

连续时变线性马尔可夫跳变系统的有限时间 H_2 控制

刘西奎^{1,2}, 桓子仪¹, 姚辰欣¹, 李 艳²

(1. 山东科技大学 数学与系统科学学院, 山东 青岛 266590;

2. 山东科技大学 斯威本学院, 山东 济南 250031)

摘 要: 针对一类具有外部干扰的连续时间线性时变马尔可夫跳变系统, 研究了该系统的有限时间 H_2 控制问题。首先, 给出系统 H_2 性能指标和有限时间有界的定义。然后, 设计一类状态反馈控制器, 确保闭环系统在 H_2 性能指标约束下有限时间有界。通过运用 Lyapunov-Krasovskii 泛函理论和线性矩阵不等式方法, 得到控制器的设计算法。最后, 通过一个数值算例证明所提方法的有效性。

关键词: 时变系统; 马尔可夫跳变系统; 有限时间控制; 状态反馈

中图分类号: O231.3

文献标志码: A

Finite-time H_2 control of continuous time-varying linear Markovian jump systems

LIU Xikui^{1,2}, HUAN Ziyi¹, YAO Chenxin¹, LI Yan²

(1. College of Mathematics and Systems Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China;

2. College of Swinburne, Shandong University of Science and Technology, Jinan 250031, China)

Abstract: In this study, the finite-time H_2 control of continuous time-varying linear Markovian jump systems with external disturbances was investigated. Firstly, the definitions of H_2 performance index and finite-time boundness were given. Then, a state feedback controller was designed to guarantee the finite-time boundness of closed-loop systems with a given H_2 performance index. The control algorithm was derived by using the Lyapunov-Krasovskii function theory and the linear matrix inequality method. Finally, the effectiveness of the proposed method was verified by a numerical example.

Key words: time-varying systems; Markovian jump systems; finite-time control; state feedback

在实际应用中,许多实际系统的参数会随时间变化,传统时不变理论难以描述这类现象,因此,对时变系统的研究逐渐引起学者们的注意。文献[1]研究了离散时间线性时变系统的输入状态稳定问题,文献[2]讨论了时变系统的均匀稳定、一致渐近稳定和一致全局渐近稳定等问题,文献[3]研究了线性时变系统的指数稳定性和镇定性问题,文献[4]分析了一种不确定线性时变系统事件触发输出反馈控制器的设计问题,文献[5]运用集合变量法研究了具有时变参数系统的自适应控制问题。

以上文献考虑的是系统的渐近稳定性,即系统的稳态性能。然而在工程实践中,系统的暂态过程也十分重要,直接关系系统的鲁棒性与抗干扰能力。例如,在电力系统中,暂态功角失稳可在毫秒级时间尺度引发系统连锁崩溃,而渐近稳定性不能反映此类快速失稳现象。基于此类问题,Dorato^[6]首次提出有限时间稳定的概念。与渐近稳定性不同,有限时间稳定要求系统在给出初始条件有界的情况下,在有限时间内达到预先设定的界限。如文献[7]讨论了具有时变时滞和非线性扰动的离散时间系统的有限时间稳定性

收稿日期:2025-05-19

基金项目:国家自然科学基金项目(61972236);山东省自然科学基金项目(ZR2018MF013)

作者简介:刘西奎(1973—),男,山东泰安人,教授,博士生导师,主要研究方向为随机鲁棒控制. E-mail:liuxikuiqd@163.com

李 艳(1975—),女,山东泰安人,教授,硕士生导师,主要研究方向为随机鲁棒控制,本文通信作者.

E-mail:liyanhd@163.com

问题,文献[8]分析了切换 T-S 模糊系统的有限时间稳定性问题,文献[9]运用状态转移矩阵方法研究了线性离散时间平均场系统的非脆弱有限时间镇定性问题,文献[10]研究了半马尔可夫切换随机系统的有限时间环境稳定性和镇定性问题。然而,实际系统中普遍存在随机噪声、外部扰动等不确定性因素,有限时间有界(finite-time boundness,FTB)可以更好地反映系统的动态行为。如文献[11]研究了具有时变时滞的离散时间不确定区间二型模糊系统的有限时间有界性问题,文献[12-13]讨论了线性系统的有限时间有界性问题。

众所周知,动力系统会受到一些不确定因素的影响,如随机故障、突发的环境变化等,使系统的内部工作状态发生一定程度的改变。马尔可夫跳变系统(Markovian jump systems,MJSs),通过马尔可夫过程描述系统模态的随机切换,能够有效刻画实际工业系统(如机械系统、化工过程等)中因环境变化或部件故障导致的结构与参数突变^[14-15]。文献[16]研究了具有乘性噪声的连续时间随机线性 MJSs 的 H 指数问题,文献[17]分析了具有时变转移概率的 T-S 模糊 MJSs 的有限时间扩展耗散滤波问题,文献[18]讨论了具有随机不确定性的连续半 MJSs 的有限时间可靠异步控制问题,文献[19]对具有时变延迟和部分未知转移速率的 MJSs 的有限时间有界性问题进行了研究,文献[20]针对具有时变转移概率的离散 MJSs 有限时间 H_∞ 控制问题进行了讨论,Liu 等^[21]基于 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法讨论了具有时滞的随机 MJSs 的有限时间 H_∞ 控制问题。

H_2 性能指标体现系统信号输入与输出间的关联^[22],通过优化 H_2 性能指标,可以抑制随机扰动,减少随机噪声对于系统的影响,提升系统的鲁棒性和瞬态性能。文献[23]研究了满足有限时间有界的离散时间半 MJSs 的广义 H_2 控制问题,文献[24]基于动态输出反馈方法研究了均匀线性多智能体系统的次优分布 H_2 控制问题,文献[25]基于有限频率 Gramian 矩阵方法研究了有限频率范围内线性连续时间系统的 H_2 控制问题。然而,系统满足 H_2 性能指标不能确保其满足有限时间有界^[22],在实际应用中,有时需要系统同时满足有限时间有界和 H_2 性能指标。例如,在自动驾驶中,车辆需要在有限时间内做出决策,确保车辆状态有界,并通过 H_2 性能指标优化传感器对噪声和外部干扰的响应^[26]。文献[27]讨论了连续时间随机时变系统在 H_2 性能指标限制下的有限时间有界性问题。

基于以上论述,本研究将文献[27]的研究成果推广到随机时变 MJSs,与文献[27]相比所得的结论更具普遍性。本研究针对具有外部干扰的连续时间线性时变 MJSs,研究系统的有限时间 H_2 控制问题。首先,给出系统 H_2 性能指标以及有限时间有界的定义。其次,由状态反馈控制器实现闭环系统在满足 H_2 指标下有限时间有界。运用线性矩阵不等式相关理论和 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法,给出闭环系统在 H_2 性能指标约束下有限时间有界的充分条件。最后,通过给出仿真算例阐明结果的有效性。

文中符号: $\mathbf{A}^{p \times q}$ 是 $p \times q$ 维实矩阵; $\mathbf{A} > 0$ 表示 $\mathbf{A}$ 是正定矩阵; $\mathbf{A}^T$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的转置; $\dot{\mathbf{M}}(t)$ 是 $\mathbf{M}(t)$ 的导数; $\mathbf{E}[\cdot]$ 表示 $[\cdot]$ 的数学期望; $\mathbf{I}$ 表示适当维数的单位矩阵; $\text{diag}\{\cdots\}$ 表示一个块对角矩阵;向量函数 $\mathbf{g}(t)$ 在 $[0, \bar{T}]$ 上的 L_2 范数和 L_∞ 范数分别表示为 $\|\mathbf{g}(t)\|_{2,[0,\bar{T}]}$ 和 $\|\mathbf{g}(t)\|_{\infty,[0,\bar{T}]}$,其中 $\|\mathbf{g}(t)\|_{2,[0,\bar{T}]} = \mathbf{E} \left[\int_0^{\bar{T}} \mathbf{g}^T(t) \mathbf{g}(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}$, $\|\mathbf{g}(t)\|_{\infty,[0,\bar{T}]} = \text{esssup}_{t \in [0,\bar{T}]} \|\mathbf{g}(t)\|_{2,[0,\bar{T}]}$,esssup 表示本性上确界。

1 定义和问题描述

考虑如下连续时间线性时变随机 MJSs:

$$\begin{cases} d\mathbf{x}(t) = (\mathbf{A}(r_t, t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(r_t, t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}(r_t, t)\mathbf{v}(t))dt + (\mathbf{H}(r_t, t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{M}(r_t, t)\mathbf{u}(t))dW(t), \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{D}(r_t, t)\mathbf{x}(t), \forall t \in [0, \bar{T}]. \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 是系统状态, $\mathbf{u}(t)$ 是控制输入, $\mathbf{z}(t)$ 是系统输出。假设 $\mathbf{x}(0)$ 为确定的向量,随机跳变过程 $\{r_t, t \geq 0\}$ 是在 $\bar{M} = \{1, 2, \dots, m\}$ 上取值的马尔可夫链, π_{ij} 是模态 i 到的模态 j 的转移概率,满足

$$\Pr(r_{t+\Delta t} = j | r_t = i) = \begin{cases} \pi_{ij} \Delta t + o(\Delta t), & i \neq j; \\ 1 + \pi_{ij} \Delta t + o(\Delta t), & i = j. \end{cases}$$

当 $i \neq j$ 时, $\pi_{ij} \geq 0, \pi_{ii} = -\sum_{j \neq i} \pi_{ij}, \Delta t > 0, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0, \boldsymbol{\Pi} = [\pi_{ij}]_{m \times m}$ 为转移概率矩阵; $\mathbf{A}(r_i, t), \mathbf{B}(r_i, t), \mathbf{G}(r_i, t), \mathbf{D}(r_i, t), \mathbf{H}(r_i, t)$ 和 $\mathbf{M}(r_i, t)$ 是适当维数的矩阵函数, 为简单起见, 令 $r_i = i (i \in \bar{M})$, 上述矩阵分别记作 $\mathbf{A}_i(t), \mathbf{B}_i(t), \mathbf{G}_i(t), \mathbf{D}_i(t), \mathbf{H}_i(t), \mathbf{M}_i(t)$; 外部扰动 $\mathbf{v}(t)$ 满足 $\mathbf{E}[\int_0^{\bar{T}} \mathbf{v}^T(t) \mathbf{v}(t) dt] < \bar{l}$, 其中 $\bar{l} > 0$; $\mathbf{W}(t)$ 是定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ 上的一维标准维纳过程, $\mathbf{W}(t)$ 与 $\{r_i, t \geq 0\}$ 相互独立, 满足 $\mathbf{E}[d\mathbf{W}(t)] = 0, \mathbf{E}[d\mathbf{W}^2(t)] = dt$ 。

当 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$ 时, 系统(1)化简为:

$$\begin{cases} d\mathbf{x}(t) = (\mathbf{A}_i(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}_i(t)\mathbf{v}(t))dt + \mathbf{H}_i(t)\mathbf{x}(t)d\mathbf{W}(t), \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{D}_i(t)\mathbf{x}(t), \forall t \in [0, \bar{T}]. \end{cases} \quad (2)$$

定义 1^[27] 对于系统(2), 若 $\mathbf{v}(t) = \mathbf{0}$, 且满足

$$\mathbf{x}^T(0)\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{x}(0) \leq \bar{c}_1 \Rightarrow \mathbf{E}[\mathbf{x}^T(t)\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{x}(t)] < \bar{c}_2, \forall t \in [0, \bar{T}],$$

则称系统(2)关于 $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{T}, \tilde{\mathbf{R}})$ 有限时间稳定, 式中 $\tilde{\mathbf{R}}$ 为给定的正定矩阵, $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ 为给定的正常数, 且 $\bar{c}_1 < \bar{c}_2$ 。

定义 2^[27] 对于系统(2), 若以下条件成立:

$$\mathbf{x}^T(0)\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{x}(0) \leq \bar{c}_1 \Rightarrow \mathbf{E}[\mathbf{x}^T(t)\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{x}(t)] < \bar{c}_2, \forall t \in [0, \bar{T}], \quad (3)$$

则称系统(2)关于 $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{l}, \bar{T}, \tilde{\mathbf{R}})$ 有限时间有界, 式中 $\tilde{\mathbf{R}}$ 为给定的正定矩阵, $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{l}$ 为给定的正常数, 且 $\bar{c}_1 < \bar{c}_2$ 。

定义 3^[27] 对于系统(1), 给定正定矩阵 $\mathbf{S}$, 则

$$J = \sup_{\mathbf{v}(t) \neq 0, \mathbf{x}(0) \neq 0} \left[\frac{\|\mathbf{z}(t)\|_{\infty, [0, \bar{T}]}^2}{\|\mathbf{v}(t)\|_{2, [0, \bar{T}]}^2 + \mathbf{x}^T(0)\mathbf{S}\mathbf{x}(0)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

称为系统(1)的有限时间 H_2 性能指标。

对于系统(1), 设计状态反馈控制器

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}(r_i, t)\mathbf{x}(t)。$$

式中: $\mathbf{K}(r_i, t)$ 为控制器增益矩阵函数, 当 $r_i = i \in \bar{M}$ 时, $\mathbf{K}(r_i, t)$ 简记为 $\mathbf{K}_i(t)$ 。

将 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}(r_i, t)\mathbf{x}(t)$ 代入系统(1), 并令 $r_i = i \in \bar{M}$, 得闭环系统

$$\begin{cases} d\mathbf{x}(t) = (\bar{\mathbf{A}}_i(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}_i(t)\mathbf{v}(t))dt + \bar{\mathbf{H}}_i(t)\mathbf{x}(t)d\mathbf{W}(t), \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{D}_i(t)\mathbf{x}(t), \forall t \in [0, \bar{T}]. \end{cases} \quad (5)$$

式中: $\bar{\mathbf{A}}_i(t) = \mathbf{A}_i(t) + \mathbf{B}_i(t)\mathbf{K}_i(t), \bar{\mathbf{H}}_i(t) = \mathbf{H}_i(t) + \mathbf{M}_i(t)\mathbf{K}_i(t)$ 。

定义 4 如果闭环系统(5)关于 $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{l}, \bar{T}, \tilde{\mathbf{R}})$ 有限时间有界且满足 $J \leq \bar{\gamma}$, 即

$$\|\mathbf{z}(t)\|_{\infty, [0, \bar{T}]}^2 \leq \bar{\gamma}^2 (\|\mathbf{v}(t)\|_{2, [0, \bar{T}]}^2 + \mathbf{x}^T(0)\mathbf{S}\mathbf{x}(0)),$$

则称系统(5)关于 $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{l}, \bar{T}, \tilde{\mathbf{R}})$ 是有限时间 H_2 有界, 式中 $\bar{\gamma}$ 为给定的正常数, 称为能量-峰值增益。

引理 1^[21] (Schur 引理) 对于矩阵 $\mathbf{S} > 0$ 、实对称矩阵 $\mathbf{Y}$ 、实矩阵 $\mathbf{Z}$, 以下不等式等价:

$$1) \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}^T & -\mathbf{S} \end{bmatrix} < 0;$$

$$2) \mathbf{Y} + \mathbf{Z}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{Z}^T < 0。$$

引理 2^[21] (Gronwall 不等式) 设 $f(t)$ 为非负函数, 如果存在常数 $c, d \geq 0$, 满足 $f(t) \leq c + d \int_0^t f(u)du, t \in [0, \bar{T}]$, 则 $f(t) \leq ce^{dt}, t \in [0, \bar{T}]$ 。

2 主要结论

定理 1 对于系统(2),如果存在正定矩阵函数 $\mathbf{P}_i(t)$, $i \in \bar{M}$, $t \in [0, \bar{T}]$, 满足不等式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F} - \bar{\alpha} \mathbf{P}_i(t) & \mathbf{P}_i(t) \mathbf{G}_i(t) \\ \mathbf{G}_i^T(t) \mathbf{P}_i(t) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (6a)$$

$$\mathbf{P}_i(t) > \frac{e^{\bar{\alpha} \bar{T} (\bar{c}_1 + \bar{l})}}{\bar{c}_2} \tilde{\mathbf{R}}, \quad (6b)$$

$$\mathbf{P}_i(0) < \tilde{\mathbf{R}}, \quad (6c)$$

则系统(2)关于 $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{l}, \bar{T}, \tilde{\mathbf{R}})$ 有限时间有界, 式中 $\tilde{\mathbf{R}}$ 为给定的正定矩阵, $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{l}, \bar{\alpha}$ 为给定的正常数, 且 $\bar{c}_1 < \bar{c}_2$, $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{P}}_i(t) + \mathbf{A}_i^T(t) \mathbf{P}_i(t) + \mathbf{P}_i(t) \mathbf{A}_i(t) + \mathbf{H}_i^T(t) \mathbf{P}_i(t) \mathbf{H}_i(t) + \sum_{j=1}^m \pi_{ij} \mathbf{P}_j(t)$ 。

证明: 对于 $r_t = i \in \bar{M}$, 构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函数 $V(\mathbf{x}(t), i) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}_i(t) \mathbf{x}(t)$, 由伊藤(Ito)公式, 可得

$$\begin{aligned} & L_1 V(\mathbf{x}(t), i) - \bar{\alpha} V(\mathbf{x}(t), i) - \mathbf{v}^T(t) \mathbf{v}(t) \\ &= (\mathbf{A}_i(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}_i(t) \mathbf{v}(t))^T \mathbf{P}_i(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t) \mathbf{P}_i(t) (\mathbf{A}_i(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{G}_i(t) \mathbf{v}(t)) + \\ & \quad (\mathbf{H}_i(t) \mathbf{x}(t))^T \mathbf{P}_i(t) (\mathbf{H}_i(t) \mathbf{x}(t)) + \mathbf{x}^T(t) \dot{\mathbf{P}}_i(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{x}^T(t) \sum_{j=1}^m \pi_{ij} \mathbf{P}_j(t) \mathbf{x}(t) - \\ & \quad \bar{\alpha} V(\mathbf{x}(t), i) - \mathbf{v}^T(t) \mathbf{v}(t) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{F} - \bar{\alpha} \mathbf{P}_i(t) & \mathbf{P}_i(t) \mathbf{G}_i(t) \\ \mathbf{G}_i^T(t) \mathbf{P}_i(t) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

式中, L_1 为随机过程 $\{\mathbf{x}(t), r_t\}$ 的无穷小算子。

由引理 1 知, 条件(6a)等价于

$$L_1 V(\mathbf{x}(t), i) < \bar{\alpha} V(\mathbf{x}(t), i) + \mathbf{v}^T(t) \mathbf{v}(t). \quad (8)$$

对式(8)两侧从 0 到 $t, t \in [0, \bar{T}]$ 积分, 并取数学期望, 得

$$\mathbf{E}[V(\mathbf{x}(t), i)] - V(\mathbf{x}(0), r_0) < \bar{\alpha} \mathbf{E} \left[\int_0^t V(\mathbf{x}(\tau), r_\tau) d\tau \right] + \mathbf{E} \left[\int_0^t \mathbf{v}^T(\tau) \mathbf{v}(\tau) d\tau \right]. \quad (9)$$

由引理 2, 可得

$$\mathbf{E}[V(\mathbf{x}(t), i)] < e^{\bar{\alpha} t} \left\{ V(\mathbf{x}(0), r_0) + \mathbf{E} \left[\int_0^t \mathbf{v}^T(\tau) \mathbf{v}(\tau) d\tau \right] \right\}. \quad (10)$$

根据条件(6b), 得

$$\mathbf{E}[V(\mathbf{x}(t), i)] > \frac{e^{\bar{\alpha} \bar{T} (\bar{c}_1 + \bar{l})}}{\bar{c}_2} \mathbf{E}[\mathbf{x}^T(t) \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{x}(t)]. \quad (11)$$

同理, 由条件(6c), 得

$$e^{\bar{\alpha} t} \left\{ V(\mathbf{x}(0), r_0) + \mathbf{E} \left[\int_0^t \mathbf{v}^T(\tau) \mathbf{v}(\tau) d\tau \right] \right\} < e^{\bar{\alpha} \bar{T} (\bar{c}_1 + \bar{l})}. \quad (12)$$

结合式(10)~(12), 得

$$\frac{e^{\bar{\alpha} \bar{T} (\bar{c}_1 + \bar{l})}}{\bar{c}_2} \mathbf{E}[\mathbf{x}^T(t) \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{x}(t)] < e^{\bar{\alpha} \bar{T} (\bar{c}_1 + \bar{l})},$$

即 $\mathbf{E}[\mathbf{x}^T(t) \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{x}(t)] < \bar{c}_2$ 。由定义 2 可知, 系统(2)关于 $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{l}, \bar{T}, \tilde{\mathbf{R}})$ 有限时间有界。

注 1 当 $\mathbf{G}_i(t) = 0$ 时, 式(6a)~(6c)成立, 则系统(2)关于 $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{T}, \tilde{\mathbf{R}})$ 有限时间稳定。

接下来, 给出系统(2)同时满足有限时间有界和 H_2 性能指标的充分条件。

定理 2 对于系统(2), 如果存在正定矩阵函数 $\mathbf{P}_i(t)$, $i \in \bar{M}$, $t \in [0, \bar{T}]$ 满足如下条件:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma} - \bar{\alpha} \mathbf{P}_i(t) + \frac{1}{\bar{\gamma}^2} \mathbf{D}_i^T(t) \mathbf{D}_i(t) & \mathbf{P}_i(t) \mathbf{G}_i(t) \\ \mathbf{G}_i^T(t) \mathbf{P}_i(t) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0, \quad (13a)$$

$$\mathbf{P}_i(t) > \frac{e^{\bar{\alpha} \bar{T} (\bar{c}_1 + \bar{l})}}{\bar{c}_2} \tilde{\mathbf{R}}, \quad (13b)$$

$$\mathbf{P}_i(0) < \tilde{\mathbf{R}}, \quad (13c)$$

$$\mathbf{P}_i(0) < \mathbf{S}, \quad (13d)$$

则系统(2)关于 $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{l}, \bar{T}, \tilde{\mathbf{R}})$ 是有限时间 H_2 有界的, 式中 $\tilde{\mathbf{R}}$ 为给定的正定矩阵, $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{l}, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}$ 为给定的正常数, 且 $\bar{c}_1 < \bar{c}_2$ 。

证明: 结合定理 1 和条件(13a)~(13c)可得系统(2)关于 $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{l}, \bar{T}, \tilde{\mathbf{R}})$ 有限时间有界。

接下来证明 H_2 性能指标 $J \leq \bar{\gamma}$ 。

根据引理 1, 条件(13a)等价于

$$\boldsymbol{\Gamma} - \bar{\alpha} \mathbf{P}_i(t) + \frac{1}{\bar{\gamma}^2} \mathbf{D}_i^T(t) \mathbf{D}_i(t) + \mathbf{P}_i(t) \mathbf{G}_i(t) \mathbf{G}_i^T(t) \mathbf{P}_i(t) < 0. \quad (14)$$

结合式(7)和式(14), 可得

$$L_1 V(\mathbf{x}(t), i) < \bar{\alpha} V(\mathbf{x}(t), i) + \mathbf{v}^T(t) \mathbf{v}(t) - \frac{1}{\bar{\gamma}^2} \mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}(t). \quad (15)$$

对式(15)两侧由 0 到 $\bar{T}$ 积分, 并取数学期望, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[V(\mathbf{x}(\bar{T}), r_{\bar{T}})] - V(\mathbf{x}(0), r_0) &< \bar{\alpha} \mathbf{E} \left[\int_0^{\bar{T}} V(\mathbf{x}(t), i) dt \right] + \mathbf{E} \left[\int_0^{\bar{T}} \mathbf{v}^T(t) \mathbf{v}(t) dt \right] - \\ &\quad \frac{1}{\bar{\gamma}^2} \mathbf{E} \left[\int_0^{\bar{T}} \mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}(t) dt \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

由引理 2 和式(16), 得

$$\mathbf{E}[V(\mathbf{x}(\bar{T}), r_{\bar{T}})] < e^{\bar{\alpha} \bar{T}} \left\{ V(\mathbf{x}(0), r_0) + \mathbf{E} \left[\int_0^{\bar{T}} \mathbf{v}^T(t) \mathbf{v}(t) dt \right] - \frac{1}{\bar{\gamma}^2} \mathbf{E} \left[\int_0^{\bar{T}} \mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}(t) dt \right] \right\}. \quad (17)$$

由式(17), 可得

$$0 < V(\mathbf{x}(0), r_0) + \mathbf{E} \left[\int_0^{\bar{T}} \mathbf{v}^T(t) \mathbf{v}(t) dt \right] - \frac{1}{\bar{\gamma}^2} \mathbf{E} \left[\int_0^{\bar{T}} \mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}(t) dt \right]. \quad (18)$$

根据 $V(\mathbf{x}(0), r_0)$ 的定义和条件(13d), 可得

$$0 < \mathbf{x}^T(0) \mathbf{S} \mathbf{x}(0) + \mathbf{E} \left[\int_0^{\bar{T}} \mathbf{v}^T(t) \mathbf{v}(t) dt \right] - \frac{1}{\bar{\gamma}^2} \mathbf{E} \left[\int_0^{\bar{T}} \mathbf{z}^T(t) \mathbf{z}(t) dt \right]. \quad (19)$$

综上所述, $\|\mathbf{z}(t)\|_{\infty, [0, \bar{T}]}^2 \leq \bar{\gamma}^2 [\|\mathbf{v}(t)\|_{2, [0, \bar{T}]}^2 + \mathbf{x}^T(0) \mathbf{S} \mathbf{x}(0)]$, 即 $J \leq \bar{\gamma}$ 。

定理 3 对于闭环系统(5), 若存在矩阵函数 $\mathbf{Y}_i(t)$ 和正定矩阵函数 $\mathbf{X}_i(t)$, $i \in \bar{M}, t \in [0, \bar{T}]$, 满足如下不等式:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_1 + \pi_{ii} \mathbf{X}_i(t) & * & * & * & * \\ \mathbf{G}_i^T(t) & -\mathbf{I} & * & * & * \\ \boldsymbol{\Gamma}_2 & \mathbf{0} & -\mathbf{X}_i(t) & * & * \\ \mathbf{D}_i(t) \mathbf{X}_i(t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\bar{\gamma}^2 \mathbf{I} & * \\ \mathbf{U}_i^T(t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{X}}_j(t) \end{bmatrix} < 0, \quad (20a)$$

$$\begin{bmatrix} -\bar{c}_2 \mathbf{X}_i(t) & \mathbf{X}_i(t) \\ \mathbf{X}_i(t) & -e^{-\bar{\alpha} \bar{T}} (\bar{c}_1 + \bar{l})^{-1} \tilde{\mathbf{R}}^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (20b)$$

$$\begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{R}} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{X}_i(0) \end{bmatrix} < 0, \quad (20c)$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{S} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{X}_i(0) \end{bmatrix} < 0. \quad (20d)$$

则系统(5)关于 $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{l}, \bar{T}, \tilde{\mathbf{R}})$ 有限时间 H_2 有界。式中, $\tilde{\mathbf{R}}$ 为给定的正定矩阵, $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{l}, \bar{\alpha}, \bar{\gamma}$ 为给定的正常数, $\bar{c}_1 < \bar{c}_2$, $\mathbf{\Gamma}_1 = -\dot{\mathbf{X}}_i(t) + \mathbf{A}_i(t)\mathbf{X}_i(t) + \mathbf{X}_i(t)\mathbf{A}_i^T(t) + \mathbf{B}_i(t)\mathbf{Y}_i(t) + \mathbf{Y}_i^T(t)\mathbf{B}_i^T(t) - \bar{\alpha}\mathbf{X}_i(t)$, $\mathbf{\Gamma}_2 = \mathbf{H}_i(t)\mathbf{X}_i(t) + \mathbf{M}_i(t)\mathbf{Y}_i(t)$, $\tilde{\mathbf{X}}_j(t) = \text{diag}\{\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \dots, \mathbf{X}_{i-1}(t), \mathbf{X}_{i+1}(t), \dots, \mathbf{X}_m(t)\}$, $\mathbf{U}_i(t) = [\sqrt{\pi_{i1}}\mathbf{X}_i(t)\sqrt{\pi_{i2}}\mathbf{X}_i(t)\dots\sqrt{\pi_{i(i-1)}}\mathbf{X}_i(t)\sqrt{\pi_{i(i+1)}}\mathbf{X}_i(t)\dots\sqrt{\pi_{im}}\mathbf{X}_i(t)]$, 状态反馈控制增益函数 $\mathbf{K}_i(t) = \mathbf{Y}_i(t)\mathbf{X}_i^{-1}(t)$ 。

证明: 设 $\mathbf{X}_i(t) = \mathbf{P}_i^{-1}(t)$, 则 $\dot{\mathbf{X}}_i(t) = -\mathbf{P}_i^{-1}(t)\dot{\mathbf{P}}_i(t)\mathbf{P}_i^{-1}(t)$ 。将式(13a)中的 $\mathbf{A}_i(t)$ 和 $\mathbf{H}_i(t)$ 分别替换为 $\bar{\mathbf{A}}_i(t) = \mathbf{A}_i(t) + \mathbf{B}_i(t)\mathbf{K}_i(t)$, $\bar{\mathbf{H}}_i(t) = \mathbf{H}_i(t) + \mathbf{M}_i(t)\mathbf{K}_i(t)$, 可得不等式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_3 + \sum_{j=1}^m \pi_{ij}\mathbf{P}_j(t) + \frac{1}{\bar{\gamma}^2}\mathbf{D}_i^T(t)\mathbf{D}_i(t) & \mathbf{P}_i(t)\mathbf{G}_i(t) \\ \mathbf{G}_i^T(t)\mathbf{P}_i(t) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0. \quad (21)$$

式中, $\mathbf{\Gamma}_3 = \dot{\mathbf{P}}_i(t) + \bar{\mathbf{A}}_i^T(t)\mathbf{P}_i(t) + \mathbf{P}_i(t)\bar{\mathbf{A}}_i(t) + \bar{\mathbf{H}}_i^T(t)\mathbf{P}_i(t)\bar{\mathbf{H}}_i(t) - \bar{\alpha}\mathbf{P}_i(t)$ 。

对式(21)两侧分别左乘、右乘 $\text{diag}\{\mathbf{P}_i^{-1}, \mathbf{I}\}$, 可得

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{\Gamma}}_3 + \mathbf{X}_i(t) \sum_{j=1}^m \pi_{ij}\mathbf{X}_j^{-1}(t)\mathbf{X}_i(t) + \frac{1}{\bar{\gamma}^2}\mathbf{X}_i(t)\mathbf{D}_i^T(t)\mathbf{D}_i(t)\mathbf{X}_i(t) & \mathbf{G}_i(t) \\ \mathbf{G}_i^T(t) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0. \quad (22)$$

式中, $\bar{\mathbf{\Gamma}}_3 = -\dot{\mathbf{X}}_i(t) + \mathbf{X}_i(t)\bar{\mathbf{A}}_i^T(t) + \bar{\mathbf{A}}_i^T(t)\mathbf{X}_i(t) + \mathbf{X}_i(t)\bar{\mathbf{H}}_i^T(t)\mathbf{X}_i^{-1}(t)\bar{\mathbf{H}}_i(t)\mathbf{X}_i(t) - \bar{\alpha}\mathbf{X}_i(t)$ 。

令 $\mathbf{Y}_i(t) = \mathbf{K}_i(t)\mathbf{X}_i(t)$, 则式(22)可表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_4 & \mathbf{G}_i(t) \\ \mathbf{G}_i^T(t) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0. \quad (23)$$

式中, $\mathbf{\Gamma}_4 = \mathbf{\Gamma}_1 + \mathbf{\Gamma}_2^T\mathbf{X}_i^{-1}(t)\mathbf{\Gamma}_2 + \mathbf{X}_i(t) \sum_{j=1}^m \pi_{ij}\mathbf{X}_j^{-1}(t)\mathbf{X}_i(t) + \frac{1}{\bar{\gamma}^2}\mathbf{X}_i(t)\mathbf{D}_i^T(t)\mathbf{D}_i(t)\mathbf{X}_i(t)$ 。

由引理 1, 式(23)等价于条件(20a)。同理, 条件(13b)等价于

$$\begin{bmatrix} -\bar{c}_2\mathbf{X}_i^{-1}(t) & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & -e^{-\bar{\alpha}\bar{T}}(\bar{c}_1 + \bar{l})^{-1}\tilde{\mathbf{R}}^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (24)$$

对式(24)两侧分别左乘、右乘 $\text{diag}\{\mathbf{X}_i(t), \mathbf{I}\}$, 得条件(20b)。

根据引理 1, 条件(13c)等价于条件(20c), 条件(13d) 等价于条件(20d)。由定理 2 可得, 闭环系统(5)关于 $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{l}, \bar{T}, \tilde{\mathbf{R}})$ 是有限时间 H_2 有界的。

推论 1 对于闭环系统(5), 若存在矩阵函数 $\mathbf{X}_i(t)$ 和 $\mathbf{Y}_i(t)$, $\mathbf{X}_i(t) > 0, \forall t \in [0, \bar{T}]$, 满足

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_1 + \pi_{ii}\mathbf{X}_i(t) & * & * & * \\ \mathbf{G}_i^T(t) & -\mathbf{I} & * & * \\ \mathbf{\Gamma}_2 & \mathbf{0} & -\mathbf{X}_i(t) & * \\ \mathbf{U}_i^T(t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{X}}_j(t) \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} -\bar{c}_2\mathbf{X}_i(t) & \mathbf{X}_i(t) \\ \mathbf{X}_i(t) & -e^{-\bar{\alpha}\bar{T}}(\bar{c}_1 + \bar{l})^{-1}\tilde{\mathbf{R}}^{-1} \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{R}} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{X}_i(0) \end{bmatrix} < 0,$$

则闭环系统(5)关于 $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{l}, \bar{T}, \tilde{\mathbf{R}})$ 有限时间有界,增益函数 $\bar{\mathbf{K}}_i(t) = \mathbf{Y}_i(t) \mathbf{X}_i^{-1}(t)$ 。

注 2 当马尔可夫过程 r_t 只有一种模态时,本研究的定理 1~3 退化为文献[27]的定理 1~3。

注 3 因式(20a)中含导数项 $\dot{\mathbf{X}}_i(t)$,无法进行线性矩阵不等式求解。故将微分矩阵不等式离散化为线性矩阵不等式^[22,28],从而转化为线性矩阵不等式的求解可行性问题。将区间 $[0, \bar{T}]$ 等距地离散化为时间序列 $\{t_s, s=0, 1, \dots, N, t_0=0, t_N=\bar{T}\}$, 设 $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k = \bar{T}/N, k=0, 1, \dots, N-1$, 则条件(20a)离散化得

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_1 & * & * & * & * \\ \mathbf{G}_i^T(t_{k+1}) & -\mathbf{I}/\Delta t_k & * & * & * \\ \bar{\mathbf{F}}_2 & \mathbf{0} & -\mathbf{X}_i(t_{k+1})/\Delta t_k & * & * \\ \mathbf{D}_i(t_{k+1})\mathbf{X}_i(t_{k+1}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\bar{\gamma}^2\mathbf{I}/\Delta t_k & * \\ \mathbf{U}_i^T(t_{k+1}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{X}}_j(t_{k+1})/\Delta t_k \end{bmatrix} < 0. \quad (25)$$

式中, $\bar{\mathbf{F}}_1 = \mathbf{X}_i(t_k) - \mathbf{X}_i(t_{k+1}) + \Delta t_k(\mathbf{A}_i(t_{k+1})\mathbf{X}_i(t_{k+1}) + \mathbf{X}_i(t_{k+1})\mathbf{A}_i^T(t_{k+1}) + \mathbf{B}_i(t_{k+1})\mathbf{Y}_i(t_{k+1}) + \mathbf{Y}_i^T(t_{k+1})\mathbf{B}_i^T(t_{k+1}) - \bar{\alpha}\mathbf{X}_i(t_{k+1}) + \pi_{ii}\mathbf{X}_i(t_{k+1}))$, $\bar{\mathbf{F}}_2 = \mathbf{H}_i(t_{k+1})\mathbf{X}_i(t_{k+1}) + \mathbf{M}_i(t_{k+1})\mathbf{Y}_i(t_{k+1})$ 。

同理,对条件(20b)~(20d)进行离散化,运用线性矩阵不等式方法求解 $\mathbf{X}_i(t_s)$ 和 $\mathbf{Y}_i(t_s)$ 。对于充分大的 N , $\mathbf{X}_i(t_s)$ 和 $\mathbf{Y}_i(t_s)$ 充分逼近 $\mathbf{X}_i(t)$ 和 $\mathbf{Y}_i(t)$, 其中 $t \in [t_s - \Delta t_k/2, t_s + \Delta t_k/2]$ 。因此,选择 N 时要注意,一方面要实现对 $\mathbf{X}_i(t)$ 和 $\mathbf{Y}_i(t)$ 的良好近似,另一方面又不会过度增加计算复杂性。

3 仿真算例

为验证前文所提方法的有效性,给定具有两个模态的随机时变 MJSs,其状态矩阵函数满足:

模态 1)

$$\mathbf{A}(1, t) = \begin{bmatrix} 0.006 \cos t & 0.005 \cos t \\ 0.001 \cos t & -0.09 \end{bmatrix}, \mathbf{B}(1, t) = \begin{bmatrix} 0.01 \cos t \\ 0.001 \end{bmatrix}, \mathbf{G}(1, t) = \begin{bmatrix} 0.002 \cos t \\ 0.003 \sin t \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}(1, t) = \begin{bmatrix} 0.05 \cos t & 0.02 \\ 0.01 & 0.007 \sin t \end{bmatrix}, \mathbf{M}(1, t) = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 0.05 \cos t \end{bmatrix}, \mathbf{D}(1, t) = \begin{bmatrix} 0.002 \sin t \\ 0.001 \end{bmatrix}^T;$$

模态 2)

$$\mathbf{A}(2, t) = \begin{bmatrix} 0.6 \cos t & 0.2 \cos t \\ 0.7 \cos t & -2.9 \end{bmatrix}, \mathbf{B}(2, t) = \begin{bmatrix} 0.008 \cos t \\ 0.004 \end{bmatrix}, \mathbf{G}(2, t) = \begin{bmatrix} 0.000 \sin t \\ 0.005 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}(2, t) = \begin{bmatrix} 0.5 \cos t & 1.34 \\ 0.1 & 0.3 \sin t \end{bmatrix}, \mathbf{M}(2, t) = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \cos t \end{bmatrix}, \mathbf{D}(2, t) = \begin{bmatrix} 0.001 \sin t \\ 0.001 \end{bmatrix}^T。$$

假设:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1.6 & 0.01 \\ 0.01 & 1.61 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X}_1(0) = \mathbf{X}_2(0) = \begin{bmatrix} 1.27 & 0.001 \\ 0.001 & 4.11 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.4 \\ 0.9 & -0.9 \end{bmatrix}, \bar{l} = 0.11, \bar{c}_1 = 0.01, \bar{c}_2 = 2.11, \bar{\alpha} = 0.001, \bar{T} = 5, N = 100,$$

$$\mathbf{v}(t) = 1/(9t^3)。$$

开环系统(2)的状态响应曲线和 $\mathbf{E}[\mathbf{x}^T(t)\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{x}(t)]$ 随时间变化的曲线分别如图 1 和图 2 所示,可以看出 $\mathbf{E}[\mathbf{x}^T(t)\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{x}(t)] > \bar{c}_2$, 故开环系统是不稳定的。根据定理 3 和注 3, 能量-峰值增益 $\bar{\gamma}$ 随系统迭代的变化曲线如图 3 所示, 闭环系统(5)的一种切换信号如图 4 所示。图 5 反映了增益矩阵函数 $\mathbf{K}_i(t)$ 的变化情况, 其中

$\mathbf{K}_i(t) = [\mathbf{K}_{1i}(t) \quad \mathbf{K}_{2i}(t)]$, $i=1,2$, $\mathbf{K}_{1i}$ 和 $\mathbf{K}_{2i}$ 分别表示 $\mathbf{K}_{1i}(t)$ 和 $\mathbf{K}_{2i}(t)$ 的变化曲线。系统控制输入 $u(t)$ 随时间变化的轨迹如图 6 所示,系统(5)的状态响应如图 7 所示,可以看出闭环系统在有限时间内有界。

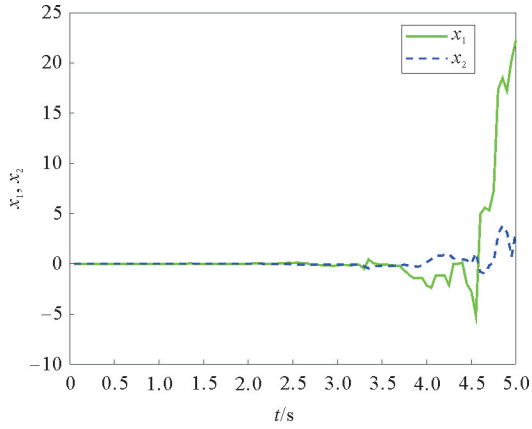


图 1 系统(2)的状态响应曲线

Fig. 1 State response curves of system (2)

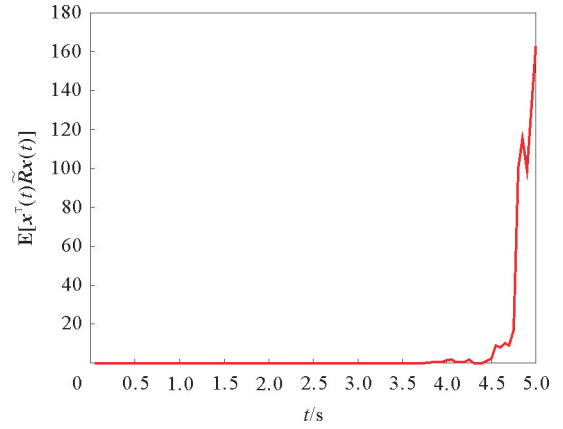


图 2 $E[x^T(t)\hat{R}x(t)]$ 的演化

Fig. 2 Evolution of $E[x^T(t)\hat{R}x(t)]$

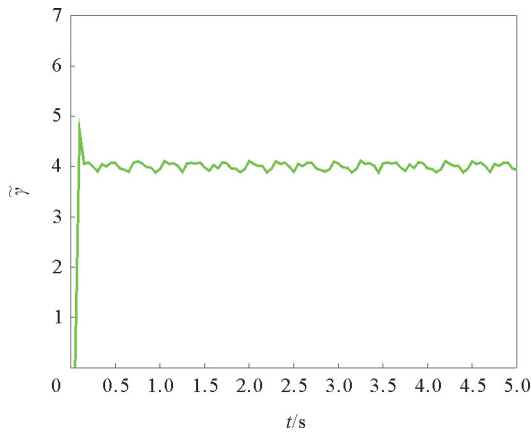


图 3 $\bar{\gamma}$ 的变化曲线

Fig. 3 Variation curves of $\bar{\gamma}$

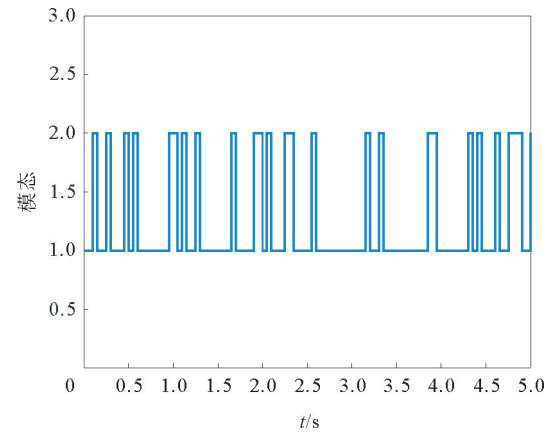


图 4 系统(5)的跳变模态曲线

Fig. 4 Jump mode curves of system (5)

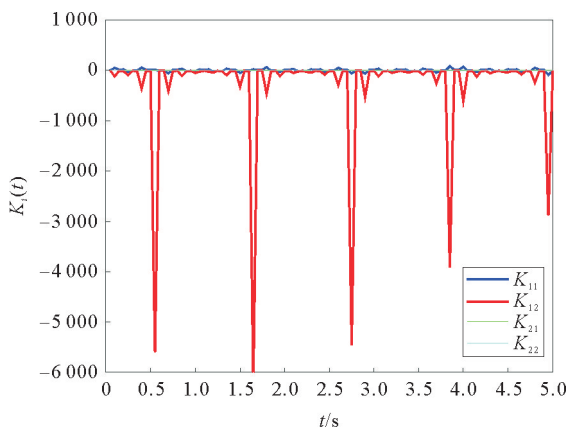


图 5 $K_i(t)$ 的轨迹

Fig. 5 Curves of $K_i(t)$

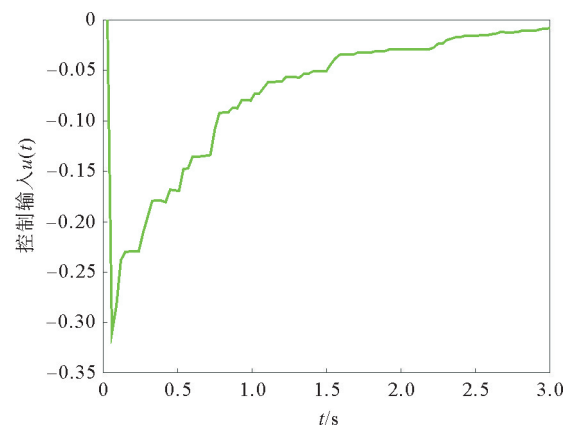


图 6 $u(t)$ 的轨迹

Fig. 6 Curves of $u(t)$

为了说明同时考虑系统有限时间有界和 H_2 增益约束的优势,给出闭环系统(5)在不同约束条件下的输出变化曲线和 $E[x^T(t)\tilde{R}x(t)]$ 的演化,分别如图8和图9所示。由图8可以看出,当系统满足有限时间 H_2 有界时,系统输出 $z(t)$ 得到了有效调节,在有限时间内收敛到零。然而,当系统只满足有限时间有界时,系统输出 $z(t)$ 出现了较大偏差,说明系统仅满足有限时间有界,不能有效地调节输出。由图9可知,当系统仅满足 H_2 增益约束时,无法在有限时间内稳定。

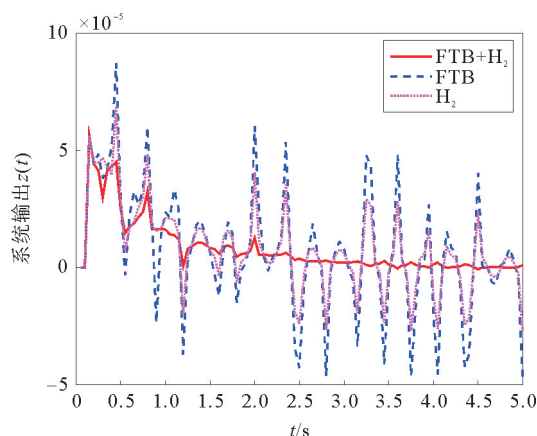


图8 系统(5)在不同约束条件下的 $z(t)$ 曲线

Fig. 8 $z(t)$ curves of system (5) with different constraints

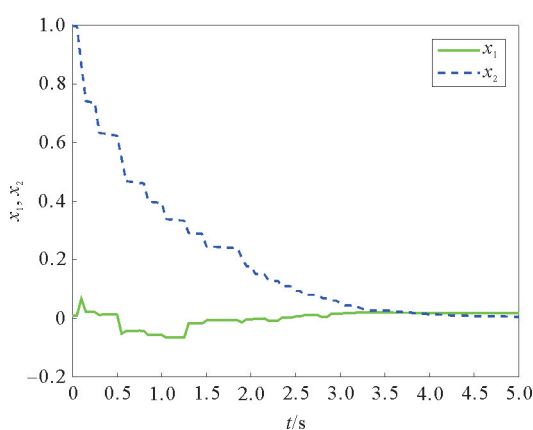


图7 系统(5)的状态响应曲线

Fig. 7 State response curves of system (5)

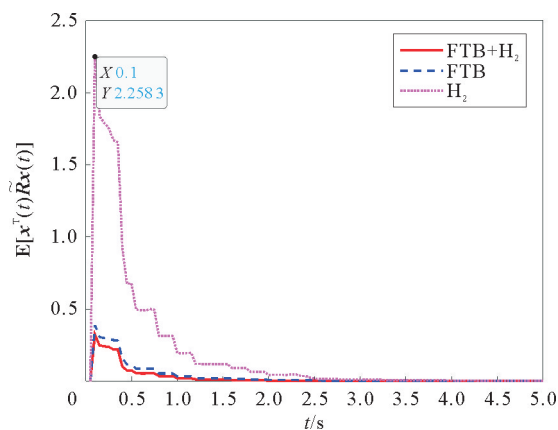


图9 系统(5)在不同约束条件下的 $E[x^T(t)\tilde{R}x(t)]$ 演化

Fig. 9 Evolutions of $E[x^T(t)\tilde{R}x(t)]$ in system (5) with different constraints

4 结论

本研究针对具有外部干扰和乘性噪声的连续时变随机 MJSs,讨论了系统的有限时间 H_2 控制问题。基于线性矩阵不等式理论和 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法,得到闭环系统有限时间 H_2 有界的充分条件,设计状态反馈控制器并求解增益函数。最后,通过数值算例阐明所提方法的有效性。

参考文献:

- [1] SANJEEVINI S, LAI B, KOUBA O, et al. Input-to-state stability of discrete-time, linear time-varying systems[J/OL]. Automatica, 2025, 177. DOI:10.1016/j.automatica.2025.112331.
- [2] MAGGIORE M, LORÍA A, PANTELEY E. Reduction theorems for stability of compact sets in time-varying systems [J/OL]. Automatica, 2023, 148. DOI:10.1016/j.automatica.2022.110771.
- [3] ZHOU B. Lyapunov differential equations and inequalities for stability and stabilization of linear time-varying systems[J/OL]. Automatica, 2021, 131. DOI:10.1016/j.automatica.2021.109785.
- [4] MAZENE F, MALISOFF M, BARBALATA C, et al. Event-triggered control for linear time-varying systems using a positive systems approach[J/OL]. Systems and Control Letters, 2022, 161. DOI:10.1016/j.sysconle.2022.105131.
- [5] CHEN K W, ASTOLFI A. Adaptive control for systems with time-varying parameters[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 66(5):1986-2001.
- [6] DORATO P. Short-time stability in linear time-varying systems[C]//Proceedings of the IRE International Convention Record Part 4, 1961:83-87.

- [7] SHI C Y, VONG S. Finite-time stability for discrete-time systems with time-varying delay and nonlinear perturbations by weighted inequalities[J]. Journal of the Franklin Institute, 2020, 357(1): 294-313.
- [8] SANG H, WANG P, ZHAO Y, et al. Input-output finite-time stability for switched T-S fuzzy delayed systems with a time-dependent Lyapunov-Krasovskii functional approach[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2023, 31(11): 3823-3837.
- [9] ZHANG T L, DENG F Q, SHI P. Nonfragile finite-time stabilization for discrete mean-field stochastic systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2023, 68(10): 6423-6430.
- [10] YAN Z G, ZHOU X M, CHANG G Z, et al. Finite-time annular domain stability and stabilization of stochastic systems with semi-Markovian switching[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2022, 68(10): 6247-6254.
- [11] KAVIKUMAR R, SAKTHIVEL R, KWON O M, et al. Finite-time boundedness of interval type-2 fuzzy systems with time delay and actuator faults[J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356(15): 8296-8324.
- [12] AMATO F, AMBROSINO R, ARIOLA M, et al. On the finite-time boundedness of linear systems[J]. Automatica, 2019, 107: 454-466.
- [13] ZHOU Z Q, XIA Y D, HUANG J X, et al. Finite-time boundedness of switched linear systems via periodically intermittent control[J]. International Journal of Systems Science, 2024, 55(9): 1895-1906.
- [14] CHEN Q Y, TONG D B, ZHOU W N. Finite-time stochastic boundedness for Markovian jumping systems via the sliding mode control[J]. Journal of the Franklin Institute, 2022, 359(10): 4678-4698.
- [15] WANG Y Z, HAN Y Q, GAO C C. Robust H_∞ sliding mode control for uncertain discrete singular T-S fuzzy Markov jump systems[J]. Asian Journal of Control, 2023, 25(1): 524-536.
- [16] LIU X K, ZHANG W H, LI Y. H_1 index for continuous-time stochastic systems with Markov jump and multiplicative noise[J]. Automatica, 2019, 105: 167-178.
- [17] TIAN Y F, WANG Z S. Finite-time extended dissipative filtering for singular T-S fuzzy systems with nonhomogeneous Markov jumps[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2020, 52(6): 4574-4584.
- [18] HU M J, PARK J H, CHENG J. Finite-time asynchronous control for semi-Markov jump systems with random uncertainties and actuator faults[J/OL]. Information Sciences, 2024, 674. DOI:10.1016/j.ins.2024.120701.
- [19] ZHOU J, AI X R. Finite-time H_∞ filtering for Markov jump systems with partially unknown transition rates[J]. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2024, 38(11): 3710-3730.
- [20] GAO X B, REN H R, DENG F Q, et al. Observer-based finite-time H_∞ control for uncertain discrete-time nonhomogeneous Markov jump systems[J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356(4): 1730-1749.
- [21] 刘西奎, 刘文成, 李艳, 等. 随机时滞马尔可夫跳跃系统的有限时间 H_∞ 控制[J]. 山东科技大学学报(自然科学版), 2022, 41(4): 75-84.
LIU Xikui, LIU Wencheng, LI Yan, et al. Finite-time H_∞ control of stochastic time-delay Markovian jump systems[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology(Natural Science), 2022, 41(4): 75-84.
- [22] ZHANG S, GUO Y, WANG S C, et al. Finite-time bounded stabilisation for linear systems with finite-time H_2 -gain constraint[J]. IET Control Theory and Applications, 2020, 14(10): 1266-1275.
- [23] XIN B, ZHAO D L. Generalized H_2 control of discrete-time semi-Markov jump systems[J]. Asian Journal of Control, 2023, 25(1): 114-127.
- [24] JIAO J, TRENTELMAN H L, CAMLIBEL M K. A suboptimality approach to distributed H_2 control by dynamic output feedback[J/OL]. Automatica, 2020, 121. DOI:10.1016/j.automatica.2020.109164.
- [25] QUAN H Z, LU X J, CAI C X, et al. A Gramian matrix approach to synthesizing finite-frequency H_2 controller[J/OL]. Applied Mathematics and Computation, 2024, 481. DOI:10.1016/j.amc.2024.128924.
- [26] GAO H B, KAN Z, CHEN F, et al. Adaptive finite-time trajectory tracking control of autonomous vehicles that experience disturbances and actuator saturation[J]. IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine, 2021, 14(2): 80-91.
- [27] 刘西奎, 姚辰欣, 李艳, 等. 具有 H_2 增益约束的连续时变线性随机系统的有限时间有界性[J]. 山东科技大学学报(自然科学版), 2024, 43(4): 100-110.
LIU Xikui, YAO Chenxin, LI Yan, et al. Finite-time boundness for continuous time-varying linear stochastic systems with H_2 gain constraint[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology(Natural Science), 2024, 43(4): 100-110.
- [28] SHAKED U, SUPLIN V. A new bounded real lemma representation for the continuous-time case[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(9): 1420-1426.