(\boldsymbol{\eta}_i, \hat{\boldsymbol{\Psi}}_i, k_i)^T \in \mathbf{R}^{s_i \times 1} \times \mathbf{R}^{1 \times s_i} \times \mathbf{R}$, $\mathbf{M}_i \in \mathbf{R}^{s_i \times s_i}$, $\mathbf{N}_i \in \mathbf{R}^{s_i \times 1}$, $\mathbf{F}_i(\cdot) \in \mathbf{R}$, $\mathbf{G}_i(\cdot) \in \mathbf{R}^{1 \times s_i}$, $\rho_i \in \mathbf{R}$, s_i 为待确定的正整数。

控制目标是保证闭环系统有界, 跟踪误差 $e_i(t)$ 最终趋于零, 且满足 $|y_i(t)| \leq k_{ci}(t)$, $\forall t \geq 0$, 其中 $k_{ci}(t) \in \mathbf{R}$ 是给定约束。由于 $t \geq 0$, $\mathbf{w} \in \mathbf{W} \subset \mathbf{R}^{n_w}$, $\mathbf{v}(t) \in \mathbf{V} \subset \mathbf{R}^{n_v}$, 则存在满足 $\bar{y}_{ri}(t) \geq |y_{ri}(t)|$ 的函数 $\bar{y}_{ri}(t) \in \mathbf{R}$ 。令 $k_{ci}(t) = k_{bi}(t) + \bar{y}_{ri}(t)$, 满足 $|e_i(t)| < k_{bi}(t)$, $\forall t \geq 0$ 的条件时, 可得: $|y_{ri}(t)| \leq \bar{y}_{ri}(t) < k_{ci}(t)$, $\forall t \geq 0$, 其中 $k_{bi}(t) \in \mathbf{R}$ 是限制跟踪误差的边界函数。定义正常数 $\epsilon_i < \sup_{t \geq 0} y_{ri}(t)$ 和函数 $\bar{y}_{ri}(t)$:

$$\bar{y}_{ri}(t) = \begin{cases} -(2\epsilon_i/\pi) \cos\left(\frac{\pi y_{ri}(t)}{2\epsilon_i}\right) + \epsilon_i, & |y_{ri}(t)| \leq \epsilon_i; \\ |y_{ri}(t)|, & |y_{ri}(t)| > \epsilon_i. \end{cases} \quad (4)$$

引入目标轨迹约束 $\bar{y}_{ri}(t)$, 可以将原先系统输出的预设性能问题转化成跟踪误差的保瞬态性能问题。

假设 1 在 $\sigma \in \mathbf{S} \subset \mathbf{R}$ 中, 矩阵 $\mathbf{S}(\sigma)$ 的全部特征值都互异且所有实部都为 0。

假设 2 每个子系统在 $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^{n_w \times 1}$ 时, 未知连续函数 $b_i(\mathbf{w}) > 0$ 。

在假设 1 的前提下, 外部系统(2)产生一个由有限个正弦函数和常数组成的外部信号, $\mathbf{S}(\sigma)$ 矩阵的特征值决定外部信号的频率, 初始条件确定了其相位和振幅。

假设 3 系统(5)中子系统的相对阶 ρ 相同且所有单独的子系统都是一个最小相位系统。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{w}) \mathbf{z}_i + \mathbf{G}_{ii}(0, \dots, y_i, 0, \dots, 0, \mathbf{v}, \mathbf{w}) y_i, \\ \dot{y}_i = \mathbf{H}_i(\mathbf{w}) \mathbf{z}_i + K_{ii}(0, \dots, y_i, 0, \dots, 0, \mathbf{v}, \mathbf{w}) y_i + b_i(\mathbf{w}) u_i, \\ e_i = y_i - q_i(\mathbf{v}, \mathbf{w}). \end{cases} \quad (5)$$

假设 4 存在一个光滑函数 $\mathbf{z}_i(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{R}^{n_i \times 1}$ ($i=1, 2, \dots, N$), 在全局上都有定义且 $\mathbf{z}_i(\sigma, 0, \mathbf{w}) = 0$, 使得 $\frac{\partial \mathbf{z}_i}{\partial \mathbf{v}}(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \mathbf{S}(\sigma) \mathbf{v} = \mathbf{F}_i(\mathbf{w}) \mathbf{z}_i(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_{ij}(q_1(\mathbf{v}, \mathbf{w}), q_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \dots, q_N(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \mathbf{v}, \mathbf{w}) q_j(\mathbf{v}, \mathbf{w})$;

令 $y_i(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = q_i(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, 有 $u_i(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = b_i^{-1}(\mathbf{w}) \left[\frac{\partial q_i(\mathbf{v}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{S}(\sigma) \mathbf{v} - \mathbf{H}_i(\mathbf{w}) \mathbf{z}_i(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w}) - \sum_{j=1}^N K_{ij}(q_1(\mathbf{v}, \mathbf{w}), q_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \dots, q_N(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \mathbf{v}, \mathbf{w}) q_j(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \right]$ 。

由 $\mathbf{z}_i(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ 、 $y_i(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ 、 $u_i(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ 构成的调节器方程的解, 可解决上述非线性内联系统(1)和线性外部系统(2)构成的复合系统的鲁棒输出调节问题。

由于函数 $u_i(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ 与外部信号 $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{w}$ 、 σ 有关, 因此无法直接用于反馈控制器设计。需要找一个与 $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{w}$ 、 σ 等不相关的动态补偿器, 即内模动态方程, 用来估计 $u_i(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ 。调节器方程是否有解是非线性系统输出调节问题有解的必要条件, 当外部系统为线性系统时, 可知上述调节器方程必定有解^[2], 即假设 4 成立。

因为函数 $u_i(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ 是一个和外部系统(2)有关并且系数依赖于 $\mathbf{w}$ 、 σ 的多项式, 所以可知 $\forall \sigma \in \mathbf{S}$, 存在正整数 s_i 使多项式 $P_i(\lambda) = \lambda^{s_i} - a_{i, s_i}(\sigma) \lambda^{s_i-1} - \dots - a_{i, 2}(\sigma) \lambda - a_{i, 1}(\sigma)$ 的实数部分均是 0 且根互异^[2], 其中 $a_{i, 1}(\sigma)$, $a_{i, 2}(\sigma)$, $\dots$, $a_{i, s_i}(\sigma)$ 为与 σ 有关的实数。因而, 可得关于函数 $u_i(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ 的等式^[2]:

$$\frac{d^{s_i} u_i(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w})}{dt^{s_i}} = a_{i, 1}(\sigma) u_i(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + a_{i, 2}(\sigma) \frac{du_i(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w})}{dt} + \dots + a_{i, s_i}(\sigma) \frac{d^{(s_i-1)} u_i(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w})}{dt^{(s_i-1)}}. \quad (6)$$

$$\text{令 } \tau_i(\sigma, v, w) = \begin{bmatrix} u_i(\sigma, v, w) \\ L_{S(\sigma)v} u_i(\sigma, v, w) \\ \dots \\ L_{S(\sigma)v}^{s_i+1} u_i(\sigma, v, w) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{s_i \times 1}, L_{S(\sigma)v}^{j+1} u_i(\sigma, v, w) = \frac{\partial L_{S(\sigma)v}^j u_i(\sigma, v, w)}{\partial v} S(\sigma), j=0, 1, \dots, s_i - 1$$

$$2, \text{ 可得 } \frac{\partial \tau_i(\sigma, v, w)}{\partial v} S(\sigma) v = \Phi_i(\sigma) \tau_i(\sigma, v, w), u_i(\sigma, v, w) = \Gamma_i \tau_i(\sigma, v, w)。 \text{ 其中, } \Phi_i(\sigma) = \begin{bmatrix} 0_{s_i-1 \times 1} & i_{s_i-1} \\ a_{i,1}(\sigma) & a_{i,2}(\sigma) \dots a_{i,s_i}(\sigma) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{s_i \times s_i}, \Gamma_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0_{(s_i-1) \times 1} \end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^{1 \times s_i}。$$

选择 Hurwitz 矩阵 $M_i \in \mathbf{R}^{s_i \times s_i}$ 和列向量 $N_i \in \mathbf{R}^{s_i \times 1}$, 使得 (M_i, N_i) 是能控的, 则存在非奇异矩阵 $T_i(\sigma) \in \mathbf{R}^{s_i \times s_i}$ 满足 Sylvester 方程: $T_i(\sigma) \Phi_i(\sigma) - M_i T_i(\sigma) = N_i \Gamma_i$ 。对 $\tau_i(\sigma, v, w)$ 进行坐标变换: $\theta_i = T_i(\sigma) \tau_i(\sigma, v, w)$, 有:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i = (M_i + N_i \Psi_i^\sigma) \theta_i, \\ u_i^\sigma(\sigma, v, w) = \Psi_i^\sigma \theta_i. \end{cases} \quad (7)$$

式中, $\Psi_i^\sigma = \Gamma_i T_i^{-1}(\sigma)$ 。根据以上坐标变换得到内模动态方程: $\dot{\eta}_i = M_i \eta_i + N_i u_i$ 。

在外部系统(2)是满足假设 1 的线性系统时, 上述形式的内模动态方程是一定存在的^[2], 此方程可以渐近地生成 θ_i 。定义如下坐标变换:

$$\begin{cases} \bar{z}_i = z_i - z_i(\sigma, v, w), \\ e_i = y_i - q_i(v, w). \end{cases} \quad (8)$$

将输出反馈系统(1)转化成误差反馈系统(9)的形式:

$$\begin{cases} \dot{\bar{z}}_i = \bar{F}_i(w) \bar{z}_i + \sum_{j=1}^N \bar{G}_{ij}(e_1, e_2, \dots, e_N, v, w) e_j, \\ \dot{e}_i = \bar{H}_i(w) \bar{z}_i + \sum_{j=1}^N \bar{K}_{ij}(e_1, e_2, \dots, e_N, v, w) e_j + b_i(w) [u_i - u_i(\sigma, v, w)], \\ \sum_{j=1}^N \bar{G}_{ij}(e_1, e_2, \dots, e_N, v, w) e_j = \sum_{j=1}^N [G_{ij}(q_1(v, w) + e_1, q_2(v, w) + e_2, \dots, q_N(v, w) + e_N, v, w) \times \\ (e_j + q_j(v, w)) - G_{ij}(q_1(v, w), q_2(v, w), \dots, q_N(v, w), v, w) q_j(v, w)], \\ \sum_{j=1}^N \bar{K}_{ij}(e_1, e_2, \dots, e_N, v, w) e_j = \sum_{j=1}^N [K_{ij}(q_1(v, w) + e_1, q_2(v, w) + e_2, \dots, q_N(v, w) + e_N, v, w) \times \\ (e_j + q_j(v, w)) - K_{ij}(q_1(v, w), q_2(v, w), \dots, q_N(v, w), v, w) q_j(v, w)]. \end{cases} \quad (9)$$

式中: $\bar{F}_i(w) = F_i(w)$, $\bar{H}_i(w) = H_i(w)$, $i=1, 2, \dots, N$ 。

定义坐标变换 $\bar{\eta}_i = \eta_i - \theta_i - N_i b_i^{-1}(w) e_i$, 可得: $\dot{\bar{\eta}}_i = M_i \bar{\eta}_i + M_i N_i b_i^{-1}(w) e_i - N_i b_i^{-1}(w) \bar{H}_i(w) \bar{z}_i - N_i b_i^{-1}(w) \sum_{j=1}^N \bar{K}_{ij}(e_1, e_2, \dots, e_N, v, w) e_j$ 。

对式(9)进行坐标变换后, 原系统转变为增广系统:

$$\begin{cases} \dot{\bar{z}}_i = \bar{F}_i(w) \bar{z}_i + \sum_{j=1}^N \bar{G}_{ij}(e_1, e_2, \dots, e_N, v, w) e_j, \\ \dot{\bar{\eta}}_i = M_i \bar{\eta}_i + M_i N_i b_i^{-1}(w) e_i - N_i b_i^{-1}(w) \bar{H}_i(w) \bar{z}_i - N_i b_i^{-1}(w) \sum_{j=1}^N \bar{K}_{ij}(e_1, e_2, \dots, e_N, v, w) e_j, \\ \dot{e}_i = \bar{H}_i(w) \bar{z}_i + \Psi_i^\sigma N_i e_i + \Psi_i^\sigma b_i(w) \bar{\eta}_i + \sum_{j=1}^N \bar{K}_{ij}(e_1, e_2, \dots, e_N, v, w) e_j + b_i(w) [u_i - \Psi_i^\sigma \eta_i]. \end{cases} \quad (10)$$

至此,原系统的预设性能鲁棒输出调节问题就转化成了增广系统(10)的预设性能镇定问题。

2 理论推导和反馈控制器设计

本节使用改进型障碍 Lyapunov 函数和自适应控制技术来解决增广系统(10)的预设性能镇定问题。

引理 1 对系统(10),在外部系统状态 $\mathbf{v}$ 和不确定参数向量 $\mathbf{w}$ 有界的条件下,存在一个正整数 $p > 1$ 和一个常数 $d > 0$ 满足不等式:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N |\bar{\mathbf{G}}_{ij}(e_1, e_2, \dots, e_N, \mathbf{v}, \mathbf{w}) e_j| \leq d \sum_{j=1}^N (|e_j| + |e_j|^p), & i = 1, 2, \dots, N; \\ \sum_{j=1}^N |\bar{\mathbf{K}}_{ij}(e_1, e_2, \dots, e_N, \mathbf{v}, \mathbf{w}) e_j| \leq d \sum_{j=1}^N (|e_j| + |e_j|^p), & i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (11)$$

定理 1 考虑下列反馈控制器:

$$\begin{cases} u_i = -\frac{k_{bi}^2 - e_i^2}{2(k_{bi}^2 - e_i^2 + 1)} k_i \rho_i(e_i) (e_i + e_i^{2p-1}) + \dot{\Psi}_i \eta_i, \\ \dot{\Psi}_i = -\frac{2(k_{bi}^2 - e_i^2 + 1) \eta_i^T e_i}{k_{bi}^2 - e_i^2}, \\ \dot{k}_i = \rho_i(e_i) (e_i^2 + e_i^{2p}). \end{cases} \quad (12)$$

式中: $\dot{\Psi}_i \in \mathbf{R}^{1 \times s_i}$, $k_i \in \mathbf{R}$ 分别是未知频率变量 Ψ_i^σ 的估计值和动态生成的高增益, $\rho_i(e_i)$ 为平滑正定函数。该控制器可以解决增广系统(10)的预设性能镇定问题。

证明: 定义改进型障碍 Lyapunov 函数 $V_{\text{mblf}} = \ln \frac{k_b^2(t) \exp(e^2(t))}{k_b^2(t) - e^2(t)}$,

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\text{mblf}} &= \left(\frac{2(k_{bi}^2 - e_i^2 + 1)}{k_{bi}^2 - e_i^2} \right) e_i [\bar{\mathbf{H}}_i(\mathbf{w}) \bar{\mathbf{z}}_i + \Psi_i^\sigma \mathbf{N}_i e_i + \Psi_i^\sigma b_i(\mathbf{w}) \bar{\eta}_i] + \\ &\quad \left(\frac{2(k_{bi}^2 - e_i^2 + 1)}{k_{bi}^2 - e_i^2} \right) e_i \left[\sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{K}}_{ij}(e_1, e_2, \dots, e_N, \mathbf{v}, \mathbf{w}) e_j \right] + \\ &\quad \left(\frac{2(k_{bi}^2 - e_i^2 + 1)}{k_{bi}^2 - e_i^2} \right) e_i b_i(\mathbf{w}) [u_i - \Psi_i^\sigma \eta_i] - \left(\frac{\dot{k}_{bi}}{k_{bi}} \right) \left(\frac{2}{k_{bi}^2 - e_i^2} \right) e_i^2. \end{aligned} \quad (13)$$

令 $V_i^1 = l_i^* \bar{\mathbf{z}}_i^T \bar{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{w}) \bar{\mathbf{z}}_i + h_i^* \bar{\eta}_i^T \mathbf{Q}_i \bar{\eta}_i + V_{\text{mblf}} + \frac{1}{2} b_i(\mathbf{w}) (k_i - k_i^*)^2 + \frac{1}{2} b_i(\mathbf{w}) \|\hat{\Psi}_i - \Psi_i^\sigma\|^2$, 其中 l_i^* 、 h_i^* 、 k_i^* 为正常数, $\bar{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{w})$ 、 $\mathbf{Q}_i$ 为下列方程组的正定解。

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{w}) \bar{\mathbf{F}}_i(\mathbf{w}) + \bar{\mathbf{F}}_i^T(\mathbf{w}) \bar{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{w}) = -\mathbf{I}_i^{n_i \times n_i}, \\ \mathbf{Q}_i \mathbf{M}_i + \mathbf{M}_i^T \mathbf{Q}_i = -\mathbf{I}_i^{n_i \times n_i}. \end{cases} \quad (14)$$

利用不等式 $2ab \leq ca^2 + c^{-1}b^2$, $\forall c > 0$, $(\sum_{j=1}^N a_j)^2 \leq N \sum_{j=1}^N (a_j)^2$ 和不等式(11),可以得到 V_i^1 的时间导数满足: $\dot{V}_i^1 \leq -l_i \|\bar{\mathbf{z}}_i\|^2 - h_i \|\bar{\eta}_i\|^2 + r_i \sum_{j=1}^N (|e_j|^2 + |e_j|^{2p}) - k_i^* \rho_i(e_i) b_i(\mathbf{w}) (|e_i|^2 + |e_i|^{2p})$ 。其中, $l_i = \frac{3}{4} l_i^* - 12 h_i^* \|\mathbf{Q}_i\|^2 \|\mathbf{M}_i \mathbf{N}_i b_i^{-1}(\mathbf{w}) \bar{\mathbf{H}}_i(\mathbf{w})\|^2 - \frac{1}{2} \|\bar{\mathbf{H}}_i(\mathbf{w})\|^2$, $h_i = \frac{3}{4} h_i^* - \frac{1}{2} \|\Psi_i^\sigma b_i(\mathbf{w})\|^2$, $r_i = 8 l_i^* N \|\bar{\mathbf{Q}}_i(\mathbf{w})\|^2 d^2 + 12 h_i^* \|\mathbf{Q}_i\|^2 \|\mathbf{M}_i \mathbf{N}_i b_i^{-1}(\mathbf{w})\|^2 + 24 h_i^* N \|\mathbf{Q}_i\|^2 \times \|\mathbf{N}_i b_i^{-1}(\mathbf{w})\|^2 d^2 + 4 \left(\frac{k_{bi}^2 - e_i^2 + 1}{k_{bi}^2 - e_i^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \|\Psi_i^\sigma \mathbf{N}_i\|^2 + \frac{1}{2} N d^2 + \frac{1}{(k_b^2 - e^2)^2} + \left(\frac{\dot{k}_{bi}}{k_{bi}} \right)^2$ 。

选择 l_i^* 、 h_i^* , 使得 $l_i^* \geq 16 h_i^* \|\mathbf{Q}_i\|^2 \|\mathbf{M}_i \mathbf{N}_i b_i^{-1}(\mathbf{w})\|^2 + \frac{2}{3} \|\bar{\mathbf{H}}_i(\mathbf{w})\|^2 + \frac{4}{3}$, $h_i^* \geq \frac{4}{3} +$

$\frac{2}{3} \|\Psi_i^* b_i(\mathbf{w})\|^2$, 则有 $l_i \geq 1, h_i \geq 1$ 。由此可得: $\dot{V}_i^1 \leq -\|\bar{\mathbf{z}}_i\|^2 - \|\bar{\boldsymbol{\eta}}_i\|^2 + r_i \sum_{j=1}^N (|e_j|^2 + |e_j|^{2p}) - k_i^* \rho_i(e_i) b_i(\mathbf{w}) (|e_i|^2 + |e_i|^{2p})$ 。定义整个系统的 Lyapunov 函数 $V^1 = \sum_{j=1}^N V_j^1$, 可得 $\dot{V}^1 \leq -\sum_{i=1}^N (\|\bar{\mathbf{z}}_i\|^2 + \|\bar{\boldsymbol{\eta}}_i\|^2) + (\sum_{i=1}^N r_i) \sum_{j=1}^N (|e_j|^2 + |e_j|^{2p}) - \sum_{j=1}^N k_j^* \rho_j(e_j) b_j(\mathbf{w}) (|e_j|^2 + |e_j|^{2p})$ 。

存在正函数 $\bar{q}_j(\mathbf{w}, k_{bj})$ 和 $\rho_j(e_j)$ 满足 $\bar{q}_j(\mathbf{w}, k_{bj}) \rho_j(e_j) \geq \rho_j(e_j, k_{bj}) \geq b_j^{-1}(\mathbf{w}) (\sum_{i=1}^N r_i + 1), j=1, 2, \dots, N$ 。令 $k^* \geq \bar{q}_j(\mathbf{w}, k_{bj})$, 可得 $k^* \rho_j(e_j) \geq \rho_j(e_j, k_{bj})$, 即 $\sum_{i=1}^N (r_i - k_j^* b_j \rho_j(e_j)) \leq -1$ 。因此, $\dot{V}^1 \leq -\sum_{j=1}^N (\|\bar{\mathbf{z}}_j\|^2 + \|\bar{\boldsymbol{\eta}}_j\|^2) - \sum_{j=1}^N (|e_j|^2 + |e_j|^{2p})$, 可得 V^1 是有界的。

因此, 非线性系统(1)和外部系统(2)的预设性能输出调节问题可由如下自适应反馈控制器解决:

$$\begin{cases} u_i = -\frac{k_{bi}^2 - e_i^2}{2(k_{bi}^2 - e_i^2 + 1)} k_i \rho_i(e_i) (e_i + e_i^{2p-1}) + \hat{\Psi}_i \boldsymbol{\eta}_i, \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_i = \mathbf{M}_i \boldsymbol{\eta}_i + \mathbf{N}_i u_i, \\ \dot{\hat{\Psi}}_i = -\frac{2(k_{bi}^2 - e_i^2 + 1) \boldsymbol{\eta}_i^T e_i}{k_{bi}^2 - e_i^2}, \\ \dot{k}_i = \rho_i(e_i) (e_i^2 + e_i^{2p}). \end{cases} \quad (15)$$

对于所有 $t \geq 0$, 当 k_{bi} 趋向于正无穷大时, 可以将式(15)转化成基于二次型 Lyapunov 函数设计的自适应反馈控制器:

$$\begin{cases} u_i = -\frac{1}{2} k_i \rho_i(e_i) (e_i + e_i^{2p-1}) + \hat{\Psi}_i \boldsymbol{\eta}_i, \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_i = \mathbf{M}_i \boldsymbol{\eta}_i + \mathbf{N}_i u_i, \\ \dot{\hat{\Psi}}_i = -2 \boldsymbol{\eta}_i^T e_i, \\ \dot{k}_i = \rho_i(e_i) (e_i^2 + e_i^{2p}). \end{cases} \quad (16)$$

3 数值仿真

考虑由两个子系统相互连接组成的非线性内联系统:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = a_{11} z_1 + a_{12} y_1^3 + a_{13} y_2^3 + a_{14} y_1^2 y_2 + a_{15} y_1 y_2^2, \\ \dot{y}_1 = a_{16} z_1 + a_{17} y_1^2 y_2 + b_1 u_1, \\ e_1 = y_1 - v_1, \\ \dot{z}_2 = a_{21} z_2 + a_{22} y_1^3 + a_{23} y_2^3 + a_{24} y_1^2 y_2 + a_{25} y_1 y_2^2, \\ \dot{y}_2 = a_{26} z_2 + a_{27} y_1 y_2^2 + b_2 u_2, \\ e_2 = y_2 - v_2. \end{cases} \quad (17)$$

式中: $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{17})$, $\mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{26}, a_{27})$, $\bar{\mathbf{a}}_1 = (\bar{a}_{11}, \bar{a}_{12}, \bar{a}_{13}, \bar{a}_{14}, \bar{a}_{15}, \bar{a}_{16}, \bar{a}_{17})$, $\bar{\mathbf{a}}_2 = (\bar{a}_{21}, \bar{a}_{22}, \bar{a}_{23}, \bar{a}_{24}, \bar{a}_{25}, \bar{a}_{26}, \bar{a}_{27})$, $\mathbf{w}_1 = (w_{11}, w_{12}, w_{13}, w_{14}, w_{15}, w_{16}, w_{17})$, $\mathbf{w}_2 = (w_{21}, w_{22}, w_{23}, w_{24}, w_{25}, w_{26}, w_{27})$; $\mathbf{a}_1 = \bar{\mathbf{a}}_1 + \mathbf{w}_1$, $\mathbf{a}_2 = \bar{\mathbf{a}}_2 + \mathbf{w}_2$, $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2$ 和 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 分别为内联系统的标称参数向量和不确定参数向量, 满足 $a_{11} = \bar{a}_{11} + w_{11} < 0, a_{21} = \bar{a}_{21} + w_{21} < 0$ 。

外部系统的形式定义为:

$$\dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}. \quad (18)$$

式中: $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^\top$ 。可知,系统是满足假设 4 的。因此,可得: $\frac{d^4 u_1(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w}_1)}{dt^4} + 10\sigma^2 \frac{d^2 u_1(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w}_1)}{dt^2} + 9\sigma^4 \cdot u_1(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w}_1) = 0$, $\frac{d^4 u_2(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w}_2)}{dt^4} + 10\sigma^2 \frac{d^2 u_2(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w}_2)}{dt^2} + 9\sigma^4 u_2(\sigma, \mathbf{v}, \mathbf{w}_2) = 0$; $\Phi_1(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_{1 \times 3} \\ -9\sigma^4 & [0, -10\sigma^2, 0] \end{bmatrix}$, $\mathbf{F}_1 = [1, 0, 0, 0]$; $\Phi_2(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_{1 \times 3} \\ -9\sigma^4 & [0, -10\sigma^2, 0] \end{bmatrix}$, $\mathbf{F}_2 = [1, 0, 0, 0]$; $\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_{1 \times 3} \\ -m_1 & [-m_2, -m_3, -m_4] \end{bmatrix}$, $\mathbf{N}_1 = \text{col}(0, 0, 0, 1)$, $\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_{1 \times 3} \\ -m_5 & [-m_6, -m_7, -m_8] \end{bmatrix}$, $\mathbf{N}_2 = \text{col}(0, 0, 0, 1)$, $\dot{\boldsymbol{\eta}}_1 = \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\eta}_1 + \mathbf{N}_1 u_1$, $\dot{\boldsymbol{\eta}}_2 = \mathbf{M}_2 \boldsymbol{\eta}_2 + \mathbf{N}_2 u_2$ 。其中: $m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8 > 0$, 取 $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (5, 12, 13, 6)$, $(m_5, m_6, m_7, m_8) = (4, 12, 13, 7)$ 。

通过求解 Sylvester 方程可得: $\Psi_1^\sigma = \mathbf{F}_1 \mathbf{T}_1^{-1}(\sigma) = [5 - 9\sigma^4, 12, 13 - 10\sigma^2, 6]$, $\Psi_2^\sigma = \mathbf{F}_2 \mathbf{T}_2^{-1}(\sigma) = [4 - 9\sigma^4, 12, 13 - 10\sigma^2, 7]$ 。

定义预设性能约束函数 $k_{c1}(t), k_{c2}(t), k_{b1}(t), k_{b2}(t)$:

$$\begin{cases} k_{c1}(t) = 9.5 + 0.25\cos(t), \\ k_{c2}(t) = 10 + 0.25\cos(t), \\ k_{b1}(t) = 9.5 + 0.25\cos(t) - A_{m1}, \\ k_{b2}(t) = 10 + 0.25\cos(t) - A_{m2}. \end{cases} \quad (19)$$

式中: A_{m1}, A_{m2} 分别为 $v_1(t), v_2(t)$ 的最大幅值。

结合定理 1, 设计自适应反馈控制器, 解决非线性内联系统的预设性能鲁棒输出调节问题。系统的实际模型参数: $\mathbf{a}_1 = (-2, 1, 1, -1, -2, 1, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (-2, 1, 1, -2, -2, 1, -2)$, $b_1 = 1, b_2 = 2$, 外部信号的频率 $\sigma = 0.8$ 。初始条件: $z_1(0) = 1, z_2(0) = -1, v_1(0) = 9, v_2(0) = 0, y_1(0) = 9.72, y_2(0) = 0.5, k_1(0) = 1, k_2(0) = 1, \boldsymbol{\eta}_1(0) = \boldsymbol{\eta}_2(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^\top, \dot{\Psi}_1(0) = \dot{\Psi}_2(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$ 。

设计函数 $\rho_1(e_1) = \rho_2(e_2) = \frac{1}{100} (2((1 + 1/(k_{b1}^2 - e_1^2))^2 + (1 + 1/(k_{b2}^2 - e_2^2))^2) + 1000)$ 。 $y_1(t), y_2(t)$ 跟踪目标轨迹 $v_1(t), v_2(t)$ 的效果如图 1 和图 2 所示。如图 3 和图 4 所示, 跟踪误差会在约束范围内逐渐趋于 0。基于改进型障碍 Lyapunov 函数设计的自适应反馈控制器, 在处理非线性内联系统的预设性能鲁棒输出调节问题的过程中, 能够保证系统的跟踪误差输出始终维持在预设的限制区域内, 并且趋于稳定。

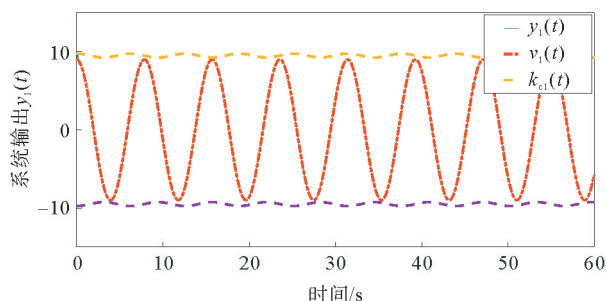


图 1 系统输出 $y_1(t)$ 的响应曲线

Fig. 1 Response curve of system output $y_1(t)$

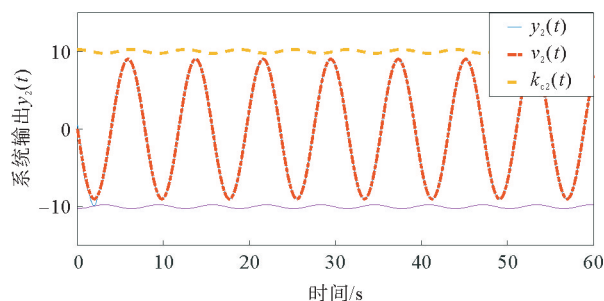
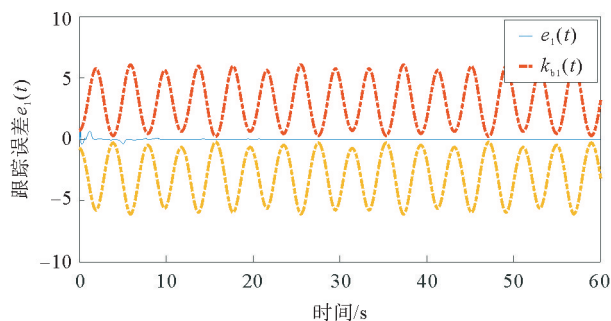
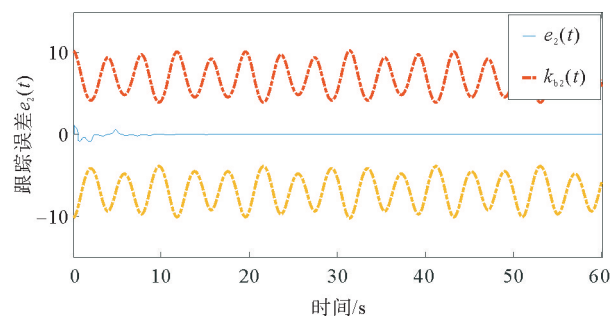


图 2 系统输出 $y_2(t)$ 的响应曲线

Fig. 2 Response curve of system output $y_2(t)$

图3 系统输出误差 $e_1(t)$ 的响应曲线Fig. 3 Response curve of system output error $e_1(t)$ 图4 系统输出误差 $e_2(t)$ 的响应曲线Fig. 4 Response curve of system output error $e_2(t)$

4 结论

本研究针对一类非线性内联系统的预设性能鲁棒输出调节问题的解决方案。首先,采用内模控制方法和坐标变换,将非线性内联系统的预设性能鲁棒输出调节问题转化为增广系统的预设性能镇定问题。为了使非线性系统的输出始终满足约束条件,采用改进型障碍 Lyapunov 函数设计控制器。仿真实验验证表明,基于改进型障碍 Lyapunov 函数设计的反馈控制器能够在保证系统稳定,并可控制系统的目标输出始终在预设的限制区间内。因此,改进型障碍 Lyapunov 函数和自适应控制技术,是解决非线性内联系统预设性能鲁棒输出调节问题的有效方法。

参考文献:

- [1] SIDORI A, BYRNES C I. Output regulation of nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1990, 35(2): 131-140.
- [2] HUANG J. Nonlinear output regulation: Theory and applications[M]. Philadelphia: SIAM, 2004.
- [3] FRANCIS B A. The linear multivariable regulator problem[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1975, 15(3): 873-878.
- [4] FRANCIS B A, WONHAM W M. The internal model principle of control theory[J]. Automatica, 1976, 12(5): 457-465.
- [5] WU J S, LU M B, DENG F, et al. Cooperative robust output regulation of linear uncertain multi-agent systems: A dynamic event-triggered approach[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2023, 33(18): 11538-11552.
- [6] 郭美忱, 刘璐. 一类非线性输出反馈系统的自适应输出调节问题[J]. 控制理论与应用, 2014, 31(7): 987-992.
GUO Meichen, LIU Lu. Adaptive output regulation problem for a class of nonlinear systems[J]. Control Theory and Applications, 2014, 31(7): 987-992.
- [7] ZHAO R X, GUO B Z. Output regulation for a wave equation with unknown exosystem[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2023, 69(5): 3066-3079.
- [8] CHEN H, SUN W J, YEOW J T W. Experimental validation of internal model approach for tracking control of a MEMS micromirror without angular velocity measurement[J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 102(3): 1437-1450.
- [9] HE W, CHEN Y T, YIN Z. Adaptive neural network control of an uncertain robot with full-state constraints[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2015, 46(3): 620-629.
- [10] HE W, DAVID A O, YIN Z, et al. Neural network control of a robotic manipulator with input deadzone and output constraint[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2015, 46(6): 759-770.
- [11] 李春文, 刘艳红, 陈铁军, 等. 基于逆系统方法的广义非线性系统控制及电力系统应用[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(5): 799-802.
LI Chunwen, LIU Yanhong, CHEN Tiejun, et al. Feedback control of nonlinear singular systems with application to power systems: an inverse system method[J]. Control Theory and Applications, 2007, 24(5): 799-802.
- [12] IWASAKI T, SKELTON R. Parametrization of all stabilizing controllers via quadratic Lyapunov functions[J]. Journal of

Optimization Theory and Applications,1995,85:291-307.

- [13] CORLESS M. Robust stability analysis and controller design with quadratic Lyapunov functions[J]. Variable Structure and Lyapunov Control,1994,26(2):181-203.
- [14] HAFEZ M A,BROUCKE M E. Stability of discrete-time switched systems with multiple equilibria using a common quadratic Lyapunov function[J]. IEEE Control Systems Letters,2022,6:2497-2502.
- [15] SUN W J,CHEN H,YEOW J T W. Barrier Lyapunov function-based output regulation control of an electromagnetic micromirror with transient performance constraint[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2022,52(7):4080-4091.
- [16] LIU L,LIU Y J J,CHEN A Q,et al. Integral barrier Lyapunov function-based adaptive control for switched nonlinear systems[J/OL]. Science China Information Sciences,2020,63. DOI:10.1007/s11432-019-2714-7.
- [17] SHUANG Z,LEI M J,DONG Y T,et al. Adaptive neural network control of coordinated robotic manipulators with output constraint[J]. IET Control Theory and Applications,2016,10(17):2271-2278.

(责任编辑:齐敏华)

(上接第 111 页)

- [64] CAO X,DU J H,QU C,et al. An early diagnosis method for overcharging thermal runaway of energy storage lithium batteries[J/OL]. Journal of Energy Storage,2024,75. DOI:10.1016/j.est.2023.109661.
- [65] LIU Y Y,LIAO C L,ZHANG W J,et al. Internal short circuit diagnosis of lithium-ion battery based on mechanism model and deep learning[J/OL]. Journal of The Electrochemical Society,2022,169(10). DOI:10.1149/1945-7111/ac91ab
- [66] FENG X N,SUN J,OUYANG M G,et al. Characterization of penetration induced thermal runaway propagation process within a large format lithium ion battery module[J]. Journal of Power Sources,2015,275:261-273.
- [67] FENG X N,OUYANG M G,LIU X,et al. Thermal runaway mechanism of lithium ion battery for electric vehicles:A review[J]. Energy Storage Materials,2018,10:246-267.
- [68] KOCH S,Fill A,Birke K P. Comprehensive gas analysis on large scale automotive lithium-ion cells in thermal runaway[J]. Journal of Power Sources,2018,398:106-112.
- [69] 刘全义,伊笑莹,韩旭,等. 不同初始压力下 100%SOC 18650 锂离子电池燃爆实验研究[J]. 山东科技大学学报(自然科学版),2020,39(6):56-62.
LIU Quanyi,YI Xiaoying,HAN Xu,et al. Experimental study on explosion of 100% SOC 18650 lithium-ion batteries under different initial pressures[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology(Natural Science),2020,39(6):56-62.
- [70] SHEN H J,WANG H W,LI M H,et al. Thermal runaway characteristics and gas composition analysis of lithium-ion batteries with different LFP and NCM cathode materials under inert atmosphere[J/OL]. Electronics,2023,12(7). DOI:10.3390/electronics12071603.

(责任编辑:齐敏华)